

Observer synthesis for uncertain linear systems under multiple sampled outputs: Application to a building-like structure

F. Ramírez-Rasgado * O. Hernández-González **
C.-M. Astorga-Zaragoza * M. Farza ***
M.E. Guerrero-Sánchez ** Y.-I. Saavedra-Benitez ****

* *Tecnológico Nacional de México: Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Cuernavaca, Mor., México.*

** *CONAHCYT: Tecnológico Nacional de México: Instituto Tecnológico de Hermosillo, Hermosillo, Son., México.*

*** *NORMANDIE UNIV, UNICAEN, ENSICAEN, LIS (UR 7478), 14000 Caen, France.*

**** *Tecnológico Nacional de México: Instituto Tecnológico de Apizaco, Tzompantepec, Tlaxcala., México.*

Abstract: In this work a full-state observer is presented for MIMO linear systems in presence of uncertainties and multiple sampled outputs. The observer is capable to reconstruct the state vector in a continuous form even if it receives the output in a sampled form. Then, it is possible to establish that the observation error will converge to a bounded value depending on the magnitude of the maximum sampling interval and uncertainties. In the case when there is no uncertainties, the observation error converges to zero. The proposed observer is tested to estimate the state vector in a building structure in which the seismic signal is treated as uncertainty.

Keywords: Linear systems, sampled output, MIMO system and uncertain system.

1. INTRODUCCIÓN

Un problema aún latente que se presenta frecuentemente en los sistemas es la incapacidad de medir todas las variables de estado, esto puede deberse a diversos factores como lo son: la inexistencia de sensores, los altos costos que representan la adquisición de estos o bien que su instalación representa una técnica invasiva en el sistema. El conocer las variables de estado es de gran importancia ya sea para cuestiones de control, monitoreo de variables críticas en los sistemas, supervisión de parámetros intrínsecos e incluso para estimar dinámicas propias de los sistemas como: las entradas desconocidas, incertidumbres paramétricas o dinámicas no modeladas.

Es por esto que el diseño, desarrollo y aplicación de observadores sigue siendo un tema de gran interés en el ámbito del control automático debido a que buscan darle solución a la problemática de la estimación de las variables de estado. A grandes rasgos, un observador es un dispositivo o algoritmo capaz de estimar las variables de estado de un sistema, a través del conocimiento de las entradas y salidas disponibles del sistema.

Actualmente se han enfocado los trabajos en diseñar observadores para sistemas con señales adquiridas no en

tiempo continuo, esto motivado por las aplicaciones en la ingeniería, como lo son: sistemas muestreados, cuantificados, interconectados, localización de vehículos móviles, etc. Algunos de estos sistemas se muestran en Chen and Francis (2012); Hespanha et al. (2007). En Geromel and Gabriel (2015) se presenta el diseño de un observador para un sistema lineal con salidas muestreadas. Este observador obtiene el valor de la ganancia del término de corrección por medio de LMIs con lo que busca conseguir una optimización \mathcal{H}_2 y se logra la convergencia del error de observación a cero. Otro enfoque se presenta en Qayyum et al. (2015); Ali et al. (2018), donde se presentan observadores impulsivos. En el primero se asegura la convergencia del error de observación en un tiempo infinito, mientras que en el segundo se asegura una convergencia exponencial. En Li and Fu (2017) se presenta un observador utilizando el enfoque de Luenberger, con el cual se logra la estimación de los estados de sistemas conmutados, donde se calcula un término de corrección para cada uno. Utilizando este enfoque, en Hu et al. (2019) se utiliza para un sistema en el cual se presentan pérdidas de datos. Es importante el resaltar que estos enfoques utilizan dos modelos para imitar el comportamiento del sistema. El primer modelo se utiliza cuando la muestra no está disponible y el segundo cuando la muestra

si lo está. Esto implica un gasto computacional mayor debido a la cantidad de modelos, así como se pueden presentar problemas debidos al cambio entre modelos. Otra desventaja de estos observadores es que consideran que las señales son adquiridas en tiempos de muestreo constantes y en el caso de que sean múltiples señales, estas deben de ser muestreadas en periodos iguales, lo que en la practica suele ser difícil. Algunos trabajos que han abordado la problemática de las señales muestreadas en diferentes intervalos de tiempo se muestran en Moarref and Rodrigues (2014); Ling and Kravaris (2017); Sferlazza et al. (2018).

Este trabajo se enfoca en el diseño de un observador que es capaz de reconstruir la señal de forma continua para un sistema lineal MIMO incierto. La principal contribución de este trabajo es el considerar que las mediciones son adquiridas en diferentes intervalos de tiempo, lo que en la practica es algo común. Esto contrasta con lo que se propone en Farza et al. (2014); Ali et al. (2016), donde se considera el mismo muestreo para las salidas. Esta clase de sistemas se presentan en la Sección 2. Es importante el considerar que el par (A, C) debe de ser observable. El diseño del observador se muestra en la Sección 3. Es importante el resaltar que este observador es capaz de estimar el vector de estado de forma continua con un solo modelo, a diferencia de algunos presentados en la literatura (Qayyum et al., 2015; Ali et al., 2018), además es capaz de estimar en presencia de múltiples muestreos. Por último, en la Sección 4, se evalúa el desempeño del observador mediante la estimación del vector de estado de un modelo estructural tipo edificio en lazo abierto y en lazo cerrado en presencia de incertidumbre, siendo la señal incierta un movimiento sísmico. Las conclusiones de este trabajo se presentan en la Sección 5.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y PRELIMINARES

Considere el siguiente sistema lineal MIMO (Multiple Input-Multiple Output) con incertidumbres:

$$\mathcal{SYS} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Dd(t), \\ y(t_k) = Cx(t_k) = x^1(t_k). \end{cases} \quad (1)$$

con:

$$D = \begin{bmatrix} 0_{n_1 \times n_q} \\ \vdots \\ 0_{n_{q-1} \times n_q} \\ I_{n_q} \end{bmatrix} \quad C = [I_{n_1 \times n_1} \quad 0_{n_1 \times n_2} \quad \dots \quad 0_{n_1 \times n_q}]$$

donde el estado $x(t) = (x^1, x^2, \dots, x^q)^T \in \mathbb{R}^n$, $x^i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $k = 1, \dots, q$ con $n_1 = p$ y $\sum_{i=1}^q n_k = n$; $u(t) \in \mathbb{R}^s$ es la entrada del sistema; $d(t) : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^p$ es una función que describe las incertidumbres del sistema y puede depender del tiempo, los estados y los parámetros. Las matrices A y B son matrices constantes de dimensiones apropiadas. La salida del sistema $y(t_k) \in \mathbb{R}^p$ es adquirida en instantes de tiempo.

A1 El par (A, C) se asume como observable.

A2 La función desconocida $d(t)$ está esencialmente acotada, es decir, $\exists \delta_d > 0 \quad \sup_{t \geq 0} \|d(t)\| \leq \delta_d$.

2.1 Disponibilidad de la salida

En este trabajo se considera que cada salida medible está disponible solo en ciertos instantes de tiempo. Considerando $y_i(t_k)$ como la i -ésima salida $i = 1, \dots, p$, para esta salida está disponible en los instantes de tiempo, $0 \leq t_i^{(0)} < t_i^{(1)} < \dots < t_i^{(k)}$, $\Delta_i^{(k)} = t_i^{(k+1)} - t_i^{(k)}$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} t_i^{(k)} = +\infty$, $i = 1, \dots, p$. Entonces, para cada salida existe $0 < \Delta_{m_i} \leq \Delta_{M_i} < +\infty$ lo que corresponde a

$$0 < \Delta_i^{(k)} = t_i^{(k+1)} - t_i^{(k)} \leq \Delta_{M_i}, \forall k \geq 0, i = 1, \dots, p.$$

3. DISEÑO DEL OBSERVADOR PARA SALIDAS MUESTREADAS

En esta sección se presenta el observador para la estimación del vector de estado para el sistema (1). El observador está dado por las siguientes ecuaciones:

$$\mathcal{OBS} \begin{cases} \hat{\dot{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L\eta(t) \\ \dot{\eta}(t) = -CL\eta(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), k \in \mathbb{N} \\ \eta(t_k) = Cx(t_k) - C\hat{x}(t_k), \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (2)$$

donde $\hat{x} = [\hat{x}^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^q]^T$ es el vector de estado estimado y L es la ganancia del observador. Considerando esto, se propone el siguiente teorema.

Nota: Es importante resaltar que la función $\eta(t)$ es continua en el intervalo de tiempo $[t_k, t_{k+1})$ y se actualiza en cada instante de muestreo t_k utilizando sólo la medición de salida muestreada $y(t_k)$.

Teorema 1. Considerando el sistema (1), en el cual la función desconocida satisface la suposición **A2**. Entonces, existe una matriz positiva definida P , una matriz R de dimensiones apropiadas y una matriz Q positiva tal que la siguiente LMI se satisfaga:

$$A^T P + PA - C^T R - R^T C \leq -2Q \quad (3)$$

donde la ganancia del observador es:

$$L = P^{-1} R^T \quad (4)$$

y si la cota máxima del diámetro de partición de la muestra $\Delta_{\bar{M}}$ es tal que:

$$\Delta_{\bar{M}} < \chi_{\theta_L} \quad (5)$$

entonces, el estado del observador (2) convergerá exponencialmente a una región acotada, la cual estará dada por la cota de la incertidumbre en el sistema δ_d , y de la funciones $N_{\theta_L}(\Delta_m, \Delta_{\bar{M}})$ y $\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}})$, definidas como:

$$N_{\theta_L}(\Delta_m, \Delta_{\bar{M}}) = 2\sigma\Delta_{\bar{M}} \frac{2 - e^{-\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}})\Delta_m}}{1 - e^{-\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}})\Delta_m}} \quad (6)$$

$$\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}}) = (a_{\theta_L} - b_{\theta_L}\Delta_{\bar{M}})e^{-a_{\theta_L}\Delta_{\bar{M}}} \quad (7)$$

Nota: En este caso, ya que existen diferentes instantes de muestreo, se elige $\Delta_{\bar{M}} = \max_{1 \leq i \leq p} \{\Delta_{M_1}, \dots, \Delta_{M_p}\}$.

3.1 Prueba del Teorema 1

En esta sección se demuestra que el error de observación convergerá a una región cerca del origen. Se define el error de observación como $\tilde{x} = x - \hat{x}$, considerando (1) y (2), se tiene:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + Dd(t) - L\eta(t) \quad (8)$$

Ahora bien, partiendo de $\dot{\eta}(t)$ en (2), se obtiene:

$$\eta(t) = C\tilde{x}(t_k)e^{-CL(t-t_k)} \quad (9)$$

Definiendo la variable auxiliar $z(t)$:

$$z(t) = C\tilde{x}(t) - \eta(t) = C\tilde{x}(t) - C\tilde{x}(t_k)e^{-CL(t-t_k)} \quad (10)$$

Sustituyendo (10) en (8) se obtiene:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A - LC)\tilde{x}(t) + Dd(t) + Lz(t) \quad (11)$$

Para demostrar la estabilidad del observador se propone la siguiente función candidata de Lyapunov $V(\tilde{x}, t) = \tilde{x}^T(t)P\tilde{x}(t)$. Derivando esta función con respecto al tiempo (t), se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{x}(t), t) &= 2\tilde{x}^T(t)P\dot{\tilde{x}}(t) \\ &= 2\tilde{x}^T(t)P[(A - LC)\tilde{x}(t) + Dd(t) + Lz(t)] \\ &= 2\tilde{x}^T(t)P(A - LC)\tilde{x}(t) + 2\tilde{x}^T(t)PDd(t) \\ &\quad + 2\tilde{x}^T(t)PLz(t). \end{aligned} \quad (12)$$

Es importante resaltar que $A - LC = A_0$ es Hurwitz tal que existe una matriz P de $n \times n$ simétrica definida positiva (SDP) y $\mu = \|Q\|$, tal que:

$$A^T P + PA - C^T R - R^T C \leq -2\mu \quad (13)$$

donde la ganancia del observador L es $L = P^{-1}R^T$.

Posteriormente se analiza la función auxiliar $z(t)$ dada por (10), considerando que $CD = 0$ debido a la estructura de ambas matrices, se procede a obtener su derivada obteniendo:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= C\dot{\tilde{x}}(t) + CLC\tilde{x}(t)e^{-CL(t-t_k)} \\ &= C[(A - LC)\tilde{x}(t) + Dd(t) + Lz(t)] \\ &\quad + CLC\tilde{x}(t_k)e^{-CL(t-t_k)} \\ &= CA\tilde{x}(t) + CDd(t) = CA\tilde{x}(t). \end{aligned} \quad (14)$$

La integral de t_k a t y del hecho que $z(t_k) = 0$, quedaría de la siguiente forma:

$$z(t) = \int_{t_k}^t CA\tilde{x}(s)ds. \quad (15)$$

Obteniendo la norma de $z(t)$ y considerando que la función incierta $d(t)$ satisface la suposición **A2**:

$$\begin{aligned} \|z(t)\| &\leq \|C\| \int_{t_k}^t \|A\| \|\tilde{x}(s)\| ds \\ &\leq \frac{\|A\|}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\tilde{x}(s), s)} ds \\ \|z(t)\| &\leq \frac{\|A\|}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\tilde{x}(s), s)} ds \end{aligned} \quad (16)$$

Procediendo como en (Bouraoui et al., 2015), ahora se obtiene la norma de cada término que está presente en (12). Considerando (13) y (16), se obtiene:

$$\begin{aligned} \|2\tilde{x}^T(t)PLz(t)\| &\leq 2\|L\| \left(\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \|A\| \int_{t_k}^t \sqrt{V(\tilde{x}(s), s)} ds \right) \\ &\quad \times \sqrt{V(\tilde{x}(t), t)}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\|2\tilde{x}^T(t)PA_0\tilde{x}(t)\| \leq -2\mu V(\tilde{x}(t), t), \quad (18)$$

$$\|2\tilde{x}^T(t)PDd(t)\| \leq 2\sqrt{\lambda_{\max}(P)}\delta_d \sqrt{V(\tilde{x}(t), t)}, \quad (19)$$

donde $\|D\| = 1$ debido a la estructura de la matriz D . Sustituyendo (17), (18) y (19) en (12) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{x}(t), t) &\leq -2\mu V(\tilde{x}(t), t) + 2\sqrt{\lambda_{\max}(P)}\delta_d \sqrt{V(\tilde{x}(t), t)} \\ &\quad + 2\|L\| \left(\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \|A\| \int_{t_k}^t \sqrt{V(\tilde{x}(s), s)} ds \right) \\ &\quad \times \sqrt{V(\tilde{x}(t), t)} \end{aligned}$$

Reescribiendo, queda como a continuación:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sqrt{V(\tilde{x}(t), t)} &\leq -2\mu \sqrt{V(\tilde{x}(t), t)} + 2\sqrt{\lambda_{\max}(P)}\delta_d \\ &\quad + 2\sigma \|L\| \|A\| \int_{t_k}^t \sqrt{V(\tilde{x}(s), s)} ds \end{aligned} \quad (20)$$

con $\sigma = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}$. Agrupando:

$$a_{\theta_L} = 2\mu, b_{\theta_L} = 2\sigma \|L\| \|A\|, c_{\theta_L} = 2\sqrt{\lambda_{\max}(P)}\delta_d \quad (21)$$

Sustituyendo (21) en (20) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sqrt{V(\tilde{x}(t), t)} &\leq -a_{\theta_L} \sqrt{V(\tilde{x}(t), t)} \\ &\quad + b_{\theta_L} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\tilde{x}(s), s)} ds \\ &\quad + c_{\theta_L} \end{aligned} \quad (22)$$

Es importante resaltar que de acuerdo al Teorema 1, el valor máximo del diámetro de muestreo $\Delta_{\bar{M}}$ satisface la siguiente condición:

$$\Delta_{\bar{M}} < \frac{a_{\theta_L}}{b_{\theta_L}} = \frac{\mu}{\sigma \|L\| \|A\|} \triangleq \chi_{\theta_L} \quad (23)$$

Aplicando el Lema 2.1 propuesto en (Bouraoui et al., 2015), con $a_\mu = a_{\theta_L}, b_\mu = b_{\theta_L}, c_\mu = c_{\theta_L}$, resulta:

$$\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}}) = (a_{\theta_L} - b_{\theta_L} \Delta_{\bar{M}}) e^{a_{\theta_L} \Delta_{\bar{M}}} \quad (24)$$

Por lo tanto, se obtiene:

$$\begin{aligned} \sqrt{V(\tilde{x}(t), t)} &\leq e^{-\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}})t} \sqrt{V(\tilde{x}(0))} \\ &\quad + c_{\theta_L} \Delta_{\bar{M}} \frac{2 - e^{-\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}})\Delta_m}}{1 - e^{-\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}})\Delta_m}} \end{aligned} \quad (25)$$

Regresando a términos del error de observación $\tilde{x}(t)$:

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}(t)\| &\leq \sigma e^{-\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}})t} \|\tilde{x}(0)\| \\ &\quad + \frac{c_{\theta_L} \Delta_{\bar{M}}}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} \frac{2 - e^{-\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}})\Delta_m}}{1 - e^{-\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}})\Delta_m}} \end{aligned} \quad (26)$$

Sustituyendo (21), lo anterior queda:

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}(t)\| &\leq \sigma e^{-\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}})t} \|\tilde{x}(0)\| \\ &+ 2\Delta_{\bar{M}} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \delta_d \frac{2 - e^{-\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}})\Delta_m}}{1 - e^{-\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}})\Delta_m}} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\leq \sigma e^{-\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}})t} \|\tilde{x}(0)\| + N_{\theta_L}(\Delta_m, \Delta_{\bar{M}}) \delta_d \quad (28)$$

con:

$$N_{\theta_L}(\Delta_m, \Delta_{\bar{M}}) = 2\sigma\Delta_{\bar{M}} \frac{2 - e^{-\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}})\Delta_m}}{1 - e^{-\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}})\Delta_m}} \quad (29)$$

De este análisis, es claro que la señal de error de observación converge a un valor acotado que depende de las incertidumbres δ_d y de la cota del tiempo de muestreo $\Delta_{\bar{M}}$ dado que este se encuentra en (24) y en (29). Con esto se concluye la demostración del Teorema 1. ■

4. RESULTADOS

Para evaluar el funcionamiento del observador propuesto (2), se aplica al modelo estructural tipo edificio de dos pisos presentado en Aguilar-Álvarez et al. (2023), mostrado a continuación:

$$\mathcal{SYS} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Dd(t) \\ y(t_k) = Cx(t_k) = x^1(t_k) \end{cases} \quad (30)$$

con:

$$A = \begin{bmatrix} 0_{p \times p} & I_{p \times p} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C_s \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} \\ I_{2 \times 2} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}^T$$

donde el vector de estado es $x = [x^{(1)} \quad x^{(2)}]^T \in \mathbb{R}^n$ con $n = 4$. El primer estado representa los desplazamientos de los pisos $x^{(1)} = [z_1 \quad z_2] \in \mathbb{R}^p$, con $p = 2$, y el segundo estado está conformado por las velocidades respecto a la posición inicial $x^{(2)} = [z_3 \quad z_4] \in \mathbb{R}^p$. Se considera como salidas del sistema las posiciones de cada piso, estas salidas están solo disponibles en instantes de tiempo, $y(t_k) = x^1(t_k) \in \mathbb{R}^p$. Es importante el resaltar que las salidas son muestreadas a diferentes periodos de muestreo. En la Fig. 1 se muestran las salidas del sistema con diferentes periodos de muestreo $y(t_k) = x^1_1(t_k)$, $\Delta_{M_1} = 0.01s$ y $y(t_k) = x^1_2(t_k)$, $\Delta_{M_2} = 0.005s$. La señal sísmica se representa como \tilde{x}_g y se considera como la incertidumbre del sistema, se expresa como $d = [d \quad d]^T = [\tilde{x}_g \quad \dot{\tilde{x}}_g]^T$, para respetar las dimensiones de las matrices. La incertidumbre es una señal acotada respetando la suposición **A2**. En este caso, el sistema será autónomo debido a que no se tiene una entrada u . Las matrices M , C_s y K son respectivamente la masa, la constante de amortiguamiento y la constante de resorte, las cuales están definidas como:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, C_s = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

Los parámetros del sistema son: $m_1 = 3.17 \text{ kg}$, $m_2 = 4.609 \text{ kg}$, $k_1 = 9199.834 \text{ N/m}$, $k_2 = 7531.628 \text{ N/m}$, $c_1 = 7.388 \text{ Ns/m}$, $c_2 = 6.834 \text{ Ns/m}$. Las condiciones iniciales del sistema son $x(0) = [0, 0, 0, 0]^T$, las condiciones iniciales del observador son $\hat{x}(0) = [0.001, 0.001, 0.05, 0.05]^T$, $\eta(0) = [0, 0]^T$. La ganancia del observador se obtiene resolviendo la LMI presentada en el Teorema 1 con el Toolbox

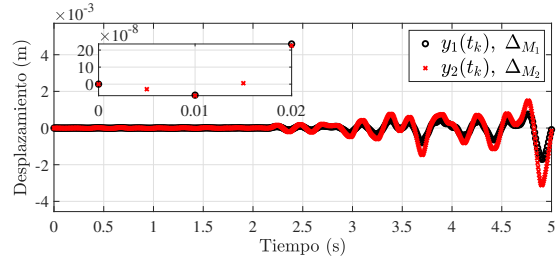


Fig. 1. Salidas disponibles a diferentes periodos de muestreo.

YALMIP para MATLAB, con la cual se obtienen las siguientes matrices:

$$P = 1 \times 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.3290 & 0.0054 & -0.0009 & 0.0000 \\ 0.0054 & 0.3381 & 0.0000 & -0.0009 \\ -0.0009 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & -0.0009 & -0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.0869 & -0.0010 & -0.0003 & 0.0001 \\ -0.0000 & 0.0858 & 0.0001 & -0.0001 \end{bmatrix},$$

Despejando la ganancia del observador L se obtiene:

$$L = P^{-1}R^T = 1 \times 10^3 \begin{bmatrix} 0.2656 & 0.0076 \\ 0.0021 & 0.2731 \\ 0.5287 & 4.2597 \\ 3.3555 & 7.0439 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

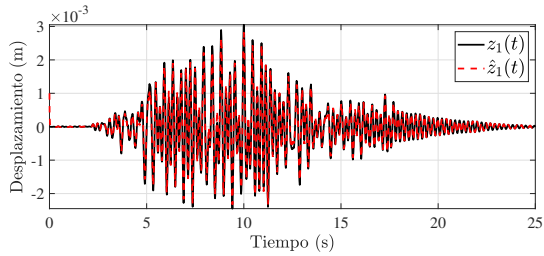
En las Fig. 2-3 se muestra la estimación de los desplazamientos de cada piso y de las velocidades respectivamente por medio del observador. En la Fig. 4 se muestra la norma del error de observación. En esta figura se muestran claramente los dos tipos de convergencia. Durante los primeros segundos, en donde el sismo no provoca ningún movimiento en la estructura, se considera que el sistema no presenta ninguna incertidumbre, por lo tanto se espera una convergencia a cero. Por otro lado, cuando esta señal provoca un desplazamiento en la estructura, se considera que el sistema tiene incertidumbre, por lo que el observador converge a una región acotada.

4.1 Control basado en observador

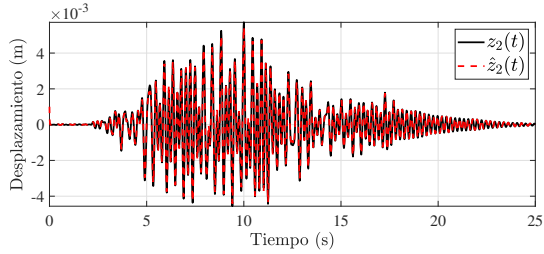
En esta sección se probará el funcionamiento de un control basado en el observador dado por (2). Para esto se considera el modelo mostrado a continuación:

$$\mathcal{SYS} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Dd(t) \\ y(t_k) = Cx(t_k) = x^1(t_k) \end{cases}, \quad (32)$$

donde A , C y D son iguales a las mostradas en la sección anterior, la matriz $B = [0_{p,p}, M^{-1}I_{p \times p}]^T$. Las salidas y_1 y y_2 son adquiridas en diferentes periodos de muestreo $\Delta_{M_1} = 0.01s$ y $\Delta_{M_2} = 0.005s$, respectivamente. El objetivo principal de este control es para que el sistema no presente movimiento cuando una señal sísmica perturbe el sistema, por lo tanto, se busca reducir la magnitud de las oscilaciones en lazo cerrado comparándolo con el sistema en lazo abierto. Para esto se aplica el control PD mostrado por Galaz-Palma et al. (2022); Aguilar-Álvarez et al. (2023), donde se obtiene la sintonización

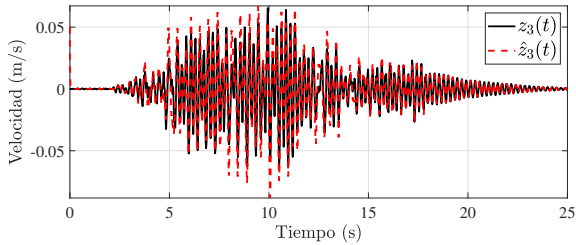


(a) Estimación de z_1

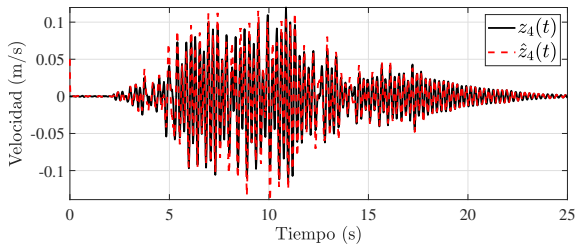


(b) Estimación de z_2

Fig. 2. Estimación del desplazamiento de cada piso.



(a) Estimación de z_3



(b) Estimación de z_4

Fig. 3. Estimación de las velocidades de desplazamiento de cada piso.

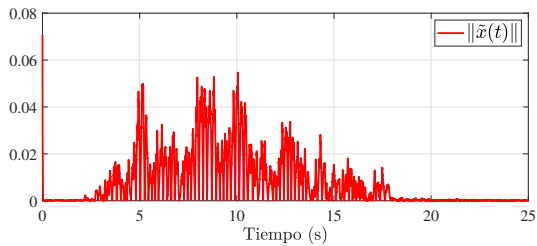
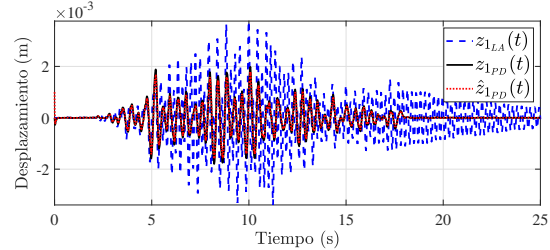
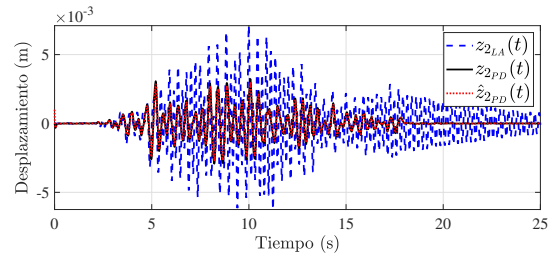


Fig. 4. Norma del error de observación $\|\tilde{x}(t)\|$.

utilizando un análisis de frecuencias. La ley de control es $u(t) = -k_p \hat{x}^1(t) - k_d \hat{x}^2(t)$, con $k_p = 1924.4$ y $k_d = 306.342$. Los estados estados son estimados por medio del observador dado por (2) con la ganancia L igual que la sección anterior.



(a) Desplazamiento de z_1



(b) Desplazamiento de z_2

Fig. 5. Desplazamientos con el control PD .

En la Fig. 5 se muestra una comparativa entre los los desplazamientos del sistema en lazo abierto y los obtenidos por parte del control basado en observador, donde se muestra que se logra reducir los desplazamientos. Es importante el resaltar que el observador no conoce la magnitud del sismo y aun así logra el objetivo de control. En la Fig. 6 se muestra la norma del error de observación $\tilde{x}(t)$ del sistema en lazo cerrado, donde el error de observación se mantiene en una región acotada debido a la incertidumbre (d) del sistema original.

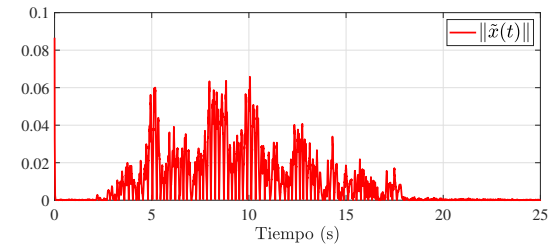


Fig. 6. Norma del error de observación $\|\tilde{x}(t)\|$ con el control.

En la Fig. 7 se muestra una comparativa entre el desempeño del control basado en observador considerando un observador tipo Luenberger (Cont) con la salidas continuas y el observador propuesto (Prop). Es evidente que se logra un desempeño parecido al continuo, denotando que esto es lo que se busca con el observador propuesto, que incluso aunque las mediciones están disponibles solo

en instantes de tiempo, la estimación es de forma continua. Es importante resaltar que a un observador Luenberger con salidas continuas le llegan salidas disponibles solo en instantes de tiempo, este no logra controlar el sistema, debido a que no tiene la capacidad de lidiar con esta problemática.

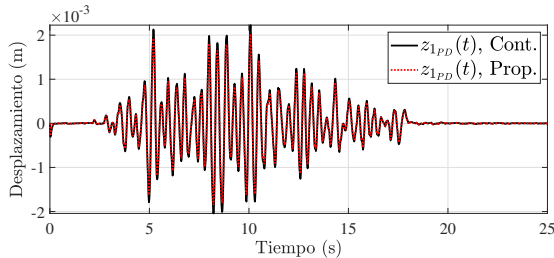


Fig. 7. Comparación del control de desplazamiento en z_1 .

5. CONCLUSIÓN

Se logró el diseño de un observador para un sistema lineal. Este observador es capaz de obtener la estimación incluso cuando las salidas son adquiridas a diferentes periodos de muestreo. Se demuestra que es posible la obtención del vector de estado de forma continua y que el error de observación convergerá a una región acotada cerca del origen. Para el caso en que no se presenten incertidumbres, el error de observación convergerá a cero. También, se demostró que la rapidez de convergencia depende del periodo de muestreo más grande. La principal limitación del observador es que se tiene que cumplir la desigualdad mostrada en el teorema 1, que hace referencia al tiempo máximo de muestreo, pero esto se puede relajar cambiando los valores de la matriz L . El observador se evaluó en simulación donde se aplicó a un modelo estructural de dos pisos. Primeramente se logró la estimación de los estados en lazo abierto del sistema. Posteriormente, se utilizó el observador para aplicar un control PD y lograr reducir los desplazamientos provocados por una señal sísmica considerada como incertidumbre.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue desarrollado en el marco de las actividades de la red internacional denominada “Red Internacional de Control y Cómputo Aplicados, RICCA” soportada por TecNM.

REFERENCIAS

Aguilar-Álvarez, P., Valencia-Palomo, G., Enríquez-Zárate, J., Morales-Valdez, J., and Hernández-González, O. (2023). Vibration control using a positive position feedback-based predictive controller applied to a one-bay three-story scaled shear frame. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, 11(3), 873–885.

- Ali, R., Malik, M.B., Malik, F.M., and Qayyum, A. (2018). A continuous reconstruction observer for sampled-data linear time varying systems. *IEEE Access*, 6, 17223–17231.
- Ali, S.A., Christen, A., Begg, S., and Langlois, N. (2016). Continuous–discrete time-observer design for state and disturbance estimation of electro-hydraulic actuator systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 63(7), 4314–4324.
- Bouraoui, I., Farza, M., Ménard, T., Abdennour, R.B., M’Saad, M., and Mosrati, H. (2015). Observer design for a class of uncertain nonlinear systems with sampled outputs—application to the estimation of kinetic rates in bioreactors. *Automatica*, 55, 78–87.
- Chen, T. and Francis, B.A. (2012). *Optimal sampled-data control systems*. Springer Science & Business Media.
- Farza, M., Bouraoui, I., Menard, T., Abdennour, R.B., and M’Saad, M. (2014). Sampled output observer design for a class of nonlinear systems. In *2014 European Control Conference (ECC)*, 312–317. IEEE.
- Galaz-Palma, R., Targui, B., Hernández-González, O., Valencia-Palomo, G., Espinoza-Molina, A., and Guerrero-Sánchez, M.E. (2022). Robust observer for input and state estimation in building structure systems. *Journal of Vibration and Control*, 10775463221117863.
- Geromel, J.C. and Gabriel, G.W. (2015). Optimal H2 state feedback sampled-data control design of Markov jump linear systems. *Automatica*, 54, 182–188.
- Hespanha, J.P., Naghshtabrizi, P., and Xu, Y. (2007). A survey of recent results in networked control systems. *Proceedings of the IEEE*, 95(1), 138–162.
- Hu, S., Yue, D., Han, Q.L., Xie, X., Chen, X., and Dou, C. (2019). Observer-based event-triggered control for networked linear systems subject to denial-of-service attacks. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 50(5), 1952–1964.
- Li, T.F. and Fu, J. (2017). Event-triggered control of switched linear systems. *Journal of the Franklin Institute*, 354(15), 6451–6462.
- Ling, C. and Kravaris, C. (2017). Multi-rate observer design for process monitoring using asynchronous inter-sample output predictions. *AIChE Journal*, 63(8), 3384–3394.
- Moarref, M. and Rodrigues, L. (2014). Observer design for linear multi-rate sampled-data systems. In *2014 American Control Conference*, 5319–5324. IEEE.
- Qayyum, A., Ali, R., Malik, M.B., Malik, F.M., and Liaquat, M. (2015). Sampled data output regulation of a linear system based on finite time impulsive observer. In *2015 XXV International Conference on Information, Communication and Automation Technologies (ICAT)*, 1–5. IEEE.
- Sferlazza, A., Tarbouriech, S., and Zaccarian, L. (2018). Time-varying sampled-data observer with asynchronous measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64(2), 869–876.