

Robust control design for the unicycle mobile robot based on composite Lyapunov functions^{*}

Luis Añorve^{*} Iván Salgado^{*} Manuel Mera^{**}
Héctor Ríos^{***,****} David Cruz[†]

^{*} Centro de Innovación y Desarrollo Tecnológico en Cómputo, Instituto Politécnico Nacional, Mexico City, Mexico, (e-mail: isalgador@ipn.mx).

^{**} Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Instituto Politécnico Nacional, Mexico City, Mexico (e-mail: mlmerah@gmail.com)

^{***} Tecnológico Nacional de México/I.T. La Laguna, C.P. 27000, Torreón, Coahuila, México (e-mail: hrriosb@lalaguna.tecnm.mx)

^{****} CONAHCYT IxM, C.P. 03940, CDMX, México

[†] Unidad Profesional Interdisciplinaria de Biotecnología, Instituto Politécnico Nacional, México city, México (e-mail: dcruzo@ipn.mx)

Abstract: This work proposes the design of a robust time-varying controller for the perturbed kinematic model of the unicycle mobile robot. The controller is based on composite Lyapunov functions applied in time-varying linear systems. The methodology ensures the stability of the tracking error despite the presence of multiplicative disturbances in the control channel. The synthesis of the proposed controller requires the solution of a set of off-line Linear Matrix Inequalities and the solution of an optimization process regarding the composite Lyapunov approach. Simulation results show the feasibility of the proposed strategy against classical controllers.

Keywords: Unicycle mobile robot, Composite Lyapunov functions, Model reference control.

1. INTRODUCTION

Los Robots Móviles (RM) se aplican en navegación interior y exterior (Rubio et al., 2019), (Patle et al., 2019). Los controles que se han desarrollado permiten la ejecución de tareas como el movimiento punto a punto, control por modelo de referencia y seguimiento de una trayectoria deseada.

Entre otros, los robots móviles tipo unicycle (RMU) tienen la característica de poder moverse libremente en una diversidad de aplicaciones en problemas reales (Patle et al., 2019). De acuerdo con la condición de Brockett (Pourboghrat, 2002), los RMU no pueden ser asintóticamente estabilizados utilizando controles con retroalimentación estática (Hichri et al., 2022). Es necesario abordar este

problema utilizando estrategias de control de retroalimentación variantes en tiempo o con discontinuidades. De acuerdo con (Tzafestas, 2018), el modelo cinemático puede no incluir fuerzas externas como la gravedad y/o la fricción de las llantas, sin embargo, fenómenos que no están en el modelo, como el derrape y deslizamiento de las llantas, así como señales de control con ruido, se deben considerar en los diseños de algoritmos de control (Rochel et al., 2022). Es posible representar el modelo de un robot móvil como un sistema variante en tiempo a través de la linealización de Tylor del modelo cinemático sobre una trayectoria deseada. En (Tiriolo y Lucia, 2022) y (De Luca et al., 2005) se estabiliza el error de seguimiento de un robot tipo carro utilizando una estrategia no lineal, en (Das y Kar, 2006), (Pourboghrat y Karlsson, 2002) y (Wu et al., 2022) se implementan controladores basados en lógica difusa y redes neuronales. Muchos de estos trabajos no consideran perturbaciones en el control, producto de ruido en los actuadores. Algunas técnicas no lineales consideran señales discontinuas para lograr un error de seguimiento de cero en tiempo finito a pesar de la presencia de incertidumbres externas (Rochel et al., 2022) y (Díaz et al., 2022). Se incluyen compuestas con modos deslizantes de alto orden

^{*} Este trabajo fue apoyado en parte por el proyecto SEP-CONACYT-ANUIES-ECOS NORD 315597. El trabajo se desarrolló en el marco de la Red Internacional de Control y Cómputo Aplicados, TecNM. Héctor Ríos agradece el apoyo por parte de CONAHCYT IxM CVU 270504 Proyecto 922, y de Proyectos TecNM. Manuel Mera agradece el apoyo por parte del proyecto IPN-SIP 20230170. Iván Salgado and David Cruz agradecen el apoyo por parte de los proyectos SIP 20231030, SIP 20231089, SIP 20221150, SIP 20231337.

o controles discontinuos y técnicas clásicas de retroalimentación de estados, basados en los llamados métodos elipsoidales (Gutiérrez et al., 2022), (Moudoud et al., 2022).

Con respecto al control de sistemas lineales variantes en tiempo, las funciones compuestas de Lyapunov (FCL) son una alternativa para desarrollar controles robustos ante perturbaciones o incertidumbres paramétricas. El análisis de estabilidad aplicando FCL permite obtener estimaciones menos restrictivas de conjuntos invariantes (comparado con conjuntos elipsoidales clásicos) para el análisis de estabilidad y robustez, así como aproximar las regiones de atracción para sistemas con entrada saturada, y para el estudio de la estabilidad de sistemas lineales por pedazos y sistemas conmutados (Hu y Lin, 2003). En general, los conjuntos obtenidos por esta técnica son menos restrictivos que los de las funciones cuadráticas de Lyapunov. Una ventaja de las FCL es la posibilidad de diseñar ganancias variantes en tiempo al resolver ecuaciones lineales matriciales (LMI, por sus siglas en inglés). Estas ganancias aseguran la invariabilidad de las condiciones iniciales en curvas más grandes que las obtenidas por métodos convencionales de Lyapunov (Hu y Lin, 2004).

Este artículo propone una solución al problema de seguimiento de trayectoria de un RMU mediante un esquema de linealización de la dinámica del error de seguimiento alrededor de la trayectoria deseada. El sistema variante en tiempo resultante es estabilizado por un control basado en FCL asegurando convergencia asintótica del error de seguimiento. Se considera que la cinemática del modelo tiene perturbaciones multiplicativas debido a posible derrape en las ruedas y a fenómenos no modelados. Esta metodología puede ser aplicada a otros robots móviles con diferente configuración. El enfoque propuesto requiere la solución de un conjunto de LMIs fuera de línea, y la solución de un problema de minimización en línea, como resultado, se tiene un control robusto variante en tiempo.

Nota: Se definen las funciones trigonométricas como $s(\theta) = \sin(\theta)$, $c(\theta) = \cos(\theta)$, $t(\theta) = \tan(\theta)$.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El modelo cinemático del robot móvil tipo unicycle está dado por

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= (1 + d_1(t)) g_1(q(t)) v_1 + (1 + d_2(t)) g_2(q(t)) v_2, \\ g_1(q) &= [c(\theta) \ s(\theta) \ 0]^\top, \quad g_2(q) = [0 \ 0 \ 1]^\top, \end{aligned} \quad (1)$$

donde $q \in \mathbb{R}^3$ es el vector de estados definido como $q = [x \ y \ \theta]^\top$, $x, y \in \mathbb{R}$ son las coordenadas cartesianas del robot, $\theta \in \mathbb{R}$ representa la orientación del carro con respecto al eje x . v_1 y v_2 son las velocidades del RMU. Los términos d_1 y d_2 representan perturbaciones variantes en tiempo, que son multiplicativas a las entradas. Estas perturbaciones pueden ser causadas por el retardo en la señal de control que convierte la información de la velocidad a corriente/voltaje para los motores o fenómenos no modelados.

Suposición 1. Las perturbaciones variantes en tiempo d_1 y d_2 son desconocidas pero acotadas, i.e., $-1 < d_i(t) \leq d_{\max} < 1$, con $i = 1, 2$. La restricción $d_i(t) \geq -1$ evita cualquier cambio de signo en la entrada del control.

3. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

Considerando la siguiente ecuación diferencial no lineal

$$\dot{z} = f(z(t), \varphi(t)), \quad z(0) = z_0, \quad (2)$$

siendo $z \in \mathbb{R}^n$ el vector de estados, $z_0 \in \mathbb{R}^n$ la condición inicial, $\varphi \in \mathbb{R}^n$ es una perturbación desconocida localmente medible representando incertidumbres y/o perturbaciones. En este trabajo se considera que φ es acotada, i.e. $\|\varphi(t)\| \leq \varphi^+$, $\forall t \geq 0$ para $\varphi^+ \in \mathbb{R}_+$ y $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función Lipschitz no lineal con su primer argumento $f(0, 0) = 0$. Esta definición agrupa varios sistemas dinámicos, que a veces contienen restricciones físicas en sus estados. Algunos ejemplos son los sistemas mecánicos con restricciones en la posición o los sistemas eléctricos con restricciones en el voltaje o la corriente Soukkou et al. (2023). Los robots móviles no son la excepción ya que estos contienen restricciones no holónomas y, en la mayoría de los casos, el área de trabajo también está restringida.

El presente estudio se utiliza la técnica con funciones compuestas de Lyapunov (Hu y Lin, 2003) para representar un sistema lineal variante en tiempo como la composición convexa de un conjunto formado por l sistemas lineales invariantes en tiempo. Para una matriz positiva definida y simétrica $P \in \mathbb{R}^n$ su correspondiente función cuadrática de Lyapunov se describe como $V(z) = z^\top P z$. La curva de nivel de $V(z)$, denotada como $L_v(\rho)$, para un escalar ρ se define como, $L_v(\rho) := \{z \in \mathbb{R}^n : V(z) \leq \rho\}$. En particular, para la curva de nivel que corresponde a $\rho = 1$, se tiene $L_v(\rho) = \varepsilon(P)$.

Definición 2. (Función compuesta de Lyapunov). Sean los escalares λ_j para $j = 1, \dots, l$ los elementos de un vector $\lambda \in \Gamma$, donde

$$\Gamma := \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^l : \sum_{j=1}^l \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 \right\}, \quad (3)$$

y dado un conjunto de matrices positivas definidas $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, para $j = 1, 2, \dots, l$. Definiendo

$$P(\lambda) := \left(\sum_{j=1}^l \lambda_j P_j^{-1} \right)^{-1}. \quad (4)$$

Por lo tanto, si se define,

$$\lambda^* := \arg \min_{\lambda \in \Gamma} (z^\top P(\lambda) z), \quad (5)$$

con $\lambda^* = [\lambda_1^* \ \lambda_2^* \ \dots \ \lambda_l^*]^\top$, la función

$$V_c(z) := z^\top P(\lambda^*) z, \quad (6)$$

es una función cuadrática compuesta de P_j y λ_j para $j = 1, \dots, l$. V_c es positiva definida. Entonces si \dot{V}_c es negativa semidefinida para toda la trayectoria de (2) en cualquier subconjunto del espacio de estados conteniendo el origen, se dice que V_c es una función cuadrática compuesta de Lyapunov (Hu y Lin, 2003) para el sistema (2).

Recordando que, para cada escalar $p \geq 0$, una curva de nivel de V_c se define como (4). Entonces

$$L_{V_c}(p) := \{z \in \mathbb{R}^n : V_c(z) \leq p\}, \quad \varepsilon(Q(\lambda^*)) := L_{V_c}(1).$$

Dos propiedades principales de las FCL son:

- La curva de nivel $V_c(z) = p$ es la envolvente convexa, denotada por $\text{co}(\cdot)$, las curvas de nivel $z^\top P_j z = p$, $\forall j = 1, 2, \dots, l$. Particularmente, para $p = 1$, $\varepsilon(P(\lambda^*)) := \text{co}(\varepsilon(R_j))$ para $j = 1, \dots, l$. Eso quiere decir que $\varepsilon(P(\lambda^*))$ es la cubierta convexa de las elipsoides caracterizadas por las matrices P_j .
- V_c es continuamente diferenciable con la derivada parcial

$$\frac{\partial V_c}{\partial z} = 2z^\top Q(\lambda^*). \quad (7)$$

4. DISEÑO DEL CONTROL

Considerando un modelo de referencia definido por

$$\dot{q}_d = g_1(q_d)v_{1d} + g_2(q_d)v_{2d}, \quad (8)$$

$$g_1(q) = [c(\theta_d) \ s(\theta_d) \ 0]^\top, \quad g_2(q_d) = [0 \ 0 \ 1]^\top,$$

donde x_d , y_d y θ_d son las posiciones deseadas y, v_{1d} y v_{2d} son las velocidades deseadas. Si se define el error de seguimiento como $\tilde{q} = q_d - q$, la dinámica del error queda expresada como

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{q}} &= g_1(q_d)v_{1d} - (1 + d_1(t))g_1(q)v_1, \\ &+ g_2(q_d)v_{2d} - (1 + d_2(t))g_2(q)v_2. \end{aligned} \quad (9)$$

La linealización de (9) en las trayectorias deseadas es

$$\dot{\tilde{q}} = A(t)\tilde{q} + B(t)\tilde{v}, \quad (10)$$

con $A(t)$ y $B(t)$ definidas como

$$\begin{aligned} A(t) &= - \sum_{i=1}^2 (1 + d_i(t)) \frac{\partial g_i}{\partial q} \Big|_{q=q_d} v_{id}, \\ B(t) &= - \sum_{i=1}^2 (1 + d_i(t)) g_i(q_d), \end{aligned} \quad (11)$$

y $\tilde{v} = [v_{1d} - v_1 \ v_{2d} - v_2]^\top$. Entonces, $A(t)$ se define como

$$A(t) = (1 + d_1(t)) \begin{bmatrix} 0 & 0 & s(\theta_d) \\ 0 & 0 & -c(\theta_d) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v_{d1},$$

y para $B(t)$ se tiene la siguiente expresión

$$B(t) = \begin{bmatrix} -(1 + d_1(t))c(\theta_d) & 0 \\ -(1 + d_1(t))s(\theta_d) & 0 \\ 0 & 1 + d_2(t) \end{bmatrix}.$$

4.1 Representación compuesta

Se considera la siguiente extensión dinámica en la entrada del control (para evitar incertidumbres en la matriz relacionada con la entrada)

$$\dot{\tilde{q}} = A(t)\tilde{q} + B(t)\tilde{v}, \quad \dot{\tilde{v}} = \omega. \quad (12)$$

Entonces, el sistema anterior puede ser representado como

$$\dot{\eta} = \tilde{A}(t)\eta + \tilde{B}\omega, \quad (13)$$

donde $\eta = [\tilde{q}^\top \ \tilde{v}^\top]^\top$, $\omega \in \mathbb{R}^2$ representa la nueva señal de control, y las matrices $\tilde{A}(t)$ y $\tilde{B}(t)$ están dadas por

$$\tilde{A}(t) = \begin{bmatrix} A(t) & B(t) \\ 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}(t) = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 2} \\ I_{2 \times 2} \end{bmatrix}.$$

A continuación se presentan algunas consideraciones para el diseño de control basado en funciones compuestas de Lyapunov,

Suposición 3. La matriz $\tilde{A}(t)$ se puede representar como la combinación convexa de l matrices, para cada instante de t

$$\tilde{A}(t) \in \text{co}\{A_1, A_2, \dots, A_l\}. \quad (14)$$

La suposición 3 implica que el sistema (13) puede ser representado de la siguiente manera

$$\dot{\eta} = \tilde{A}(\lambda)\eta + \tilde{B}\omega, \quad \tilde{A}(\lambda) = \sum_{j=1}^l \lambda_j A_j. \quad (15)$$

Teniendo en cuenta que existe un vector λ^* que se obtiene del problema de optimización descrito en la ecuación (5) para cada instante de tiempo, entonces, el sistema (15) se reescribe como,

$$\dot{z} = \tilde{A}(\lambda^*)z + \tilde{B}\omega. \quad (16)$$

El siguiente Teorema presenta el resultado principal de este trabajo

Teorema 4. Sea $\alpha \in \mathbb{R}_+$ un escalar y la matriz Ω definida como

$$\Omega = A(\lambda^*)P(\lambda^*) + A^\top(\lambda^*)P(\lambda^*) + BY(\lambda^*) + Y^\top(\lambda^*)B^\top + \alpha P_0, \quad (17)$$

donde $P(\lambda)$ se define como en la ecuación (4), con $\lambda^* \in \Gamma$ que se obtiene de la solución de (5). Si la LMI definida en $\Omega \leq 0$ tiene solución para matrices $Y \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ y una matriz positiva definida P_0 . Entonces, para el sistema en lazo cerrado (13) con la entrada $\omega(t) = K(t)\eta(t)$ y $K(t) = Y(\lambda^*)P(\lambda^*)$, el error de seguimiento η tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable en el origen.

Prueba. Considerando el hecho de que $\frac{\partial V_c}{\partial z} = 2\eta^\top P(\lambda^*)$, la derivada de la FCL en (6) es

$$\dot{V}(z) = 2\eta^\top P(\lambda^*)\dot{\eta} = 2\eta^\top P(\lambda^*) \left(\tilde{A}(\lambda^*)\eta + \tilde{B}\omega \right), \quad (18)$$

Con la señal de control propuesta, la ecuación anterior resulta en

$$\dot{V}(z) = 2\eta^\top P(\lambda^*) \left(\tilde{A}(\lambda^*)\eta + \tilde{B}K\eta \right). \quad (19)$$

Sumando y restando el término $\alpha\eta^\top P(\lambda^*)P_0P(\lambda^*)\eta$ se obtiene

$$\dot{V}(t) = \eta^\top \Omega_1 \eta - \alpha\eta^\top P(\lambda^*)P_0P(\lambda^*)\eta, \quad (20)$$

donde Ω_1 se define como

$$\Omega_1 = P(\lambda^*)\tilde{A}(\lambda^*) + \tilde{A}^\top(\lambda^*)P(\lambda^*) + P(\lambda^*)\tilde{B}K + \quad (21)$$

$$K^\top \tilde{B}^\top P(\lambda^*) + \alpha P(\lambda^*)P_0P(\lambda^*).$$

Los elementos de Ω_1 son bilineales. Pre y post multiplicando Ω_1 por $P^{-1}(\lambda^*)$ la matriz Ω , se obtiene la matriz en

(20). Si las condiciones del Teorema 1 se cumplen, entonces la siguiente desigualdad es cierta

$$\dot{V}_c \leq -\alpha \eta^\top P(\lambda^*) P_0 P(\lambda^*) \eta. \quad (22)$$

Por lo tanto, el estado η tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable en el origen. \square

4.2 Implementación numérica

Para resolver el problema planteado en el Teorema 1, se requiere del valor de λ^* . El valor óptimo de λ^* se obtiene utilizando la ecuación (5) y Ω en (17). Antes de aplicar (5), se descompone Ω como

$$\begin{aligned} \Omega = & \sum_{i=1}^l \lambda_i A_i \sum_{j=1}^l \lambda_j P_j + \sum_{j=1}^l \lambda_j P_j \sum_{i=1}^l \lambda_i A_i^\top + \\ & \sum_{i=1}^l \lambda_i B \sum_{j=1}^l \lambda_j Y_j + \sum_{j=1}^l \lambda_j Y_j^\top \sum_{i=1}^l \lambda_i B^\top + \\ & \sum_{j=1}^l \lambda_j \sum_{i=1}^l \lambda_i P_0. \end{aligned} \quad (23)$$

Entonces la solución de Ω en el Teorema 1 requiere de la solución **fuera de línea** de las LMIs definidas por

$$A_i P_j + P_j A_i^\top + B Y_j + Y_j^\top B^\top + P_0 \leq 0. \quad (24)$$

El valor óptimo de λ^* se calcula **en línea** en cada muestra de tiempo por medio de la ecuación (5). Este hecho implica que K es implícitamente dependiente del tiempo a través de λ^* .

Algoritmo 1. Implementación numérica

Paso 1. Elegir un tiempo de muestreo adecuado $T > 0$, con los tiempos de muestreo $t_k = Tk$, $k = 0, 1, \dots$;

Paso 2. Resolver las LMIs definidas en (24)

Paso 3. Resolver (5) con las mediciones del error de seguimiento $q = \tilde{q}$ para obtener el valor de λ^*

Paso 4. Obtener la ganancia compuesta descrita en el Teorema 1, como $K(\lambda^*) = Y(\lambda^*) P(\lambda^*)$

Paso 5. Alimentar el sistema con la entrada de control $u(Tk) = K(\lambda^*) \tilde{q}(Tk)$ (respectivamente $u(Tk) = \tilde{K} y(Tk)$)

Paso 6. Actualizar $k = k + 1$ y **Ir al paso 3**

5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Esta sección muestra la viabilidad de la implementación del control propuesto. La trayectoria de referencia es $x_d(t) = 2t + 0.5 \sin(1.1t)$ y $y_d = 0.5 \cos(1.5t) + 11$. Las perturbaciones para la simulación son $d_1(t) = d_2(t) = 0.5 \cos(7t) + 0.4 \sin(5t)$. Con estos valores, el ángulo de orientación deseado θ_d y las velocidades deseadas v_{d1} y v_{d2} se obtuvieron de acuerdo con las siguientes ecuaciones (Martínez et al., 2021), (Mera et al., 2020),

$$v_{d1}(t) = \pm \sqrt{\dot{x}_d^2(t) + \dot{y}_d^2(t)},$$

$$\theta_d(t) = \text{atan2} \left\{ \frac{\dot{y}_d}{v_{d1}}, \frac{\dot{x}_d}{v_{d1}} \right\}, \quad v_{d2}(t) = \frac{\ddot{y}_d \dot{x}_d - \ddot{x}_d \dot{y}_d}{v_{d1}^2}.$$

La expresión completa para la matriz $\tilde{A}(t)$ es la siguiente

$$\tilde{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & f_1(t) & f_3(t) & 0 \\ 0 & 0 & f_2(t) & f_4(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_5(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$f_1(t) = (1 + d_1(t))s(\theta_d)v_{d1},$$

$$f_2(t) = -(1 + d_1(t))c(\theta_d)v_{d1},$$

$$f_3(t) = -(1 + d_1(t))c(\theta_d), \quad f_4(t) = -(1 + d_1(t))s(\theta_d),$$

$$f_5(t) = 1 + d_2(t).$$

Las matrices compuestas se eligieron tomando la máxima y mínima de las funciones variantes en tiempo de la matriz \tilde{A} . Analizando los valores, las siguientes ocho combinaciones se eligieron para formar las matrices compuestas:

$$\begin{aligned} & A_1(f_1^+, f_2^+, f_3^+, f_4^-, f_5^+), A_2(f_1^+, f_2^+, f_3^-, f_4^-, f_5^+), \\ & A_3(f_1^+, f_2^-, f_3^+, f_4^-, f_5^+), A_4(f_1^+, f_2^-, f_3^-, f_4^-, f_5^+), \\ & A_5(f_1^-, f_2^+, f_3^+, f_4^-, f_5^+), A_6(f_1^-, f_2^+, f_3^-, f_4^-, f_5^+), \\ & A_7(f_1^-, f_2^-, f_3^+, f_4^-, f_5^+), A_8(f_1^-, f_2^-, f_3^-, f_4^-, f_5^+), \end{aligned}$$

donde $f_i^+ = \max(f_i)$ y $f_i^- = \min(f_i)$ con $i = 1, 2, \dots, 8$. La matriz $A_1(f_1^\pm, f_2^\pm, f_3^\pm, f_4^\pm, f_5^\pm)$ se construye tomando el máximo y el mínimo de cada función f_i . Seleccionando $\alpha = 0.5$ y $P_0 = 0.7 \times I_{6 \times 6}$, la solución del conjunto de desigualdades descritas en (24) son

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1.0495 & 0.0729 & 0.0082 & -0.0448 & -0.1860 \\ 0.0729 & 1.2566 & -0.0024 & 0.0635 & -0.5433 \\ 0.0082 & -0.0024 & 0.2200 & 0.0412 & -0.1276 \\ -0.0448 & 0.0635 & 0.0412 & 0.9841 & -0.0345 \\ -0.1860 & -0.5433 & -0.1276 & -0.0345 & 1.3427 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} .6845 & 0.1487 & -0.0638 & -0.1638 & -0.1690 \\ 0.1487 & 0.8624 & -0.0672 & 0.0987 & -0.4307 \\ -0.0638 & -0.0672 & 0.1856 & 0.0474 & -0.1301 \\ -0.1638 & 0.0987 & 0.0474 & 0.6038 & -0.0535 \\ -0.1690 & -0.4307 & -0.1301 & -0.0535 & 0.8658 \end{bmatrix},$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.7480 & 0.0445 & -0.0909 & -0.1456 & -0.1691 \\ 0.0445 & 0.6562 & -0.0753 & 0.1402 & -0.2531 \\ -0.0909 & -0.0753 & 0.2020 & 0.0472 & -0.1406 \\ -0.1456 & 0.1402 & 0.0472 & 0.6332 & -0.0437 \\ -0.1691 & -0.2531 & -0.1406 & -0.0437 & 0.7965 \end{bmatrix},$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 0.7408 & 0.0493 & -0.0928 & -0.1558 & -0.1683 \\ 0.0493 & 0.6549 & -0.0728 & 0.1477 & -0.2540 \\ -0.0928 & -0.0728 & 0.2030 & 0.0515 & -0.1412 \\ -0.1558 & 0.1477 & 0.0515 & 0.6136 & -0.0609 \\ -0.1683 & -0.2540 & -0.1412 & -0.0609 & 0.7959 \end{bmatrix},$$

$$P_5 = \begin{bmatrix} 0.6625 & -0.0707 & -0.0039 & -0.1977 & 0.0927 \\ -0.0707 & 0.8920 & -0.1013 & -0.1092 & -0.4281 \\ -0.0039 & -0.1013 & 0.1869 & 0.0462 & -0.1291 \\ -0.1977 & -0.1092 & 0.0462 & 0.6466 & 0.0048 \\ 0.0927 & -0.4281 & -0.1291 & 0.0048 & 0.8581 \end{bmatrix},$$

$$P_6 = \begin{bmatrix} 0.6404 & -0.0869 & -0.0054 & -0.2100 & 0.0970 \\ -0.0869 & 0.8886 & -0.1011 & -0.1112 & -0.4285 \\ -0.0054 & -0.1011 & 0.1873 & 0.0476 & -0.1295 \\ -0.2100 & -0.1112 & 0.0476 & 0.6166 & 0.0093 \\ 0.0970 & -0.4285 & -0.1295 & 0.0093 & 0.8593 \end{bmatrix},$$

$$P_7 = \begin{bmatrix} 0.5909 & -0.0825 & -0.0352 & -0.1955 & 0.1041 \\ -0.0825 & 0.5770 & -0.1121 & -0.0599 & -0.2335 \\ -0.0352 & -0.1121 & 0.1949 & 0.0404 & -0.1405 \\ -0.1955 & -0.0599 & 0.0404 & 0.6443 & -0.0123 \\ 0.1041 & -0.2335 & -0.1405 & -0.0123 & 0.7737 \end{bmatrix},$$

$$P_8 = \begin{bmatrix} 0.5690 & -0.0960 & -0.0350 & -0.2071 & 0.1084 \\ -0.0960 & 0.5729 & -0.1124 & -0.0639 & -0.2334 \\ -0.0350 & -0.1124 & 0.1953 & 0.0413 & -0.1408 \\ -0.2071 & -0.0639 & 0.0413 & 0.6143 & -0.0045 \\ 0.1084 & -0.2334 & -0.1408 & -0.0045 & 0.7754 \end{bmatrix}.$$

Las Y_i obtenidas son

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= \begin{bmatrix} -2.0344 & 0.6004 & 0.0811 & -0.1563 & 0 \\ 0.2648 & 0.5311 & -2.7187 & -0.0077 & -0.1212 \end{bmatrix}, \\
 Y_2 &= \begin{bmatrix} -1.1023 & 0.2285 & 0.0956 & -0.3519 & 0 \\ 0.3478 & 0.7586 & -1.7044 & 0.0208 & -0.4021 \end{bmatrix}, \\
 Y_3 &= \begin{bmatrix} -1.3111 & 0.3429 & 0.0778 & -0.3557 & 0 \\ 0.3538 & 0.4516 & -1.5643 & 0.0169 & -0.3864 \end{bmatrix}, \\
 Y_4 &= \begin{bmatrix} -1.1300 & 0.3092 & 0.1109 & -0.3534 & 0 \\ 0.3769 & 0.4390 & -1.5630 & 0.0228 & -0.3863 \end{bmatrix}, \\
 Y_5 &= \begin{bmatrix} -1.1816 & 0.3371 & -0.0210 & -0.3576 & 0 \\ -0.2361 & 0.8000 & -1.6896 & -0.0034 & -0.4005 \end{bmatrix}, \\
 Y_6 &= \begin{bmatrix} -0.9745 & 0.3080 & -0.0305 & -0.3541 & 0 \\ -0.2462 & 0.8062 & -1.6917 & -0.0051 & -0.4007 \end{bmatrix}, \\
 Y_7 &= \begin{bmatrix} -1.1734 & 0.4436 & 0.0135 & -0.3573 & 0 \\ -0.2181 & 0.4721 & -1.5184 & 0.0044 & -0.3814 \end{bmatrix}, \\
 Y_8 &= \begin{bmatrix} -0.9674 & 0.4172 & -0.0022 & -0.3538 & 0 \\ -0.2371 & 0.4797 & -1.5218 & 0.0014 & -0.3816 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

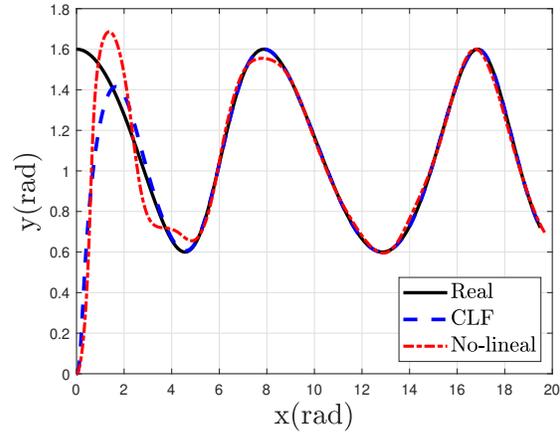


Fig. 1. Comparación del control CLF y la estrategia no lineal descrita en Maghenem et al. (2017).

Una vez obtenidos estos valores, se aplica el proceso de optimización descrito en la ecuación (5). El control que se presenta en Maghenem et al. (2017) se utilizó para comparar la propuesta de control del present trabajo. Las coordenadas de transformación del error de seguimiento se definen como

$$\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

donde $e_x = x_d - x$, $e_y = y_d - y$ y $e_\theta = \theta_d - \theta$. El control está descrito por las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned}
 v_1 &= v_{1d}(t) \cos(e_\theta) + K_x e_x, \\
 v_2 &= v_{2d} + K_\theta e_\theta + v_{1d}(t) K_y e_y \phi(e_\theta),
 \end{aligned} \quad (26)$$

donde $\phi(e_\theta) = \frac{\sin(e_\theta)}{e_\theta}$. Para las simulaciones numéricas $K_x = K_y = K_\theta = 4$.

Las simulaciones numéricas se realizaron en Matlab[®] con un periodo de muestreo de 0.001 segundos y una discretización tipo Euler. Las condiciones iniciales para el sistema físico fueron cero en todos los estados. La Figura 1 muestra la gráfica del error de seguimiento. Observe que el control descrito en Maghenem et al. (2017) es más afectado por las perturbaciones que el CLF. Añadiendo a esto el tiempo de convergencia es menor en el segundo mencionado. Mientras que el CLF tarda menos de 4 segundos (en la simulación) en converger, el controlador No-lineal tarda 5 segundos en converger. Ambos controles aseguran la aplicación de un control suave. El control no lineal tiene parámetros fijos mientras que el CLF es un control variante en tiempo (observar la Figura 2). Esta ganancia cambia en cada muestra de tiempo debido a la solución del problema de optimización descrito en la ecuación (5) donde las λ que definen la ganancia del control se actualizan en cada instante de tiempo. La Figura 2 muestra la variación de los pesos λ en el tiempo.

La Figura 4 muestra el desempeño de cada control. Se calcula la norma Euclidiana del error de seguimiento. Observe como el tiempo de convergencia mejora con el control CLF. El control no-lineal ofrece una estabilidad práctica mientras que el CLF asegura una convergencia asintótica del error de seguimiento. Las oscilaciones causadas por las perturbaciones $d(t)$ provocan un mal desempeño cuando

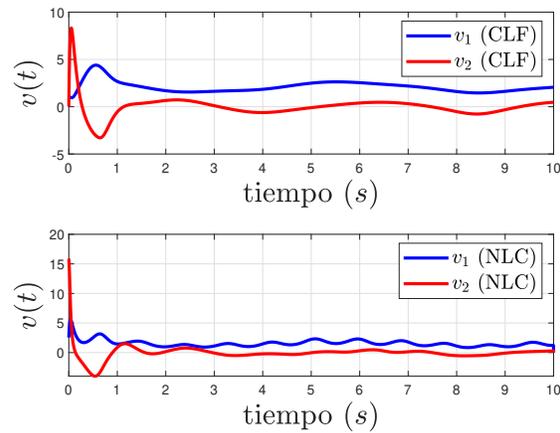


Fig. 2. Señales de control obtenidas de los controles utilizados.

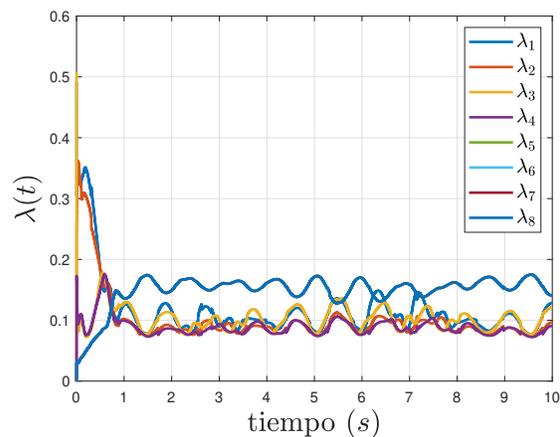


Fig. 3. Optimización de los pesos (λ 's) que genera el control compuesto.

se implementa el control propuesto en Maghenem et al. (2017).

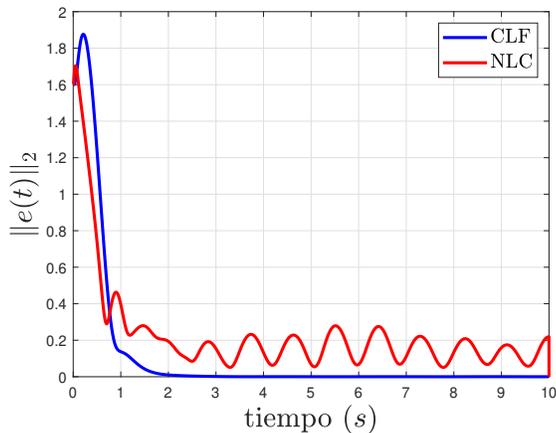


Fig. 4. Norma Euclidiana del error de seguimiento.

6. CONCLUSIÓN

Este artículo describe la aplicación de FCL para desarrollar un control robusto para el seguimiento de trayectorias de un RMU, considerando perturbaciones multiplicativas. La construcción del control propuesto emplea el modelo cinemático del RMU y la solución de un conjunto de LMIs que tienen que ser calculadas fuera de línea. La ganancia compuesta para el control se calcula mediante un problema de minimización en cada instante de tiempo. Los resultados numéricos demuestran un mejor tiempo de convergencia utilizando FCLs como estrategia de diseño del controlador.

REFERENCES

- Das, T. y Kar, I.N. (2006). Design and implementation of an adaptive fuzzy logic-based controller for wheeled mobile robots. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 14(3), 501–510.
- De Luca, A., Oriolo, G., y Samson, C. (2005). Feedback control of a nonholonomic car-like robot. *Robot motion planning and control*, 171–253.
- Díaz, Y., Dávila, J., y Mera, M. (2022). Leader-follower formation of unicycle mobile robots using sliding mode control. *IEEE Control Systems Letters*, 7, 883–888.
- Gutiérrez, A., Mera, M., y Ríos, H. (2022). An integral sliding-mode robust regulation for constrained three-wheeled omnidirectional mobile robots. In *2022 IEEE 61st Conference on Decision and Control (CDC)*, 3637–3642. IEEE.
- Hichri, B., Gallala, A., Giovannini, F., y Kedziora, S. (2022). Mobile robots path planning and mobile multi-robots control: A review. *Robotica*, 1–14.
- Hu, T. y Lin, Z. (2003). Composite quadratic lyapunov functions for constrained control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(3), 440–450.
- Hu, T. y Lin, Z. (2004). Properties of the composite quadratic lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(7), 1162–1167.
- Maghenem, M., Loría, A., y Panteley, E. (2017). Formation-tracking control of autonomous vehicles under relaxed persistency of excitation conditions. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 26(5), 1860–1865.
- Martínez, E.A., Ríos, H., y Mera, M. (2021). Robust tracking control design for unicycle mobile robots with input saturation. *Control Engineering Practice*, 107, 104676.
- Mera, M., Ríos, H., y Martínez, E.A. (2020). A sliding-mode based controller for trajectory tracking of perturbed unicycle mobile robots. *Control Engineering Practice*, 102, 104548.
- Moudoud, B., Aissaoui, H., y Diany, M. (2022). Extended state observer-based finite-time adaptive sliding mode control for wheeled mobile robot. *Journal of Control and Decision*, 9(4), 465–476.
- Patle, B., Pandey, A., Parhi, D., Jagadeesh, A., et al. (2019). A review: On path planning strategies for navigation of mobile robot. *Defence Technology*, 15(4), 582–606.
- Pourboghrat, F. (2002). Exponential stabilization of nonholonomic mobile robots. *Computers & Electrical Engineering*, 28(5), 349–359.
- Pourboghrat, F. y Karlsson, M.P. (2002). Adaptive control of dynamic mobile robots with nonholonomic constraints. *Computers & Electrical Engineering*, 28(4), 241–253.
- Rochel, P., Ríos, H., Mera, M., y Dzul, A. (2022). Trajectory tracking for uncertain unicycle mobile robots: A super-twisting approach. *Control Engineering Practice*, 122, 105078.
- Rubio, F., Valero, F., y Llopis-Albert, C. (2019). A review of mobile robots: Concepts, methods, theoretical framework, and applications. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 16(2), 1729881419839596.
- Soukkou, Y., Tadjine, M., Soukkou, A., Nibouche, M., y Nouri, H. (2023). Tuning functions based adaptive backstepping control for uncertain strict-feedback nonlinear systems using barrier lyapunov functions with full state constraints. *European Journal of Control*, 70, 100783.
- Tiriolo, C. y Lucia, W. (2022). On the design of control invariant regions for feedback linearized car-like vehicles. *IEEE Control Systems Letters*, 7, 739–744.
- Tzafestas, S.G. (2018). Mobile robot control and navigation: A global overview. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 91, 35–58.
- Wu, Y., Wang, Y., y Fang, H. (2022). Full-state constrained neural control and learning for the nonholonomic wheeled mobile robot with unknown dynamics. *ISA transactions*, 125, 22–30.