

Parametric Reconstruction and state observation in a Maglev System via I&I^{*}

Marcos A. González-Olvera^{*} H. Rodríguez-Cortés^{**}

^{*} *Colegio de Ciencia y Tecnología, Universidad Autónoma de la Ciudad de México (e-mail: marcos.angel.gonzalez@uacm.edu.mx)*

^{**} *Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, Instituto Tecnológico Autónomo de México, Campus Río Hondo, Río Hondo # 1, Col. Progreso Tizapán CP. 01080. Alc. Álvaro Obregón, Ciudad de México (e-mail: {hugo.rodriguez}@itam.mx).*

Resumen

In this work, the principle of Immersion and Invariance (I&I) is used in the design of an observer/estimator for a closed-loop magnetic levitation system in order to reconstruct the magnetic levitator speed, the internal resistance of the coil and the mass of the levitating ball. By relying on Lyapunov function theory and analysis around a neighborhood of the operation point of the closed-loop dynamics, the stability and convergence of the observed states and estimated parameters to actual ones are guaranteed. Experimental results are shown to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Keywords: Immersion and Invariance, Adaptive Observer, Maglev system

1. INTRODUCCIÓN

El principio de Inmersión e Invariancia (I&I) surge como una técnica innovadora en la teoría de control para sintetizar controladores adaptativos no lineales para sistemas inciertos Astolfi et al. (2008). Al aprovechar los conceptos de inmersión del sistema e invariancia, este enfoque alcanza los objetivos de control al sumergir a la dinámica de la planta en un sistema objetivo que captura el comportamiento deseado, y con la acción de control volverla atractiva e invariante.

El principio I&I puede aplicarse no solamente en el sentido convencional de diseñar una ley de control, sino en obtener un algoritmos de identificación o reconstrucción paramétrica y de observación de estados a partir del conocimiento de la dinámica del sistema. A diferencia de los esquemas clásicos de estimación/observación, en la técnica I&I los parámetros o estados reconstruidos quedan especificados no solamente en términos de los estados del estimador/observador sino también en términos de funciones que dependen de las señales medibles, como se ilustra en este trabajo, estas funciones juegan un papel muy importante durante el proceso de diseño.

El levitador magnético es un sistema de referencia para la evaluación de algoritmos de control. En Rodríguez et al. (2000) el problema de regulación de la posición del levitador magnético se resuelve utilizando la técnica de asignación de la interconexión y el amortiguamiento, se asume que todos los parámetros físicos son conocidos. En Yang et al. (2020) se retoma el controlador propuesto en Rodríguez et al. (2000) para realizar un análisis de sensibilidad para analizar los efectos de las modificaciones a las estructuras de interconexión y amortiguamiento. En Bhaduri et al. (2012) y Aghazadeh et al. (2019) el problema del control de movimiento del levitador se resuelve utilizando estrategias de control proporcional-integral-derivativo (PID). En trabajos realizados por Kumar E and Jerome (2016) y Guerrero Tejada et al. (2014) se propone un controlador basado en la técnica LQR, y particularmente con el empleo de un derivador robusto propuesto en Levant (2003) para lograr la reconstrucción en tiempo real de la velocidad. En la referencia Sathiyavathi et al. (2019) se propone un algoritmo de control por regímenes deslizantes mientras que en Bojan-Dragos et al. (2017) se presenta un algoritmo de control inteligente para resolver el problema de control de movimiento del levitador magnético. En Morales et al. (2010) se presenta un algoritmo de control basado en la técnica conocida como control proporcional-integral generalizado.

El empleo de la técnica I&I, como se mencionó anteriormente, se ha empleado para el diseño de estrategias de control para este sistema, particularmente desde la publicación del trabajo de Astolfi and Ortega (2003),

^{*} Los autores desean agradecer a la UACM por su apoyo a este trabajo dado mediante el proyecto UACM-CCYT-2023-IMP-05. H. Rodríguez-Cortés en receso sabático de la Sección de Mecatrónica, Depto. de Ingeniería Eléctrica, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

ahora considerando una de las principales referencias de dicha técnica. Ésta se ha seguido empleando para diferentes aproximaciones al problema de control del levitador magnético, y en particular, en Liu et al. (2020) se emplea la técnica de I&I para lograr el diseño de un controlador adaptable para este sistema.

Sin embargo, en pocos trabajos se ha explorado el diseño de una estrategia de reconstrucción paramétrica para el levitador magnético que considere no solo uno, sino tres parámetros que se asumen desconocidos en tiempo real y en lazo cerrado. Por ejemplo, en Mekky and Alberts (2012) se discute el problema de identificación de estados para un levitador híbrido, pero con experimentos y análisis realizados fuera de línea.

Por lo anterior, en este trabajo se presenta el diseño y la implementación experimental de algoritmos de estimación de parámetros y de observación de estados para un levitador magnético operando en lazo cerrado con un control dinámico basado en la técnica de control LQR. Utilizando argumentos de la teoría de Lyapunov y conceptos de estabilidad local se demuestra que los errores de estimación/observación convergen a cero. El observador para la velocidad se compara con la velocidad estimada utilizando un diferenciador robusto de orden arbitrario Levant (2003). Específicamente, se verifica la efectividad de los algoritmos de identificación/observación basados en I&I en la reconstrucción de parámetros físicos del levitador y de la observación de la velocidad. Los resultados destacan la aplicabilidad práctica del principio I&I en el campo de la teoría de control y su potencial para mejorar el rendimiento de sistemas complejos como el levitador magnético.

El resto de este artículo se organiza en la forma siguiente. La sección 2 establece el modelo del levitador magnético y el problema a resolver. La sección 3 presenta los algoritmos de estimación y observación. La sección 4 presenta el algoritmo de control que se utiliza y la sección 5 presenta los resultados experimentales. Finalmente, la sección 6 reporta algunas conclusiones sobre este trabajo.

2. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Considere un levitador magnético, mostrado en la figura 2 y descrito por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales (Guerrero Tejada et al., 2014)

$$\begin{aligned} L\dot{x}_1 &= -Rx_1 + u \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ m\dot{x}_3 &= c \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^2 - mg \end{aligned} \quad (1)$$

donde L es el valor de la inductancia, $Lx_1 \in \mathbb{R}$ es el flujo magnético, x_1 la corriente que circula por el embobinado del electroimán, R es la resistencia eléctrica y u el voltaje de entrada, la cual es la variable de control del sistema. Además, $x_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ es la posición del levitador con respecto al electroimán, $x_3 \in \mathbb{R}$ es la velocidad del

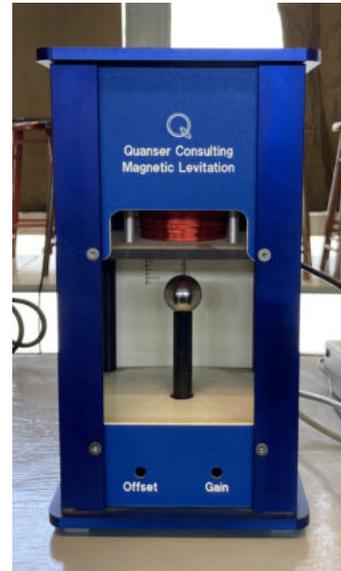


Figura 1. Plataforma experimental del levitador magnético.

levitador, m es la masa del levitador, $c > 0$ es la constante de la fuerza electromagnética generada por el electroimán, g es la constante de la aceleración gravitacional.

Al definir $n = 1/m$, el modelo dinámico (1) puede expresarse como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{R}{L}x_1 + \frac{1}{L}u \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= nc \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^2 - g \end{aligned} \quad (2)$$

El problema de estimación/observación que se aborda en este trabajo puede enunciarse como sigue:

Objetivo de estimación/observación. Considere al levitador magnético (2) funcionando en lazo cerrado con un algoritmo de control que conduce a la posición del levitador a una referencia deseada. Asuma que los estados x_1 y x_2 son medibles y que los valores de los parámetros físicos L y c son conocidos. Diseñar un algoritmo de estimación/observación para estimar a los parámetros R y n , y observar a la velocidad x_3 .

En este trabajo, el objetivo de estimación/observación se alcanza siguiendo la técnica de Inmersión e Invariancia (Astolfi et al., 2008). Como puede observarse en la ecuación (2) la información necesaria para reconstruir a R se encuentra directamente en la dinámica de la corriente x_1 . Sin embargo, la información necesaria para reconstruir a n y a x_3 debe extraerse de la dinámica de la posición del levitador x_2 y de la propia dinámica de la velocidad x_3 . Como consecuencia es posible diseñar un estimador para R de forma independiente al estimador para n y el observador para x_3 .

3. IDENTIFICACIÓN Y OBSERVACIÓN BASADOS EN I&I

Los valores a estimar R y n son positivos y un cambio de signo durante el transitorio de su estimación tiene una influencia negativa en el desempeño de los algoritmos de control. Una solución es saturar el valor de la estimación por abajo de tal manera que si durante el transitorio el valor estimado es negativo se asigne un valor positivo. En este trabajo se explora una solución alterna en la cual se asegura que el valor estimado de estos parámetros es siempre positivo. Siguiendo la técnica I&I, los errores de estimación y observación, donde \hat{R} es la estimación de R , \hat{n} la del parámetro n , y \hat{x}_3 aquella de la velocidad x_3 , se definen mediante:

$$\begin{aligned}\tilde{R} &= R - \bar{R} \left(1 + \tanh \left(\hat{R} + \beta_1(\bar{x}_1)\right)\right), \\ \tilde{n} &= n - \bar{n} \left(1 + \tanh \left(\hat{n} + \beta_2(\eta_1)\right)\right), \\ \tilde{x}_3 &= x_3 - \hat{x}_3 + \beta_3(x_2),\end{aligned}\quad (3)$$

con \bar{R} y \bar{n} constantes positivas conocidas tales que

$$R < \bar{R}, \quad n < \bar{n}. \quad (4)$$

Adicionalmente, se han definido las señales medibles $\bar{x}_1 = Lx_1$ y $\eta_1 = \hat{x}_3 - \beta_3(x_2) = x_3 - \tilde{x}_3$. Las funciones $\beta_i(\cdot) \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$ serán definidas en los desarrollos posteriores. Es importante observar que se desea lograr que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{R} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{n} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}_3 = 0. \quad (5)$$

Al lograrlo, se implica que

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{R} \left(1 + \tanh \left(\hat{R} + \beta_1(\bar{x}_1)\right)\right) &= R, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{n} \left(1 + \tanh \left(\hat{n} + \beta_2(\eta_1)\right)\right) &= n, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{x}_3 - \beta_3(x_2)) &= x_3,\end{aligned}$$

por lo que si la condición expresada en (5) se satisface el problema de estimación y observación queda resuelto asintóticamente.

La dinámica de los errores de estimación y observación a lo largo de las trayectorias de (2) es

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{R}} &= -\bar{R} \left[1 - \tanh \left(\hat{R} + \beta_1(\bar{x}_1)\right)^2\right] \times \\ &\quad \left(\dot{\hat{R}} + \frac{d\beta_1}{d\bar{x}_1} (-R\bar{x}_1 + u)\right), \\ \dot{\tilde{n}} &= -\bar{n} \left[1 - \tanh \left(\hat{n} + \beta_2(\eta_1)\right)^2\right] \times \\ &\quad \left(\dot{\hat{n}} + \frac{d\beta_2}{d\eta_1} \left(nc \frac{x_1^2}{x_2^2} - g - \dot{\hat{x}}_3\right)\right), \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= nc \frac{x_1^2}{x_2^2} - g - \dot{\hat{x}}_3 + \frac{d\beta_3}{dx_2} x_3.\end{aligned}\quad (6)$$

A partir de las definiciones de los errores de estimación y observación en la ecuación (3), se tiene

$$\begin{aligned}R &= \tilde{R} + \bar{R} \left(1 + \tanh \left(\hat{R} + \beta_1(\bar{x}_1)\right)\right), \\ n &= \tilde{n} + \bar{n} \left(1 + \tanh \left(\hat{n} + \beta_2(\eta_1)\right)\right), \\ x_3 &= \tilde{x}_3 + \hat{x}_3 - \beta_3(x_2).\end{aligned}\quad (7)$$

Sustituyendo a los parámetros desconocidos y al estado no medido definidos en (7) en la ecuación (6) se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{R}} &= -\bar{R} \left[1 - \tanh \left(\hat{R} + \beta_1(\bar{x}_1)\right)^2\right] \times \\ &\quad \left\{ \dot{\hat{R}} - \frac{d\beta_1}{d\bar{x}_1} \left[\left(\tilde{R} + \bar{R} \left(1 + \tanh \left(\hat{R} + \beta_1(\bar{x}_1)\right)\right)\right) x_1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - u \right] \right\} \\ \dot{\tilde{n}} &= -\bar{n} \left[1 - \tanh \left(\hat{n} + \beta_2(\eta_1)\right)^2\right] \times \\ &\quad \left\{ \dot{\hat{n}} + \frac{d\beta_2}{d\eta_1} \left[\left(\tilde{n} + \bar{n} \left(1 + \tanh \left(\hat{n} + \beta_2(\eta_1)\right)\right)\right) c \frac{x_1^2}{x_2^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - g - \dot{\hat{x}}_3 \right] \right\} \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= \left(\tilde{n} + \bar{n} \left(1 + \tanh \left(\hat{n} + \beta_2(\eta_1)\right)\right)\right) c \frac{x_1^2}{x_2^2} - g - \dot{\hat{x}}_3 \\ &\quad + \frac{d\beta_3}{dx_2} (\tilde{x}_3 + \hat{x}_3 - \beta_3(x_2))\end{aligned}\quad (8)$$

La dinámica de los estados del estimador \hat{R} y \hat{n} y del observador \hat{x}_3 se define a partir de señales conocidas en la ecuación (8) como

$$\begin{aligned}\dot{\hat{R}} &= -\frac{d\beta_1}{d\bar{x}_1} \left\{ -\bar{R} \left[1 + \tanh \left(\hat{R} + \beta_1(\bar{x}_1)\right)\right] x_1 + u \right\} \\ \dot{\hat{n}} &= -\frac{d\beta_2}{d\eta_1} \left\{ \bar{n} \left[1 + \tanh \left(\hat{n} + \beta_2(\eta_1)\right)\right] c \frac{x_1^2}{x_2^2} - g \right\} \\ \dot{\hat{x}}_3 &= \bar{n} \left[1 + \tanh \left(\hat{n} + \beta_2(\eta_1)\right)\right] c \frac{x_1^2}{x_2^2} - g \\ &\quad + \frac{d\beta_3}{dx_2} (\hat{x}_3 - \beta_3(x_2))\end{aligned}\quad (9)$$

De tal forma que al sustituir (9) en (8), la dinámica de los errores de estimación y observación queda como

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{R}} &= -\bar{R} \left[1 - \tanh \left(\hat{R} + \beta_1(\bar{x}_1)\right)^2\right] \frac{d\beta_1}{d\bar{x}_1} \tilde{R} \\ \dot{\tilde{n}} &= -\bar{n} \left[1 - \tanh \left(\hat{n} + \beta_2(\eta_1)\right)^2\right] \frac{d\beta_2}{d\eta_1} \left(\tilde{n} c \frac{x_1^2}{x_2^2} - \dot{\tilde{x}}_3\right) \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= \tilde{n} c \frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{d\beta_3}{dx_2} \tilde{x}_3\end{aligned}\quad (10)$$

Al reemplazar las tangentes hiperbólicas en (10) partir de (3) se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{R}} &= -\frac{1}{\bar{R}} \frac{d\beta_1}{d\bar{x}_1} \left(\tilde{R} + 2\bar{R} - R\right) \left(R - \tilde{R}\right) \tilde{R} \\ \dot{\tilde{n}} &= \frac{1}{\bar{n}} \frac{d\beta_2}{d\eta_1} \frac{d\beta_3}{dx_3} (\tilde{n} + 2\bar{n} - n) (n - \tilde{n}) \tilde{x}_3 \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= \tilde{n} c \frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{d\beta_3}{dx_2} \tilde{x}_3\end{aligned}\quad (11)$$

Para probar la estabilidad de los estimadores considere el siguiente Lema.

Lema 1. Considere el sistema dinámico

$$\dot{z} = -\gamma(z + b)(a - z)z \quad (12)$$

con $z \in \mathcal{R} \subset \mathbb{R}$, a, b constantes positivas tales que $b > a$ y γ una constante positiva. Si

$$z(0) \in \mathcal{R} = (-b, a)$$

el punto de equilibrio $z = 0$ es asintóticamente estable en \mathcal{R} .

Prueba. Considere la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V = \ln \left(\frac{a^a b^b}{(z+b)^b (a-z)^a} \right)$$

Notar que

$$\frac{dV}{dz} = \frac{(b+a)z}{(z+b)(a-z)}, \quad \frac{d^2V}{dz^2} = \frac{(b+a)(z^2+ba)}{(z+b)^2(a-z)^2}$$

están bien definidas en \mathcal{R} , además puede observarse que V tiene un mínimo en $z = 0$. La derivada con respecto al tiempo de V a lo largo de las trayectorias de (2) es

$$\dot{V} = -(b+a)\gamma z^2$$

con lo que se concluye la prueba. \triangleleft

A partir del Lema 1 se construyen las funciones candidatas de Lyapunov

$$V_1 = \ln \left(\frac{(2\bar{R} - R)^{2\bar{R}-R} R^R}{(\bar{R} + 2\bar{R} - R)^{2\bar{R}-R} (R - \bar{R})^R} \right)$$

y

$$V_2 = \ln \left(\frac{(2\bar{n} - n)^{2\bar{n}-n} n^n}{(\bar{n} + 2\bar{n} - n)^{2\bar{n}-n} (n - \bar{n})^n} \right) + \frac{1}{2} \tilde{x}_3^2.$$

La condición sobre \bar{R} y \bar{n} en (4) asegura que se satisfacen las condiciones del Lema 1. La derivada con respecto al tiempo de V_1 a lo largo de las trayectorias de la dinámica de \tilde{R} es

$$\dot{V}_1 = -\frac{1}{\bar{R}} \frac{d\beta_1}{d\bar{x}_1} \tilde{R}^2$$

por lo tanto β_1 debe seleccionarse de tal forma que

$$\frac{d\beta_1}{d\bar{x}_1} > 0$$

Por otro lado, la derivada de V_2 a lo largo de la dinámica de \tilde{n} y \tilde{x}_3 es

$$\dot{V}_2 = \frac{1}{\bar{n}} \frac{d\beta_2}{d\eta_1} \frac{d\beta_3}{dx_3} \tilde{n} \tilde{x}_3 + c \frac{x_1^2}{x_2^2} \tilde{n} \tilde{x}_3 + \frac{d\beta_3}{dx_2} \tilde{x}_3^2$$

Al asumir que existen constantes positivas κ_0 y κ_1 tales que

$$\kappa_0 < \frac{x_1^2}{x_2^2} < \kappa_1 \quad (13)$$

se tiene que

$$\dot{V}_2 \leq \kappa_3 \tilde{n}^2 + \kappa_4 \tilde{x}_3^2 \quad (14)$$

con

$$\kappa_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\bar{n}} \left| \frac{d\beta_2}{d\eta_1} \frac{d\beta_3}{dx_3} \right| + c\kappa_1 \right)$$

$$\kappa_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\bar{n}} \left| \frac{d\beta_2}{d\eta_1} \frac{d\beta_3}{dx_3} \right| + c\kappa_1 \right) + \left| \frac{d\beta_3}{dx_2} \right|$$

Al seleccionar $\beta_2 = \Gamma_2 \eta_1$ y $\beta_3 = \Gamma_3 x_2$. La cota superior sobre la derivada de la función de Lyapunov V_2 permite concluir que las trayectorias de \tilde{n} y \tilde{x}_3 no escapan en tiempo finito. El resultado sobre los estimadores y el observador puede enunciarse como sigue

Proposición 1. Asuma que existen valores \bar{R} y \bar{n} que satisfacen la desigualdad (4). Asume que la relación en (13) se satisface. Entonces existen funciones $\beta_i(\cdot), i =$

1, 2, 3 tales que la dinámica de los errores de estimación \tilde{R} y \tilde{n} y del error de observación \tilde{x}_3 satisfacen localmente la condición (5).

Prueba. Notar que la dinámica de \tilde{R} satisface las condiciones del Lema 1 con

$$\gamma = \frac{1}{\bar{R}} \frac{d\beta_1}{d\bar{x}_1}$$

$$\mathcal{R} = (2\bar{R} - R, R)$$

por lo tanto al seleccionar $\beta_1 = \Gamma_1 \bar{x}_1$ con Γ_1 una ganancia positiva y seleccionando a $\tanh(\hat{R}(0) + \beta_a(\bar{x}_1(0))) = 0$ se demuestra que \tilde{R} satisface (4).

La estabilidad local de \tilde{R} puede determinarse, en primer lugar, a partir de la primera ecuación en (2), de donde se obtiene

$$\tilde{R}(t) = \tilde{R}(0) e^{\int_0^t \varphi'_R d\tau},$$

con

$$\varphi'_R = -\bar{R} \left[1 - \tanh \left(\hat{R} + \beta_1(\bar{x}_1) \right)^2 \right] \frac{d\beta_1}{d\bar{x}_1}.$$

Por diseño, este término es siempre positivo por lo que que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{R} = 0$.

Respecto a la dinámica de \tilde{n} y \tilde{x}_3 se ha verificado que no escapan en tiempo finito. Por otro lado, considerando una vecindad en torno al origen $(\tilde{n}, \tilde{x}_3) = (0, 0)$ y una expansión en serie de Taylor de los términos $(\dot{\tilde{n}}, \dot{\tilde{x}}_3)$, del punto de operación (\bar{x}_{1d}, x_{2d}) , entonces las dos últimas ecuaciones en (10) se pueden escribir como

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{n}} \\ \dot{\tilde{x}}_3 \end{pmatrix} \approx \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \varphi'_{n*} \Gamma_2 \Gamma_3 \\ c \left(\frac{x_{1d}}{x_{2d}} \right)^2 & \Gamma_3 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \tilde{n} \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} \quad (15)$$

con

$$\varphi'_{n*} = \bar{n} \left[1 - \tanh(\hat{n} + \beta_2(\eta_1))^2 \right]$$

Dado que el polinomio característico resulta en

$$\Delta_{\bar{A}}(\lambda) = \lambda^2 - \Gamma_3 \lambda - c \left(\frac{x_{1d}^*}{x_{2d}^*} \right)^2 \varphi'_{n*} \Gamma_2 \Gamma_3 \quad (16)$$

con $c \left(\frac{x_{1d}^*}{x_{2d}^*} \right)^2 \varphi'_{n*} > 0$. Si se elige $\Gamma_2 > 0$ y $\Gamma_3 < 0$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} (\tilde{n}, \tilde{x}_3) = (0, 0)$. Con esto la prueba queda completa. \triangleleft

4. ALGORITMO DE CONTROL

Dado un valor deseado para la posición del levitador x_{2d} el punto de equilibrio queda definido como

$$x_{1d} = \sqrt{\left(\frac{g x_{2d}}{nc} \right)}$$

$$u_d = R \bar{x}_1$$

$$x_{3d} = 0$$

El modelo linealizado del levitador magnético alrededor del punto de equilibrio es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1s} \\ \dot{x}_{2s} \\ \dot{x}_{3s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2\sqrt{gnc}}{x_{2d}^{3/2}} - \frac{2g}{x_{2d}^2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1s} \\ x_{2s} \\ x_{3s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_\delta$$

con $x_{1s} = x_1 - x_{1d}$, $x_{2s} = x_2 - x_{2d}$, $x_{3s} = x_3 - x_{3d}$ y $u_\delta = u - u_d$.

Para la implantación experimental del controlador se empleó el resultado reportado en Guerrero Tejada et al. (2014), considerando las mismas ganancias y punto de operación reportado. En este caso, se busca minimizar la función de costo

$$J = \int_0^\infty \bar{x}^T(\tau) Q_1 \bar{x}(\tau) + Q_2 u(\tau) d\tau, \quad (17)$$

donde $\bar{x} = (x_1 - x_{1d}, x_2 - x_{2d}, x_3)$, con base en el control

$$u(t) = -k\bar{x} + u_d + u_i(t),$$

con

$$u_i(t) = k_i \int_0^\infty (x_3(t)(t)) dt \quad (18)$$

una acción integral de compensación de la dinámica no modelada y las incertidumbres existentes, al asumir como no conocidos con exactitud los parámetros del sistema o la medición de la velocidad.

Por su parte, la velocidad para fines del controlador es la obtenida a partir de un derivador robusto de orden arbitrario descrito por Levant (1998) de orden n , el cual consiste en la forma:

$$\begin{aligned} \dot{z}_0 &= v_0 = z_1 - \bar{\kappa}_n |z_0 - f_0|^{\frac{n}{n+1}} \text{sign}(z_0 - f_0), \\ \dot{z}_1 &= v_1 = z_2 - \bar{\kappa}_{n-1} |z_1 - v_0|^{\frac{n-1}{n}} \text{sign}(z_1 - v_0), \\ &\vdots \\ \dot{z}_i &= v_i = z_i - \bar{\kappa}_{n-i} |z_i - v_{i-1}|^{\frac{n-i}{n-i+1}} \text{sign}(z_i - v_{i-1}), \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= -\bar{\kappa}_1 \text{sign}(z_n - v_{n-1}), \end{aligned} \quad (19)$$

donde M es tal que $|f_0^{(n)}| \leq M$, y sugiere una posible elección del resto de las constantes como $\bar{\kappa}_1 = 1,1M$, $\bar{\kappa}_2 = 1,5M^{1/2}$, $\bar{\kappa}_3 = 2M^{1/3}$, $\bar{\kappa}_4 = 3M^{1/4}$, $\bar{\kappa}_5 = 5M^{1/5}$, $\bar{\kappa}_6 = 8M^{1/6}$.

5. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Para realizar la validación experimental se empleó el sistema *Quanser[®] MagLev* mostrado en la Fig. 2, utilizando la versión 2015a de Matlab, una tarjeta de adquisición de datos *Quanser[®] Q8* con tiempo de muestreo de 1 ms. Los datos que provee el fabricante para el sistema son $R = 10 \Omega$, $L = 0,415 \text{ H}$, $c = \frac{1}{2} 6,5 \times 10^{-5} \text{ Nm}^2/\text{A}^2$, $m = 0,066 \text{ kg}$, $g = 9,81 \text{ kgm/s}^2$. Con ello, las funciones β_i fueron elegidas como

$$\beta_1(x_1) = \Gamma_1 L x_1 \quad (20)$$

$$\beta(\eta_1) = \Gamma_2 (\hat{x}_3 - \beta_3(x_2)) \quad (21)$$

$$\beta_3(x_2) = \Gamma_3 x_2; \quad (22)$$

Con base en los resultados de Guerrero Tejada et al. (2014), se obtiene el control en lazo cerrado empleando las matrices de peso

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = 1. \quad (23)$$

que resulta en las ganancias del controlador

$$k = (147, -34733, -608,3). \quad (24)$$

con las ganancias para el diferenciador de segundo orden $\bar{\kappa}_1 = 5$, $\bar{\kappa}_2 = 10$, $M = 1$, $k_i = 0,01$ y un punto de operación dado por $x_{2d} = 10^{-2} \text{ m}$.

Una vez estabilizado, en el algoritmo de identificación fueron elegidas $\Gamma_1 = -10$, $\Gamma_2 = 100$, $\Gamma_3 = -40$, con $\bar{n} = 15$ y $\bar{R} = 20$. En la Fig. 5 se muestran los resultados experimentales obtenidos. Se puede apreciar que se logra el resultado de convergencia de los parámetros y de la velocidad de la masa, aún bajo el ruido y las perturbaciones inherentes a la plataforma, en aproximadamente un segundo.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se mostró el empleo de la técnica de Inmersión e Invariancia en el diseño de un esquema de estimación/observación para la reconstrucción de parámetros físicos y de la velocidad en un levitador magnético. Experimentalmente se comprobó la estabilidad y convergencia en la reconstrucción paramétrica y de la velocidad con base en el análisis de Lyapunov y el estudio de la dinámica en una vecindad del punto de operación. El algoritmo resultante logra una convergencia relativamente rápida aún bajo la presencia de ruido de medición y perturbaciones en el sistema. El trabajo futuro considera rediseñar el algoritmo de control para utilizar a los parámetros estimados y la velocidad observada y analizar la estabilidad de la dinámica de lazo cerrado compuesta por la planta, el control, el estimador y el observador.

ACKNOWLEDGEMENTS

M.A.G-O. desea agradecer a la UACM por su apoyo a este trabajo mediante el proyecto UACM CCYT-2023-IMP-05

REFERENCIAS

- Aghazadeh, A., Niazazari, I., and Askarian Abyaneh, H. (2019). Tuned parameters of pid for optimization of losses in magnetic levitation system. *International Journal of Railway Research*, 6(1), 29–37.
- Astolfi, A., Karagiannis, D., and Ortega, R. (2008). *Nonlinear and Adaptive Control with Applications*, volume 187. Springer.
- Astolfi, A. and Ortega, R. (2003). Immersion and invariance: A new tool for stabilization and adaptive control of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic control*, 48(4), 590–606.

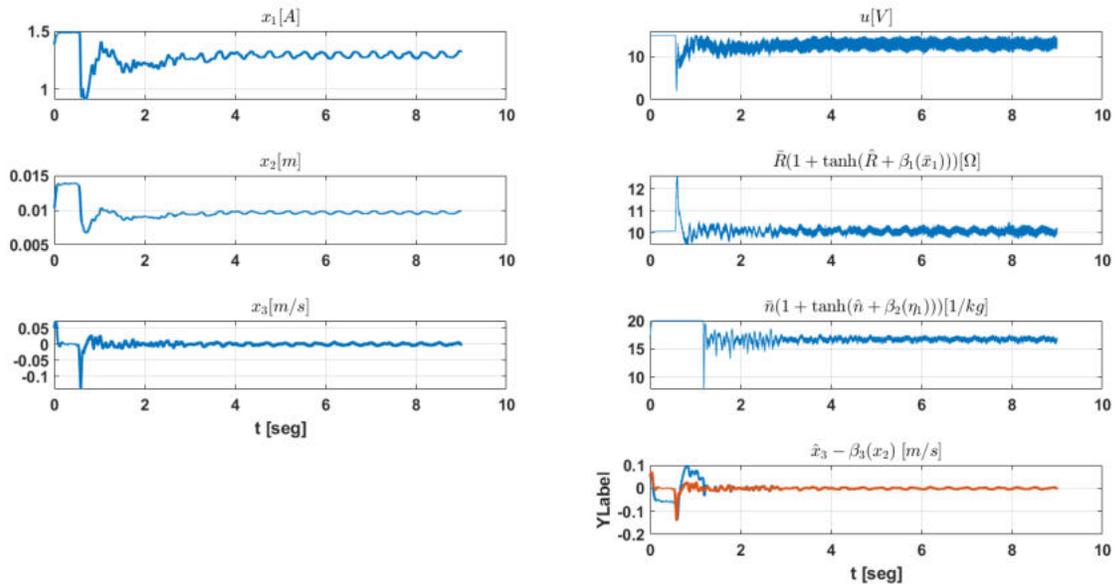


Figura 2. Resultados experimentales del método propuesto de identificación. Se muestran, en la columna izquierda, las mediciones de las señales de corriente y posición obtenidas del sistema ya controlado, así como la reconstrucción de la velocidad mediante el derivador robusto propuesto por Levant (2003). En la columna derecha se muestran los resultados, en tiempo real, de la señal de control y de estimación de los parámetros y de la velocidad con base en el método I&I. En color rojo se muestra la velocidad estimada por el derivador robusto, y en azul la reconstruida por el método I&I.

- Bhaduri, R., Banerjee, S., and Sarkar, M.K. (2012). Genetic algorithm based optimization of controller parameters for an electromagnetic levitation system. In *Advanced Materials Research*, volume 403, 3900–3908. Trans Tech Publ.
- Bojan-Dragos, C.A., Precup, R.E., Hergane, S., Teban, T.A., and Petriu, E.M. (2017). Fuzzy logic-based adaptive control scheme for magnetic levitation systems. In *2017 IEEE International Symposium on Robotics and Intelligent Sensors (IRIS)*, 160–165. IEEE.
- Guerrero Tejada, C., González-Olvera, M.A., Dávila, J., and Fabián-Pliego, J.C. (2014). Maglev tracking control by a state-feedback with integral action and robust velocity reconstruction.
- Kumar E, V. and Jerome, J. (2016). Algebraic riccati equation based q and r matrices selection algorithm for optimal lqr applied to tracking control of 3rd order magnetic levitation system. *Archives of Electrical Engineering*, 65(1), 151–168.
- Levant, A. (1998). Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica*, 34(3), 379–384.
- Levant, A. (2003). Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International journal of Control*, 76(9–10), 924–941.
- Liu, J., Liu, X., and Su, H. (2020). Robust i&i adaptive dsc with disturbance observer for maglev system with output constraint. In *2020 39th Chinese Control Conference (CCC)*, 1909–1914. IEEE.
- Mekky, A.E.E. and Alberts, T. (2012). Modeling, identification, validation and control of a hybrid maglev ball. In *Dynamic Systems and Control Conference*, volume 45295, 423–432. American Society of Mechanical Engineers.
- Morales, R., Feliu, V., and Sira-Ramirez, H. (2010). Nonlinear control for magnetic levitation systems based on fast online algebraic identification of the input gain. *IEEE Transactions on control systems technology*, 19(4), 757–771.
- Rodríguez, H., Ortega, R., and Siguerdidjane, H. (2000). Passivity - based control of magnetic levitation systems : theory and experiments. In *14th International Conference on Mathematical Theory and Network Systems*.
- Sathiyavathi, S. et al. (2019). Design of sliding mode controller for magnetic levitation system. *Computers & Electrical Engineering*, 78, 184–203.
- Yang, W., Meng, F., Sun, M., and Liu, K. (2020). Passivity-based control design for magnetic levitation system. *Applied Sciences*, 10(7), 2392. doi:10.3390/app10072392. URL <http://dx.doi.org/10.3390/app10072392>.