

## State feedback control with integral action applied to a knee rehabilitation robot.

Janeth Jiménez-Gómez \* Gloria-L. Osorio-Gordillo \*  
Angel-R. Guadarrama-Estrada \*  
Gerardo-V. Guerrero-Ramírez \*  
Carlos-M. Astorga-Zaragoza \*

\* *Tecnológico Nacional de México/CENIDET, Interior Internado  
Palmira S/N, Col. Palmira, 62490 Cuernavaca, Mor. México.  
e-mail:m21ce035@cenidet.tecnm.mx*

---

**Abstract:** The main objective of this paper is to describe the design of a state feedback controller with integral action based on a proportional integral observer with Takagi-Sugeno structure, for trajectory tracking of a rehabilitation routine applied to a knee rehabilitation robot. The stability analysis of the controller is addressed by Lyapunov, a constraint is applied to the controller input.

*Keywords:* State feedback control with integral action, Takagi-Sugeno, Nonlinear sector, Knee rehabilitator robot, LMI Region.

---

### 1. INTRODUCCIÓN

Las personas que sufren de una discapacidad normalmente requieren de algún tipo de rehabilitación. La rehabilitación se define como un conjunto de intervenciones encaminadas a optimizar el funcionamiento y reducir la discapacidad en personas con afecciones de salud en la interacción con su entorno (WHO, 2021).

En México existe una gran demanda de pacientes que requieren de terapias de rehabilitación. Desafortunadamente, de acuerdo con datos mostrados en INEGI (2021), existe un número limitado de personal médico dedicado al área de ortopedia, fisioterapia y afines.

Los robots rehabilitadores están diseñados para ejecutar movimientos repetitivos durante largos lapsos de tiempo, sin la participación directa de algún personal médico.

En la robótica de rehabilitación, el paciente y el robot interactúan constantemente entre sí. Es por ello que medir las variables que describen el comportamiento del rehabilitador se vuelve de suma importancia, para garantizar la seguridad del paciente, así como la eficiencia del seguimiento de la rutina de rehabilitación del robot rehabilitador (Mohammadi and Dallali, 2020).

El problema existente en el diseño de los robots rehabilitadores, es que son pocos los rehabilitadores que cuentan con diseños de esquemas de control dedicados al seguimiento de trayectoria de las rutinas de rehabilitación. Por mencionar algunos se encuentra el robot rehabilitador iLeg (Hu et al., 2012) donde se aplica una estrategia de control por impedancias para entrenamiento pasivo y

activo, en donde el paciente es quien genera el esfuerzo en la rutina de rehabilitación. Por otro lado, el robot Physiotherabot (Akdoğan and Adli, 2011) está diseñado para ejecutar ciertas rutinas de rehabilitación de forma automática. Otra problemática presente en los robots rehabilitadores son el uso de actuadores y sensores costosos, una forma de reducir costo en sensores es aplicando el diseño de observadores, los cuales estiman por medio de algoritmos las variables involucradas en el robot rehabilitador.

Para el diseño de un observador y controlador es necesario contar con una representación matemática que describa al robot rehabilitador. En este artículo la representación del sistema se muestra por modelos Takagi-Sugeno por el enfoque de sector no lineal.

El caso de estudio que compete este artículo es un robot rehabilitador de rodilla, basado en el robot rehabilitador Multi-Iso. En Seddiki et al. (2006) se planteó el diseño de un controlador dedicado al seguimiento de trayectoria en rutinas de rehabilitación mediante el uso del enfoque Takagi-Sugeno por el enfoque de sector no lineal.

El aporte de esta investigación, es el diseño de un controlador por retroalimentación de estados con acción integral para el seguimiento de trayectoria en una rutina de rehabilitación dedicada al tratamiento del cuidado postoperatorio de la reconstrucción del ligamento cruzado anterior en la rodilla (Brent Brotzman and Manske, 2012) que comprende un movimiento de  $\theta(t) \in [91^\circ, 150^\circ]$ . El controlador está basado en un observador proporcional integral para sistemas Takagi-Sugeno por el enfoque de sector no lineal presentado en Jiménez Gómez (2023),

aplicado al caso de estudio presentado a continuación. La validación del esquema de control se hace por medio de simulación.

## 2. CASO DE ESTUDIO

### 2.1 Formulación del problema

La rodilla es una de las articulaciones que frecuentemente presenta lesiones sin importar el rango de edad. En la literatura existen diversos rehabilitadores de rodilla, como lo son el rehabilitador Sys-Réeduc (Seddiki et al., 2007), iLeg (Hu et al., 2012), Physiotherabot (Akdoğan and Adli, 2011), entre otros.

El rehabilitador Multi-Iso de acuerdo con Moughamir et al. (2002) apoya a pacientes que sufren traumatismo articular y/o muscular. Genera movimientos de flexión - extensión en la rodilla y posee un solo grado de libertad (DOF, por sus siglas en inglés *Degree Of Freedom*). El diagrama de cuerpo libre del rehabilitador, se muestra en la Fig. 1.

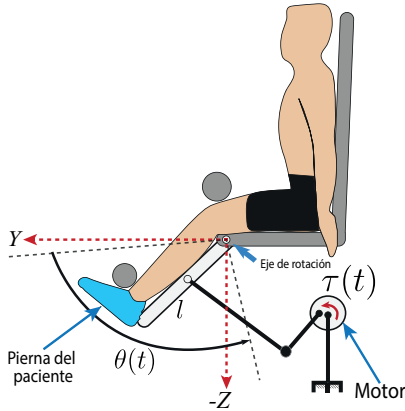


Fig. 1. Diagrama de cuerpo libre del rehabilitador de rodilla.

En la Fig. 1 se puede observar que el rehabilitador genera un movimiento del tipo vertical en el eje  $Y$  hacia  $Z$ . La posición  $\theta(t)$  es el margen de movimiento del rehabilitador. El rehabilitador tiene la restricción físicamente de solo permitir movimientos de  $\theta(t) \in [8^\circ, 150^\circ]$ . El cambio de posición se debe al par  $\tau(t)$  aplicado por el motor. En el análisis de balance de energía, se considera que la energía potencial es despreciable en el eje  $Y$ , ya que el rehabilitador solo genera movimiento del tipo vertical.

### 2.2 Modelo dinámico del robot rehabilitador de rodilla

El modelo matemático está descrito por la siguiente ecuación:

$$ml^2\ddot{\theta}(t) + b\dot{\theta}(t) - mgl \cos(\theta(t)) = \tau(t) \quad (1)$$

La representación en espacios de estado es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g \cos(\theta(t)) & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ ml^2 \end{bmatrix} \tau \quad (2)$$

$$y(t) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

donde  $\ddot{\theta}(t)$ ,  $\dot{\theta}(t)$ ,  $\theta(t)$  son aceleración ( $rad/s^2$ ), velocidad ( $rad/s$ ) y posición angular ( $rad$ ),  $\tau(t)$  es el par aplicado por el motor ( $Nm$ ).

Considerando el sistema no lineal continuo en su representación Takagi-Sugeno tenemos:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(z)(A_i x(t)) + Bu(t) \quad (4)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (5)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entradas,  $y(t) \in \mathbb{R}^q$  es el vector de la variable medida de salida.  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$  son matrices conocidas,  $k$  es el número de modelos locales,  $\varphi_i(z)$  son las funciones de pertenencia que dependen de la variable premisa  $z$ .

La variable premisa considerada en la representación Takagi-Sugeno es la siguiente:

$$z(t) = \frac{g \cos(\theta(t))}{l\theta} \quad (6)$$

con el siguiente máximo y mínimo de operación

$$z(t) \in [-0,346605 \ 7,446915] \quad (7)$$

Tabla 1. Parámetros numéricos del modelo dinámico del rehabilitador

Parámetro	Nombre	Valor
$m$	Masa	2 Kg
$l$	Longitud	0,42 m
$g$	Gravedad	9,81 m/s <sup>2</sup>
$b$	Coefficiente de fricción viscosa	0,60 Nm s/rad
$\tau$	Par aplicado por el motor	$\pm 2$ Nm

Considerando los parámetros de la Tabla 1 y de acuerdo a la representación Takagi-Sugeno mostrada en Jiménez et al. (2022) las matrices  $A_i$ ,  $B$  y  $C$  son las siguientes:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8,0957 & -1,7007 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,8345 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 173,9387 & -1,7007 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0]$$

De acuerdo con Lendek et al. (2011), la suma convexa de las funciones de pertenencia debe cumplir con las siguientes restricciones:

$$1 \geq \varphi_i(z) \geq 0; \quad \sum_{i=1}^k \varphi_i(z) = 1; \quad (9)$$

*Hipótesis 1.* Para el diseño se supone implícitamente que los modelos locales, es decir, los pares  $(A_i, C)$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, k$ , son observables, es decir;

$$\text{rank} \left( \begin{bmatrix} C \\ CA_i \\ \vdots \\ CA_i^{n-1} \end{bmatrix} \right) = n, \quad \forall i = 1, \dots, k \quad (10)$$

donde  $n$  es la dimensión del vector de estados del sistema.

Utilizando el Observador Proporcional Integral (PIO, por sus siglas en inglés *Proportional Integral Observer*) aplicado a sistemas Takagi-Sugeno está dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(t) &= \sum_{i=1}^k \varphi_i(z) (N_i \zeta(t) + H_i v(t) + F_i y(t)) + Ju(t) \\ \dot{v}(t) &= y(t) - C \hat{x}(t) \\ \hat{x}(t) &= \zeta(t) + Qy(t) \end{aligned} \quad (11)$$

donde  $\zeta(t) \in \mathbb{R}^n$  representa el vector del observador,  $v(t) \in \mathbb{R}^q$  es un vector auxiliar y  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  es la estimación de  $x(t)$ . Las matrices  $N_i$ ,  $H_i$ ,  $F_i$ ,  $J$  y  $Q$  son matrices desconocidas de dimensiones apropiadas que son determinadas de forma tal que  $\hat{x}(t)$  converja asintóticamente a  $x(t)$ .

Las ganancias del observador son obtenidas siguiendo la metodología mostrada en Jiménez Gómez (2023). Este artículo esta enfocado al diseño del controlador.

### 3. DISEÑO DEL CONTROLADOR POR RETROALIMENTACIÓN DE ESTADOS CON ACCIÓN INTEGRAL

En esta sección, se presenta el diseño de un controlador basado en el observador (11), por retroalimentación de estados con acción integral, con ganancias constantes.

Dado que la representación del robot rehabilitador de rodilla posee una representación Takagi-Sugeno este permite aplicar el principio de separación. Este principio posibilita el diseño de un controlador basado en los estados estimados por el observador.

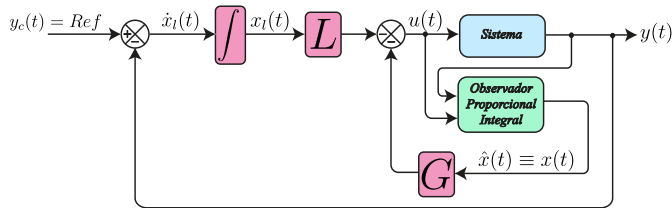


Fig. 2. Esquema del controlador.

En la Fig. 2 se muestra el esquema de control a trabajar, donde  $y_c(t)$  es la señal de referencia. En la presente investigación, dicha señal corresponde a una rutina de rehabilitación, para el tratamiento de una cirugía postoperatoria de la reconstrucción del ligamento cruzado anterior.

*Hipótesis 2.* (Lendek et al., 2011) Para el diseño del controlador se supone implícitamente que los modelos

locales, es decir, los pares  $(A_i, B), \forall i = 1, 2, \dots, k$ , son controlables.

$$\text{rank} ([B \ A_i B \ \dots \ A_i^{n-1} B]) = n, \quad \forall i = 1, \dots, k \quad (12)$$

El modelo T-S es completamente controlable si (12) es de rango completo para todo instante de tiempo  $t \geq 0$ .

Verificando que la Hipótesis 2 se cumpla y tomando como referencia el esquema mostrado en la Fig. 2 para el desarrollo de la ley de control y asumiendo que  $x(t) \equiv \hat{x}(t)$  en un tiempo finito, se define una ley de control como:

$$u(t) = -[G \ L] \begin{bmatrix} x(t) \\ x_l(t) \end{bmatrix} \quad (13)$$

donde  $x_l(t)$  está dado por:

$$x_l(t) = \int (y_c(t) - y(t)) dt \quad (14)$$

cuya derivada es el error del seguimiento de trayectoria definido por:

$$\dot{x}_l(t) = y_c(t) - Cx(t) \quad (15)$$

Sustituyendo la ley de control (13) en el sistema T-S (4) se obtiene,

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(z) (A_i - BG)x(t) - BLx_l(t) \quad (16)$$

Agrupando las Ecuaciones (15) y (16) se tiene:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{x}_l(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\tilde{x}}(t)} = \sum_{i=1}^k \varphi_i(z) \begin{bmatrix} A_i - BG & -BL \\ -C & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ x_l(t) \end{bmatrix}}_{\tilde{x}(t)} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} y_c(t) \quad (17)$$

se puede reescribir como:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(z) (\check{A}_i - \check{B}\check{K})\tilde{x}(t) + \check{D}y_c(t) \quad (18)$$

donde  $\check{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\check{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\check{K} = [G \ L]$  y  $\check{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$ .

Ahora, el problema a resolver es, calcular la matriz  $\check{K}$ , tal que la Ecuación (18) en lazo cerrado sea estable.

#### 3.1 Análisis de estabilidad del controlador

La estabilidad de los modelos Takagi-Sugeno se garantiza mediante el método directo de Lyapunov. La función de Lyapunov utilizada habitualmente es la cuadrática. Por lo que, se propone la siguiente función candidata de Lyapunov,

$$V(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}(t)^T P \tilde{x}(t) > 0 \quad (19)$$

donde  $P = P^T > 0$ .

Al usar una función de Lyapunov, se habla de “estabilidad cuadrática”. Cuando un sistema es cuadráticamente estable, implica que el sistema es estable. Por lo tanto, las condiciones de estabilidad obtenidas usando la función de Lyapunov (19) son más que suficientes para garantizar estabilidad.

Derivando (19) se obtiene:

$$\dot{V}(\tilde{x}(t)) = \dot{\tilde{x}}(t)^T P \tilde{x}(t) + \tilde{x}(t)^T P \dot{\tilde{x}}(t) < 0 \quad (20)$$

Sustituyendo (18) y considerando que  $y_c(t) = 0$  se tiene:

$$\dot{V}(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}(t)^T [\check{A}_i^T P + P \check{A}_i - P \check{B} \check{K} - \check{K}^T \check{B}^T P] \tilde{x}(t) < 0 \quad (21)$$

Para asegurar que la desigualdad  $\dot{V}(\tilde{x}(t)) < 0$  se cumpla para toda  $\tilde{x}(t) \neq 0$ , se propone la siguiente desigualdad,

$$\check{A}_i^T P + P \check{A}_i - P \check{B} \check{K} - \check{K}^T \check{B}^T P < 0 \quad (22)$$

dado que las matrices  $P$  y  $\check{K}$  son matrices desconocidas, se tienen términos bilineal.

Se procede a pre-multiplicar y pos-multiplicar por  $P^{-1}$  de forma que no se altere la negatividad de la desigualdad, obteniendo

$$P^{-1} (\check{A}_i^T P + P \check{A}_i - P \check{B} \check{K} - \check{K}^T \check{B}^T P) P^{-1} < 0 \quad (23)$$

Simplificando

$$P^{-1} \check{A}_i^T + \check{A}_i P^{-1} - \check{B} \check{K} P^{-1} - P^{-1} \check{K}^T \check{B}^T < 0 \quad (24)$$

Se realiza un cambio de variables.

$$S = P^{-1}, \quad R = \check{K} S \quad (25)$$

Por lo tanto,

$$S \check{A}_i^T + \check{A}_i S - \check{B} R - R^T \check{B}^T < 0 \quad (26)$$

Resolviendo la desigualdad (26), se obtienen las matrices  $S$  y  $R$  las cuales nos permiten calcular la ganancia  $\check{K}$  del controlador, la cual está dada por:

$$\check{K} = R S^{-1} \quad (27)$$

donde,

$$[G \ L] = R S^{-1} \quad (28)$$

despejando las matrices  $G$  y  $L$ , tenemos:

$$G = R S^{-1} \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L = R S^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \quad (29)$$

**Definición 1.** (Bernal et al., 2019) Una región LMI (por sus siglas en inglés *Linear Matrix Inequality*) del tipo vertical, toma todo el semiplano complejo a la izquierda de un valor  $\delta$  (Fig. 3).

$$\mathcal{D}_1 = \{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) < -\delta \Leftrightarrow f_{\mathcal{D}_1}(s) = \alpha + s + s^* < 0\} \quad (30)$$

esta región LMI implica  $\alpha = 2\delta$ .

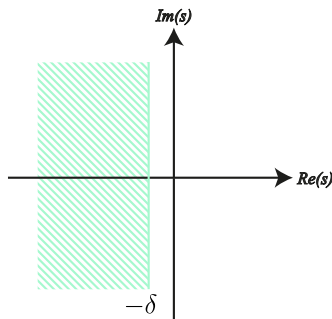


Fig. 3. Región LMI vertical  $\mathcal{D}_1$ .

Con la finalidad de que el controlador respete la región de operación del rehabilitador, se aplica una región LMI del tipo vertical a la desigualdad de Lyapunov mostrada en la Ecuación (26), obteniendo

$$S \check{A}_i^T + \check{A}_i S - \check{B} R - R^T \check{B}^T + 2\sigma S < 0 \quad (31)$$

donde  $\sigma$  es una constante positiva.

#### 4. APLICACIÓN DE RESTRICCIÓN DE ENTRADA EN EL SISTEMA

Debido a que ninguna planta física dispone de energía ilimitada para realizar tareas de control, de tal forma que, respete restricciones, se aplicó la metodología mostrada en (Bernal et al., 2019) donde presenta una estrategia para restringir la magnitud de la señal de entrada al controlador por medio de LMI's.

**Definición 2. Norma Euclídiana:** (Doyle et al., 2013) Sea un vector  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  la norma Euclídiana queda definida como:

$$\|u(t)\| = \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t) + \dots + u_m^2(t)} \quad (32)$$

De acuerdo con la Definición 2 para acotar la ley de control  $u(t)$  (Ecuación (13)), de tal forma que  $\|u(t)\| < \mu$  para una  $\mu > 0$ , donde  $\mu$  es una constante.

La condición  $\|u(t)\| < \mu$  con la ley de control  $u(t) = \check{K} \tilde{x}(t)$  puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} \|u(t)\| < \mu &\Leftrightarrow \|u(t)\|^2 = u(t)^T u(t) \\ &= \tilde{x}(t)^T \check{K}^T \check{K} \tilde{x}(t) \leq \mu^2 \\ &\Leftrightarrow \tilde{x}(t)^T \check{K}^T \mu^{-2} \check{K} \tilde{x}(t) \leq 1 \end{aligned} \quad (33)$$

Retomando la Ecuación (19) la cual nos permite definir la estabilidad en el controlador, de forma tal que satisfaga las siguientes condiciones. Se obtiene:

$$V(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}(t)^T P \tilde{x}(t) \leq \tilde{x}(0)^T P \tilde{x}(0) \leq 1 \quad (34)$$

donde se introduce una condición inicial  $\tilde{x}(0)$ , dicha condición inicial se puede proponer.

Debido a que la matriz  $\check{K}$  y  $P$  se calculan, las desigualdades (33) y (34) pueden combinarse, por lo tanto,

$$\tilde{x}(t)^T \check{K}^T \mu^{-2} \check{K} \tilde{x}(t) \leq \tilde{x}(t)^T P \tilde{x}(t) \leq \tilde{x}(0)^T P \tilde{x}(0) \leq 1 \quad (35)$$

que es equivalente a:

$$\begin{cases} \tilde{x}(t)^T (P - \check{K}^T \mu^{-2} \check{K}) \tilde{x}(t) \geq 0 \\ 1 - \tilde{x}(0)^T P \tilde{x}(0) \geq 0 \end{cases} \quad (36)$$

Aplicando el complemento de Schur a las LMI's de la Ecuación (36), se obtienen las siguientes desigualdades equivalentes:

$$\begin{bmatrix} P & \check{K}^T \\ \check{K} & \mu^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (37)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \tilde{x}(0)^T \\ \tilde{x}(0) & P^{-1} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (38)$$

Como estas LMI's se van a revolver junto con la LMI (31), es necesario que estas desigualdades se expresen en términos de las variables:  $S$  y  $R$  mostradas en la Ecuación (25). Por lo tanto, se pre-multiplica y post-multiplica por  $\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ . Obteniendo,

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & P^{-1}\tilde{K}^T \\ \tilde{K}P^{-1} & \mu^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (39)$$

Haciendo el cambio de variable para las LMI's (39) y (38) quedan expresadas como:

$$\begin{bmatrix} S & R^T \\ R & \mu^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (40)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \tilde{x}(0)^T \\ \tilde{x}(0) & S \end{bmatrix} \geq 0 \quad (41)$$

Estas LMI's se deben de cumplir para garantizar  $\|u(t)\| < \mu$ .

## 5. RESULTADOS

Cabe mencionar que en la siguiente simulación, la posición del rehabilitador se muestra en grados, para comodidad del lector, aunque en el modelo matemático mostrado en la Ecuación (1) es manejado en radianes.

La simulación se desarrolla en Simulink, con un paso de integración de  $0,001s$  se considera un tiempo de simulación de  $400s$ . Las condiciones iniciales consideradas en el sistema Takagi-Sugeno son  $x(t) = [91^\circ \ 0 \ rad/s]^T$ , en el PIO son  $\hat{x}(t) = [0^\circ \ 0 \ rad/s]^T$ .

Las ganancias obtenidas en el diseño del observador proporcional integral (Ecuación (11)), para el caso de estudio expuesto en este artículo, se muestran en (Jiménez Gómez, 2023), siendo:

$$N_{1,2} = \begin{bmatrix} -100,5 & -41,21073 \\ 41,21073 & -100,5 \end{bmatrix}, H_{1,2} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} -8213,2707 \\ -8239,103 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} -8213,2707 \\ -8057,0686 \end{bmatrix},$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,8345 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 42,2107 \\ 98,7993 \end{bmatrix}$$

Resolviendo las LMI's (31)-(40)-(41), con una región LMI vertical  $\sigma = 8$ , con una restricción de entrada de  $\mu = 600$  y una condición inicial de  $\tilde{x}(0) = [91^\circ \ 0 \ 0]^T$ . Una vez calculadas las LMI's con la herramienta Yalmip Löfberg (2004), se obtuvieron las siguientes ganancias para el controlador:

$$\begin{aligned} G &= [289,9109 \ 14,1228] \\ L &= [1,6976 \times 10^3] \end{aligned} \quad (42)$$

Para la validación del controlador basado en el observador para el seguimiento de trayectoria, se fijó una rutina

de rehabilitación, la cual llamaremos "referencia" que corresponde a la variable  $y_c(t)$  que como se mencionó con anterioridad corresponde a una rutina de rehabilitación postoperatoria que comprende un movimiento de  $\theta(t) \in [91^\circ, 150^\circ]$ . En la Fig. 4 se muestra la señal de referencia que corresponde a la rutina de rehabilitación.

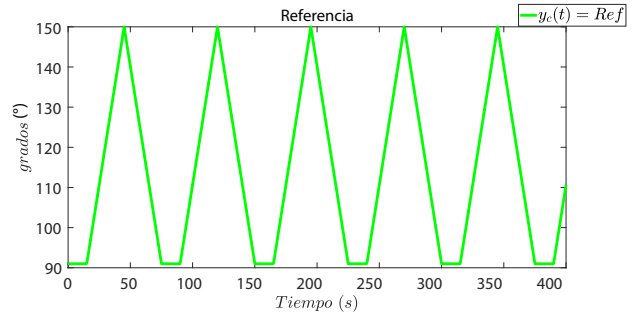


Fig. 4. Señal de referencia  $y_c(t)$  para el seguimiento de trayectoria.

En la Fig. 5 se puede observar en líneas negras la referencia y en azul el comportamiento de la variable de posición angular, una vez controlada. Como se puede apreciar el controlador basado en el observador diseñado con la restricción a la entrada, la salida de esta tiende a llegar a la referencia. Teniendo un transitorio de  $t \leq 0,3s$  para que el controlador converja a la referencia.

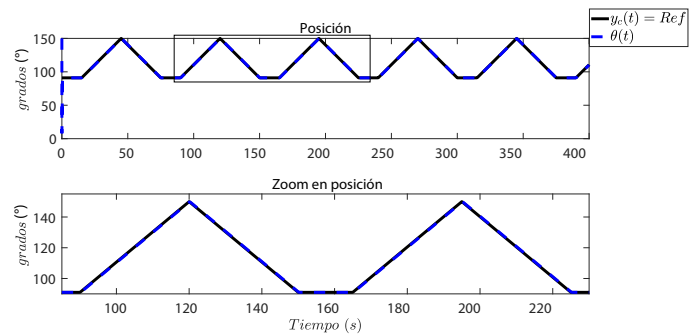


Fig. 5. Respuesta del controlador ante el seguimiento de trayectoria en la variable de posición.

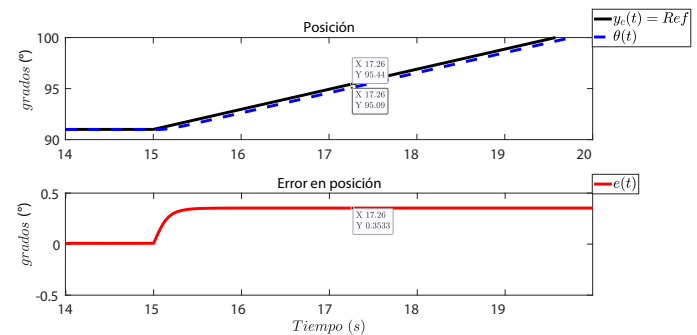


Fig. 6. Error en seguimiento de trayectoria.

Tabla 2. Índices de desempeño en el seguimiento de trayectoria del controlador

	ISE	ITSE	IAE	ITAE
$\theta(t)$	1105	7431	122.2	21453.70

En la Fig. 6 se puede apreciar con mayor detalle el seguimiento de trayectoria del controlador, como tal, existe un error de  $0,3533^\circ$  entre la referencia y la variable controlada, esto debido a que en el diseño del controlador se aplicó una región LMI así como una restricción a la entrada, de forma tal que se asegurará la estabilidad del sistema, para fines físicos este error es despreciable, pero una vez evaluado con los índices de desempeño mostrados en la Tabla 2 los índices ITAE y ITSE los cuales evalúan la integral el error por el tiempo, es claro que estos nos entregarán valores grandes, ya que el error de  $0,3533^\circ$  persiste en la rutina de rehabilitación y como se mencionó al principio está es una simulación de 400s.

## 6. CONCLUSIONES

El diseño del controlador basado en el observador con restricción en la entrada para el seguimiento de trayectoria de una rutina de rehabilitación, aplicado a un robot rehabilitador de rodilla, muestra a nivel simulación, un desempeño satisfactorio pese a la existencia de error. Los índices de desempeño aplicados al error existente entre referencia y el controlador, mostraron un margen despreciable en el seguimiento de trayectoria, por lo que podemos concluir que el controlador diseñado cumple satisfactoriamente su objetivo.

Para futuros trabajos, se plantea la construcción física del rehabilitador, así como la agregación de dinámicas al modelo matemático que describa al comportamiento del robot rehabilitador de rodilla.

## REFERENCIAS

Akdoğan, E. and Adli, M.A. (2011). The design and control of a therapeutic exercise robot for lower limb rehabilitation: Physiotherobot. *Mechatronics*, 21(3), 509–522.

Bernal, M., Estrada, V., and Márquez, R. (2019). Diseño e implementación de sistemas de control basados en estructuras convexas y desigualdades matriciales lineales.

Brent Brotzman, S. and Manske, R. (2012). Rehabilitación ortopédica clínica, un enfoque basado en la evidencia. *Rehabilitación ortopédica clínica. SA Elsevier: España*.

Doyle, J.C., Francis, B.A., and Tannenbaum, A.R. (2013). *Feedback control theory*. Courier Corporation.

Hu, J., Hou, Z., Zhang, F., Chen, Y., and Li, P. (2012). Training strategies for a lower limb rehabilitation robot based on impedance control. In *2012 Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, 6032–6035. IEEE.

INEGI (2021). Instituto nacional de estadística geografía e informática. URL [www.inegi.org.mx/contenidos/saladeprensa/aproposito/2021/EAPMedico2021.docx](http://www.inegi.org.mx/contenidos/saladeprensa/aproposito/2021/EAPMedico2021.docx).

Jiménez, J., Astorga, C.M., Osorio, G.L., and Vargas, R.A. (2022). Proporcional Integral Observer Design for Takagi-Sugeno system applied to a knee rehabilitator. *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático*, 97–102. doi:10.58571/CNCA.AMCA.2022.013. URL <https://revistadigital.amca.mx/volumen-5-cnca-2022/proporcional-integral-observer-design-for-takagi-sugenosystem-applied-to-a-knee-rehabilitator/>.

Jiménez Gómez, J. (2023). Estrategia de control robusto para la posición de un rehabilitador de miembros inferiores. *TecNM/Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico*. URL [rinacional.tecnm.mx/jspui/handle/TecNM/1330](http://rinacional.tecnm.mx/jspui/handle/TecNM/1330).

Lendek, Z., Guerra, T.M., Babuska, R., and De Schutter, B. (2011). *Stability analysis and nonlinear observer design using Takagi-Sugeno fuzzy models*, volume 262. Springer.

Löfberg, J. (2004). Yalmip : A toolbox for modeling and optimization in matlab. In *In Proceedings of the CACSD Conference*. Taipei, Taiwan.

Mohammadi, A. and Dallali, H. (2020). Disturbance observer applications in rehabilitation robotics: an overview. *Powered prostheses*, 113–133.

Moughamir, S., Zaytoon, J., Manamanni, N., and Afilal, L. (2002). A system approach for control development of lower-limbs training machines. *Control Engineering Practice*, 10(3), 287–299.

Seddiki, L., Guelton, K., Mansouri, B., and Zaytoon, J. (2006). H-infinity Takagi-Sugeno fuzzy control of a lower limbs rehabilitation device. In *2006 IEEE Conference on Computer Aided Control System Design*, 927–932. IEEE.

Seddiki, L., Guelton, K., Moughamir, S., Mansouri, B., and Zaytoon, J. (2007). Modélisation TS et commande H-infinite d'une machine de rééducation des membres inférieurs. *Journal Européen des Systèmes Automatisés (JESA)*, 41(2), 199–218.

WHO (2021). World health organization, rehabilitation. URL [www.who.int/news-room/factsheets/detail/rehabilitation](http://www.who.int/news-room/factsheets/detail/rehabilitation).