

Design of an Arbitrary-Order PID Controller for a Pneumatic Levitation System

O. Ruíz-Serrano*, C. Sánchez-López*

*Universidad Politécnica de Tlaxcala, Tepeyanco, 90180, México

*Universidad Autónoma de Tlaxcala, Apizaco, 90300, México

e-mail: oscar.ruiz@uptlax.edu.mx, carlsanmx@yahoo.com.mx

Abstract: In this paper, an arbitrary-order proportional-integral-derivative controller is designed to control a pneumatic levitation system. To do it, an integer-order proportional-integral-derivative controller is tuned using the Matlab/Simulink PID Tuning block. Subsequently, the Curve-Fitting method is applied to approximate the behavior of the arbitrary-order of the integral and derivative part associated with the arbitrary-order controller. The proportional, integral and derivative gains obtained from the integer-order controller are used during the design of the arbitrary-order controller. Numerical simulations are performed in Matlab/Simulink, demonstrating a better transient response of the nonlinear system in comparison with the use of integer-order controllers.

Keywords: Mechatronic Systems, Arbitrary-Order Calculus, Nonlinear Control, Hardware Reconfigurable, Modeling.

1. INTRODUCCIÓN

El controlador Proporcional-Integral-Derivativo de orden entero (PID-OE) es un esquema de control ampliamente usado no solo en los procesos de manufactura, si no también en el uso académico y en el área de la investigación Podlubny (1999). Sin embargo, con el resurgimiento del cálculo de orden arbitrario, el comportamiento del controlador PID-OE han sido generalizado a controladores de orden arbitrario (PID-OA). El PID-OE utiliza cuatro variables que deben ser sintonizadas para mejorar la respuesta transitoria del sistema. Los parámetros del controlador a entonar son: la ganancia proporcional (k_p), la ganancia integral (k_i), la ganancia derivativa (k_d) y el coeficiente del filtro (N) asociado a la función de transferencia de primer orden de la derivada. Para el controlador PID-OA, seis variables necesitan ser sintonizados, las cuatro mencionadas anteriormente y el orden arbitrario de la integral (α) y derivada (β).

Por otra parte, un sistema no lineal inestable con cierto grado de complejidad y usado como vehículo de prueba en el diseño de controladores, es el sistema de levitación neumática (LN). El objetivo principal de este sistema es hacer levitar un objeto usando flujo de aire y así evitar contacto físico entre objetos. En este sentido, Escano et al. (2005) reportó un sistema de control basado en

retroalimentación visual y control PID-OE. Para controlar este sistema, se utilizó una computadora, un controlador lógico programable, un motor de CA, un variador de velocidad, una cámara y un ventilador centrífugo. La principal desventaja del prototipo construido es que es económicamente caro y esto se debe a todo el hardware utilizado. En Cholodowicz and Orłowski (2017), se usó la técnica de identificación de sistemas para aproximar la función de transferencia del sistema de LN y un controlador PID-OE fué otra vez utilizado. Esto representa una gran desventaja, ya que la linealización del modelo solamente es aplicable para un punto específico. Algunas variaciones del controlador PID-OE fueron reportados en Chacón et al. (2018). Sin embargo, esa estrategia de control presenta algunas desventajas como las arriba mencionadas. Plataformas virtuales y laboratorios remotos para controlar el sistema no lineal fueron también reportadas en Chacon et al. (2017); Saenz et al. (2017); Rábek and Žáková (2020), donde el controlador PID-OE fué otra vez utilizado. En Chaos et al. (2020), se utilizó un control en modo pseudo-deslizante. La estrategia de control toma en cuenta la posición del objeto y estima la velocidad. Además, en Tkáčik et al. (2021), se utilizó un modelo matemático paramétrico para predecir el comportamiento de la planta. El modelo fue pronosticado a través de datos experimentales y los parámetros encontrados fueron estimados usando el método no lineal de mínimos cuadrados. El filtro de Kalman y el control de retroalimentación en espacio de estados óptimo de orden entero fueron utilizados como estrategias de control. La

* El segundo autor agradece al CONAHCYT por el apoyo sabático en el Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, durante 2022-2023.

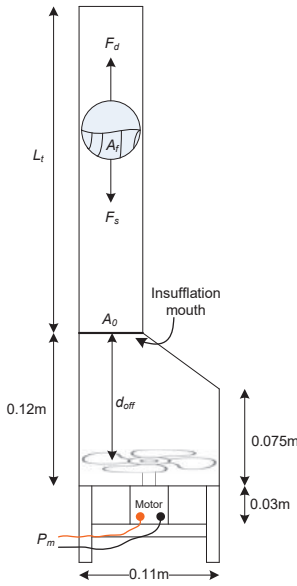


Fig. 1. Diagrama de cuerpo libre del sistema de LN.

principal desventaja es que el modelo paramétrico debe ser linealizado para aplicar el control lineal-cuadrático-integral. In Bomfim et al. (2021) un controlador híbrido basado en el controlador PID-OE fue aplicado. Aquí, se utilizó un controlador adaptativo de referencia y se usa la teoría de Lyapunov para encontrar los parámetros del controlador híbrido. La mayor desventaja encontrada es que un modelo ideal del sistema de LN fue utilizado.

Como se puede observar en todos los artículos reportados a la fecha, el modelo de la planta fue obtenido no solamente a través de técnicas de identificación de sistemas, y por lo tanto en algunos casos, es necesario linealizar el sistema en un punto de operación. Por otra parte, con la reaparición del cálculo de orden arbitrario, el comportamiento físico de sistemas no lineales no solamente puede ser mejor descrito que su contraparte de orden entero Podlubny (1999), sino que los controladores de orden arbitrario también ofrecen una mejora en comparación del orden entero Sánchez-López et al. (2019); Sánchez-López (2020). En este sentido, el objetivo principal de este artículo es demostrar el diseño y aplicación de un controlador PID-OA para controlar la respuesta transitoria de la posición del sistema de LN. Vale la pena mencionar que, según el mejor conocimiento de los autores, esta es la primera vez que este tipo de controlador PID-OA se aplica a este tipo de sistema no lineal inestable. El resto del artículo está organizado de la siguiente manera. El modelo de comportamiento del sistema no lineal se deduce en la Sección 2. El diseño de los controladores PID-OE y PID-AO se describe en la Sección 3. Las pruebas numéricas y comparaciones entre los parámetros de rendimiento del sistema de LN, obtenidos a través del uso del controlador PID-OE y PID-OA, se muestran en la Sección 4. Finalmente, las conclusiones se resumen en la Sección 5.

2. MODELO DE COMPORTAMIENTO

De acuerdo al diagrama de cuerpo libre del sistema de LN ilustrado en la Fig. 1 Saenz et al. (2017), las fuerzas que intervienen en el sistema son la fuerza de gravedad F_s y la fuerza de arrastre o rozamiento F_d . De esta forma, las fuerzas que actúan sobre la esfera en el interior del tubo son

$$\sum F_z = m_s a_z(t) = m_s \ddot{z}(t) = -F_s + F_d, \quad (1)$$

donde m_s es la masa de la esfera. El peso de la esfera está dado por

$$F_s = m_s g = \frac{4}{3} \pi R_s^3 \rho_s g, \quad (2)$$

donde g es la fuerza de gravedad, R_s y ρ_s son el radio y la densidad de la esfera, respectivamente. La fuerza de rozamiento está dado por

$$F_d = \frac{C_d \rho_a A_f (v_{at}(t) - \dot{z}(t))^2}{2}, \quad (3)$$

donde C_d es el coeficiente de arrastre, ρ_a es la densidad del aire, A_f es el área frontal de la esfera y $v_{at}(t)$ denota la velocidad del aire dentro del tubo. Fusionando (1), (2) y (3), se obtiene

$$\ddot{z}(t) = \frac{3}{8} \frac{C_d \rho_a (v_{at}(t) - \dot{z}(t))^2}{\rho_s R_s} - g. \quad (4)$$

Además, la velocidad del aire producida por el ventilador a partir de la boca de insuflación y para una altura específica es

$$v_{at}(t) = \frac{v_{ins}(t) C_a \sqrt{A_0}}{z(t)}, \quad (5)$$

donde A_0 es el área libre de la boca de insuflación, C_a es una constante que está relacionada con la boca de insuflación y $v_{ins}(t)$ es la velocidad del aire en la salida de la boca de insuflación Escoda (2002). Sin embargo, la relación entre $v_{ins}(t)$ y el ancho de pulso $P_m(t)$, aplicado al motor de corriente directa asociado con el ventilador debe obtenerse experimentalmente. Esta relación no lineal depende de cada diseño físico y una forma alternativa para obtenerla es usar una función sustituta $P_m(t)$ Carbajal-Gómez and Sánchez-López (2019). Esta técnica de modelado no solo evita el cálculo y la compensación entre $v_{ins}(t)$ y $P_m(t)$, si no también acelera el proceso de diseño. La función sustituta es un polinomio que se construye a partir de una base de datos conocidos, con el objetivo de pronosticar los valores de la función en puntos de datos desconocidos. De este modo, la Fig. 2 muestra doce puntos de datos medidos (círculos azules), así como la función sustituta generada para ajustar los puntos de datos (línea continua). La función resultante es un polinomio de tercer grado para el diseño ilustrado en la Fig. 1, dado como

$$v_{ins}(t) = 1.08e^{-8} P_m^3(t) - 5.88e^{-5} P_m^2(t) + 0.1 P_m(t) - 53.68. \quad (6)$$

Reescribiendo (4) en un sistema en el espacio de estados, se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= k_1 \left(k_2 \frac{v_{ins}(t)}{x_1(t)} - x_2(t) \right)^2 - g, \end{aligned} \quad (7)$$

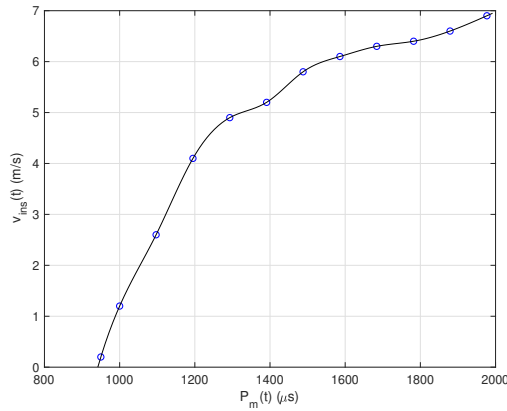


Fig. 2. Función sustituta para $P_m(t)$ vs. $v_{ins}(t)$.

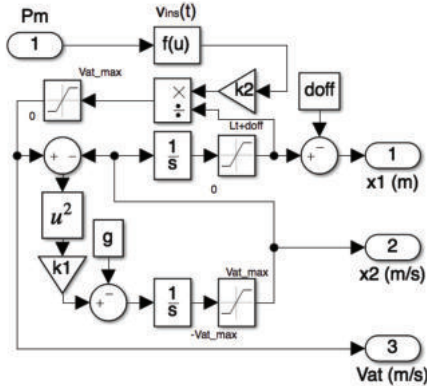


Fig. 3. Modelo de comportamiento en Simulink de (6), (7) y considerando d_{off} de la Fig. 1.

donde $x_1(t)=z(t)$, $x_2(t)=\dot{z}(t)$ (velocidad de la esfera), $k_1=\frac{3C_d\rho_a}{8\rho_s R_s}$ y $k_2=C_a\sqrt{A_0}$. A partir de (6) y (7) se construye el modelo de comportamiento del sistema en Simulink, como se representa en la Fig. 3. En este modelo, se agregan bloques de saturación para incluir los límites físicos reales del sistema de LN mostrado en la Fig. 1, donde L_t es la longitud del tubo y d_{off} es la distancia entre el aspa del ventilador y la boca de insuflación. La Tabla 1 muestra los valores numéricos de cada variable física de la Fig. 1 utilizadas durante las simulaciones numéricas.

Table 1. Variables físicas del sistema de LN.

g (m/s ²)	C_d	ρ_a (kg/m ³)	R_s (m)	m_s (kg)
9.81	0.5	1.196	0.0225	1.2268e-3
ρ_s (kg/m ³)	C_a	A_0 (m ²)	L_t (m)	d_{off} (m)
25.7121	16.2	2e-3	0.66	0.1

3. DISEÑO DEL CONTROLADOR PID-OE Y PID-OA

El objetivo del controlador es conseguir que la esfera alcance un estado estable a una altura deseada. El esquema de control utilizado para cada estrategia de control se bosqueja en la Fig. 4.

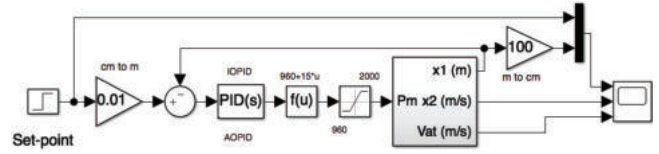


Fig. 4. Esquema de control utilizando el controlador PID-OE y PID-OA.

3.1 Diseño del controlador PID-OE

El modelo de comportamiento del sistema de LN fue construido en Simulink/Matlab, el cual incluye el valor numérico de cada variable física descrita en la Tabla 1. El controlador PID-OE fue diseñado usando el bloque PID de Simulink y configurado como ideal, como se muestra en la Fig. 4. Además, es necesario incluir una función para transformar el error de distancia a $P_m(t)$, limitado al valor mínimo y máximo de (6), dado que $f(u) = 960 + 15u$. Para sintonizar el controlador, se usó la aplicación *PID tuner* y se obtuvieron las ganancias basadas en la función de transferencia del sistema. Note que $V_{at_max}=7\text{m/s}$ se obtuvo de manera experimental. Durante el proceso de ajuste, se aseguró que el tiempo de respuesta del control no fuera demasiado rápido ni demasiado abrupto, ya que el sistema de LN no es capaz de responder rápidamente a perturbaciones y también es susceptible a fallos. Una señal de entrada del tipo escalón con 40 cm de amplitud fue usada como referencia. Una vez que el proceso fue completado, los parámetros del PID-OE son: $k_p=54$, $k_i=1.94$, $k_d=0.1278$ y $N=1221.78$.

3.2 Diseño del controlador PID-OA

A diferencia del controlador PID-OE la cual tiene tres ganancias, al controlador PID-OA se le agregan otros dos parámetros llamados: α y β , que representan el orden integral y derivativa, respectivamente. La función de transferencia de este controlador en su versión ideal es

$$C(s) = k_p + k_p k_i \frac{1}{s^\alpha} + k_p k_d \frac{N s^\beta}{s^\beta + N}, \quad (8)$$

donde $\alpha, \beta \in (0, 1)$. El método de aproximación de ajuste de curva fue aplicado para conseguir el comportamiento de α y β Colín-Cervantes et al. (2021). Por ejemplo, para $N_o=3$, $\alpha=-0.6$, $w_l=0.01$ y $w_h=100$, se obtiene

$$\frac{1}{s^{-\alpha}} \approx \frac{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0} \quad (9)$$

$$\frac{1}{s^{0.6}} \approx \frac{0.0856 s^3 + 2.0054 s^2 + 1.3622 s + 0.498}{s^3 + 2.2595 s^2 + 0.2729 s + 0.0014}$$

Por otra parte, para obtener la función de transferencia racional de la parte derivativa de (8), β debe ser positiva. Por lo tanto, si $\beta = 0.6$, se obtiene

$$s^\beta \approx \frac{c_3 s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0} \quad (10)$$

$$s^{0.6} \approx \frac{35.2 s^3 + 962.3 s^2 + 1416.7 s + 60.5}{s^3 + 192.8 s^2 + 1596.2 s + 706.4}$$

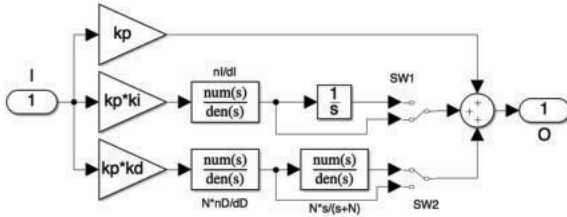


Fig. 5. Subsistema del controlador PID-OA usando (11) y (12).

Table 2. Configuración de los interruptores para las 4 combinaciones entre α y β .

SW2	SW1	α	β
Abajo	Abajo	<1	<1
Abajo	Arriba	<1	>1
Arriba	Abajo	>1	<1
Arriba	Arriba	>1	>1

Sustituyendo las expresiones simbólicas de (9) y (10) en (8), se obtiene

$$C(s) = k_p + k_p k_i \frac{nI}{dI} + k_p k_d \frac{NnD}{dD}, \quad (11)$$

donde $\frac{nD}{dD} = \frac{c_3 s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{(Nd_3 + c_3)s^3 + (Nd_2 + c_2)s^2 + (Nd_1 + c_1)s + (Nd_0 + c_0)}$ y $\frac{nI}{dI} = \frac{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}$. Dependiendo del sistema a controlar, si α y β son mayores a la unidad, (11) se modifica como

$$C(s) = k_p + k_p k_i \frac{nI}{dI} \frac{1}{s} + k_p k_d \frac{NnD}{dD} \frac{Ns}{s+N}. \quad (12)$$

Analizando las últimas dos ecuaciones, se observa que aunque ambas consideran el filtro N en la parte derivativa y como consecuencia se disminuye el ruido de medición, (12) contempla una acción integral pura y por lo tanto, es capaz de eliminar el efecto de las perturbaciones constantes. A partir de (11) y (12), la estructura del controlador PID-OA se muestra en la Fig. 5 y debe reemplazar al bloque PID en la Fig. 4. Con base en la Tabla 2, los interruptores $SW1$ y $SW2$ se utilizan para obtener las cuatro combinaciones entre la parte integral y derivativa de orden arbitrario de (11) y (12). Note que las ganancias obtenidas del controlador PID-OE son aquí utilizadas. También, si N_o incrementa o decrementa, (9), (10), (11) y (12) deben actualizarse. Además, el diseño y ajuste adecuado del controlador PID-OA requiere determinar el valor óptimo de α y β . Esta tarea se vuelve tediosa ya que más de 100 simulaciones se generan. En respuesta a este desafío, se codificó un script en Matlab que genera la respuesta transitoria del sistema en forma automatizada, eficiente y ordenada, como se describe en el pseudo-código 1.

4. PRUEBAS NUMÉRICAS

Las simulaciones numéricas de la respuesta transitoria de la Fig. 4, para diferentes valores de orden arbitrario, se ilustran en la Fig. 6. Para $\alpha, \beta < 1$, el valor numérico de cada uno de ellos está en el intervalo $[0.8, 0.999]$ y cuando

Algorithm 1 Pseudo-código para generar automáticamente las respuestas transitorias del sistema de LN.

Require: $k_p, k_i, k_d, N, w_l, w_h, N_o$

Ensure: Vectores: α and β

```

1: for  $h \leq \text{length}(\alpha)$  do
2:    $[nI, dI] \leftarrow \text{CurveFit}(-\alpha(h), w_l, w_h, N_o)$ 
3:   for  $i \leq \text{length}(\beta)$  do
4:      $[nD, dD] \leftarrow \text{CurveFit}(\beta(i), w_l, w_h, N_o)$ 
5:      $dD = nD + N * dD$ 
6:     Ejecuta la simulación de la Fig. 4, incluyendo
7:     la Fig. 3, Fig. 5 y de acuerdo a la Tabla 2
8:   end for
9: end for
10: Muestra los resultados

```

Table 3. Parámetros de desempeño de cada gráfica de la Fig. 7(a).

Parámetro de desempeño	PID-OE	PID-OA
Sobreimpulso (cm)	1.83	5.85
Tiempo de establecimiento (sec)	13.5	11.5
Tiempo de subida (sec)	0.29	0.28
Tiempo de retardo (sec)	0.25	0.33

$\alpha, \beta > 1$, el valor numérico está en el rango $[0.001, 0.2]$. Para todos los casos, el tamaño del paso es 0.1 y se puede considerar hasta 5 dígitos. La señal de estímulo, representada con una línea azul continua en la Fig. 6, es la señal de referencia igual a 40cm. Analizando cada gráfica, se observa que no solo todas las combinaciones alcanzaron el estado estable, pero en la combinación de la Fig. 6(d) se obtiene una mejor respuesta transitoria. Seleccionando la gráfica para la combinación $\alpha=1.001$ y $\beta=1.2$, la respuesta transitoria se ilustra en la Fig. 7. A partir de esta última figura, los parámetros de rendimiento de cada respuesta debido a cada controlador fueron medidas y registradas en la Tabla 3. Aunque existe un sobreimpulso del controlador PID-OA 4.02cm más grande que el obtenido por el controlador PID-OE, el tiempo de establecimiento del primero es más corto que el último. El tiempo de subida para ambos controladores son similares y el tiempo de retardo del controlador PID-OA es un poco más largo que el del controlador PID-OE. Considerando todo lo antes descrito, se concluye que el controlador PID-OA demuestra una ligera superioridad sobre el controlador PID-OE en lo que respecta al control de posición y tiempo de establecimiento. Finalmente, la Fig. 7(b) y 7(c) muestran la respuesta transitoria de la velocidad de la esfera y la velocidad del aire dentro del tubo para cada combinación de α y β , respectivamente.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se describió el diseño de un controlador PID-OA para mejorar la respuesta transitoria de un sistema de LN. Para lograrlo, el método de ajuste de curva fué utilizado para aproximar el comportamiento del orden arbitrario relacionado a la parte integral y derivativa del controlador propuesto. Además, se describió un esquema

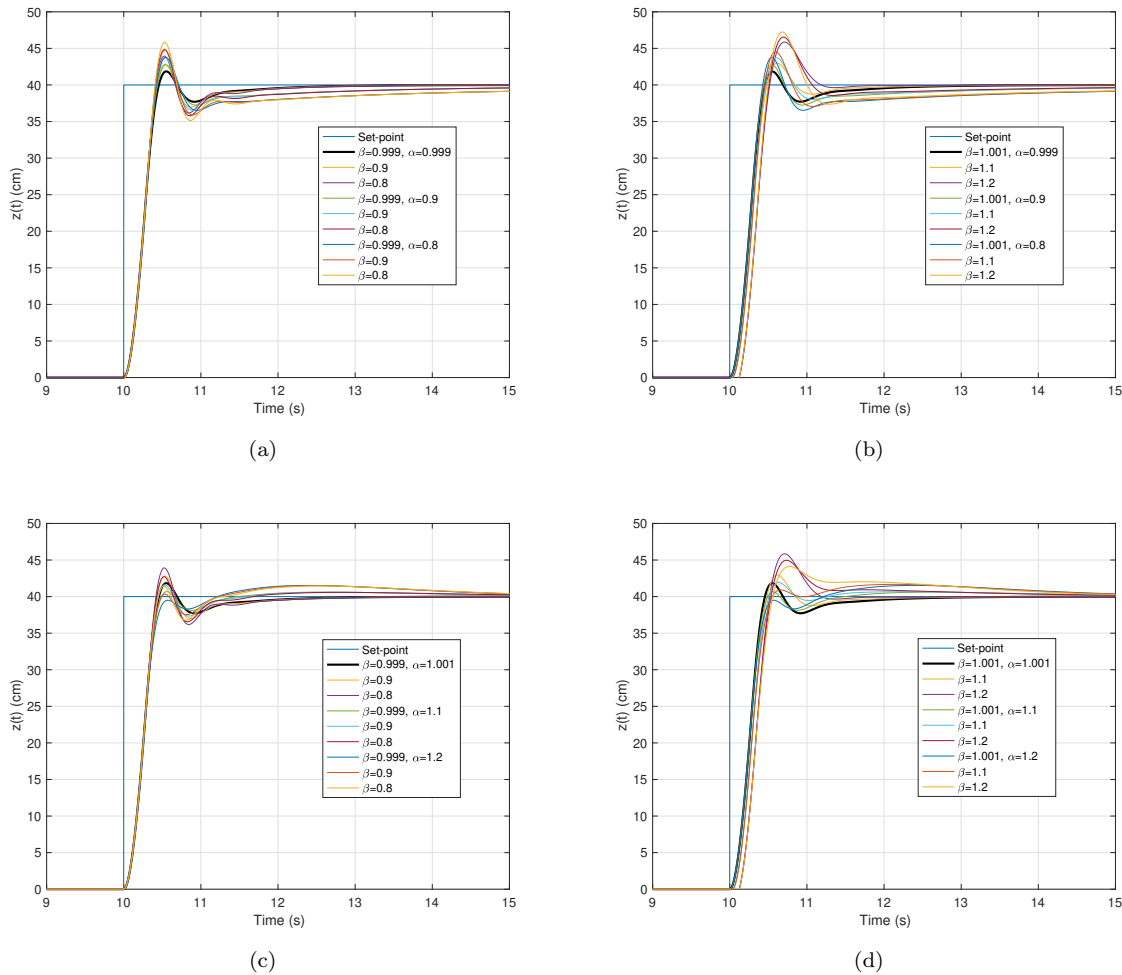


Fig. 6. Respuestas transitorias del sistema de LN para diferentes combinaciones: (a) $\alpha, \beta < 1$; (b) $\alpha < 1, \beta > 1$; (c) $\alpha > 1, \beta < 1$; (d) $\alpha, \beta > 1$.

de control para configurar al controlador PID-OA en las cuatro combinaciones posibles de α y β , y generar automáticamente las simulaciones. Los resultados numéricos demuestran que los parámetros de rendimiento de la respuesta transitoria del sistema no lineal han mejorado significativamente, en comparación con aquellos obtenidos usando un controlador PID-OE, como se evidencia en la Tabla 3, Fig. 6 y Fig. 7. Finalmente, es importante mencionar que, para el mejor conocimiento de los autores, un controlador PID-OA no se ha aplicado a este tipo sistema no lineal inestable, hasta hoy.

REFERENCES

Bomfim, M.H.S., Lima II, E.J., Monteiro, N.S., and Dias, A.L.A. (2021). A novel hybrid (pid + mrac) adaptive controller for an air levitation system. *IEEE Latin America Transactions*, 19(8), 1400–1409. doi:10.1109/TLA.2021.9475871.

Carbajal-Gómez, V.H. and Sánchez-López, C. (2019). Determining accurate lyapunov exponents of a multiscroll

chaotic attractor based on snfs. *Nonlinear Dynamics*, 98(3). doi:10.1007/s11071-019-05288-9.

Chacon, J., Saenz, J., Torre, L.D.I., Diaz, J.M., and Esquembre, F. (2017). Design of a low-cost air levitation system for teaching control engineering. *Sensors*, 17(10). doi:10.3390/s17102321.

Chacón, J., Vargas, H., Dormido, S., and Sánchez, J. (2018). Experimental study of nonlinear pid controllers in an air levitation system. *IFAC-PapersOnLine*, 51(4), 304–309. doi:https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.06.082. 3rd IFAC Conference on Advances in Proportional-Integral-Derivative Control PID 2018.

Chaos, D., Chacón, J., Aranda-Escolástico, E., and Dormido, S. (2020). Robust switched control of an air levitation system with minimum sensing. *ISA Transactions*, 96, 327–336. doi:https://doi.org/10.1016/j.isatra.2019.06.020.

Chołodowicz, E. and Orłowski, P. (2017). Low-cost air levitation laboratory stand using matlab/simulink and arduino. *Pomiary Automatyka Robotyka*, 21(226), 33–

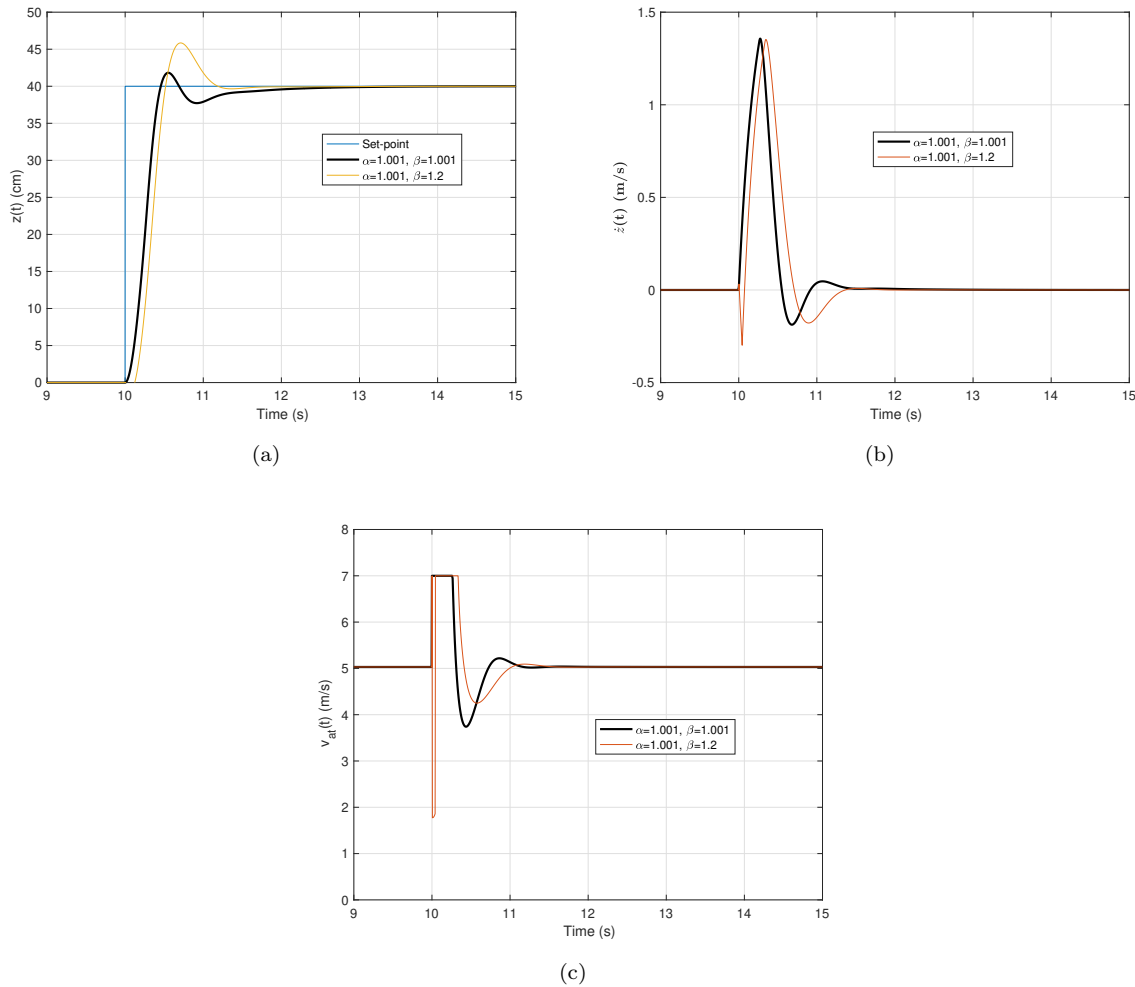


Fig. 7. Respuesta transitoria para la combinación $\alpha=\beta=1.001$ (línea negra), y $\alpha=1.001, \beta=1.2$ (línea verde): (a) $z(t)$ (cm); (b) $\dot{z}(t)$ (m/s) and (c) $v_{at}(t)$ (m/s).

39. doi:10.14313/PAR_226/33.
- Colín-Cervantes, J.D., Sánchez-López, C., Ochoa-Montiel, R., Torres-Muñoz, D., Hernández-Mejía, C.M., Sánchez-Gaspariano, L.A., and González-Hernández, H.G. (2021). Rational approximations of arbitrary order: A survey. *Fractal and Fractional 2021, Vol. 5, Page 267*, 5, 267. doi: 10.3390/FRACTALFRACT5040267.
- Escano, J., Ortega, M., and Rubio, F. (2005). Position control of a pneumatic levitation system. In *2005 IEEE Conference on Emerging Technologies and Factory Automation*, volume 1, 6 pp.-528. doi:10.1109/ETFA.2005.1612568.
- Escoda, S. (2002). *Practical Ventilation Manual: Technical Catalog*. Barcelona, Salvador Escoda, S.A., Barcelona.
- Podlubny, I. (1999). Fractional-order systems and -controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44, 208–214. doi:10.1109/9.739144.
- Rábek, M. and Žáková, K. (2020). Development of control experiments for an online laboratory system. *Information*, 11(3), 131. doi:10.3390/info11030131.
- Saenz, J., Chacon, J., de la Torre, L., and Dormido, S. (2017). An open software - open hardware lab of the air levitation system. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1), 9168–9173. doi:https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2017.08.1727. 20th IFAC World Congress.
- Sánchez-López, C., Carbajal-Gómez, V., Carrasco-Aguilar, M., and Morales-López, F. (2019). Pid controller design based on memductor. *AEU - International Journal of Electronics and Communications*, 101, 9–14. doi:https://doi.org/10.1016/j.aeue.2019.01.019.
- Sánchez-López, C. (2020). An experimental synthesis methodology of fractional-order chaotic attractors. *Nonlinear Dynamics*, 100(4). doi:10.1007/s11071-020-05682-8.
- Tkáčik, T., Tkáčik, M., Jadlovská, S., and Jadlovská, A. (2021). Design of aerodynamic ball levitation laboratory plant. *Processes*, 9(11). doi:10.3390/pr9111950.