

# Estimation of multiple unknown parameters using adaptive observers for Lipschitz nonlinear systems

P.-E. Alvarado-Méndez\* C.-M. Astorga-Zaragoza\*  
A. Aguilera-González\*\* G.-L. Osorio-Gordillo\*  
J. Reyes-Reyes\*

\* *Tecnológico Nacional de México: Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Cuernavaca, Mor., México.*

\*\* *Univ. Bordeaux, ESTIA-Institute of Technology, EstiaR, F-64210 Bidart, France.*

---

## Abstract:

This work presents the design of an adaptive observer for a class of Lipschitz nonlinear systems, where the observer is able to estimate more than one unknown parameter. Thanks to this, it is possible to estimate the system states, which facilitates the monitoring of nonlinear Lipschitz systems. The proposed observer is tested for monitoring a semiactive suspension, in order to know the stiffness parameters of the tire and chassis, allowing the detection of possible anomalies in the system. To ensure observer stability, the gains are calculated by LMI obtained by Lyapunov analysis. The proposed observer is evaluated by estimating the unknown states and parameters of a mechanical system allowing monitoring of its performances.

*Keywords:* Lipschitz nonlinear system, Unknown parameter, Nonlinear adaptive observer.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Obtener información acerca de los parámetros desconocidos es una de las problemáticas que se presentan al analizar los sistemas no lineales, ya que al no conocer todos los parámetros se dificulta realizar detección y diagnóstico de fallas, supervisión, estimación, analizando diferentes escenarios posibles. Debido a esto, existe el interés por lograr estimar múltiples parámetros desconocidos. Para supervisar adecuadamente los procesos, es deseable en numerosas ocasiones la medición de todos los estados del sistema. En ocasiones esto no es posible por múltiples causas relacionadas con la disponibilidad de instrumentación para medir las variables de los procesos. En estos casos se puede diseñar un observador con el objetivo de estimar los estados y los parámetros desconocidos. Estos observadores son también conocidos como sensores virtuales.

En la literatura se encuentran diferentes formas de estimar los parámetros de los sistemas. Algunos ejemplos se muestran en Besançon (2000); Ibrir (2010); Zhang et al. (2014); Shi et al. (2022). En Besançon (2000) el autor diseña un análisis de diferentes observadores adaptables, donde explica el funcionamiento de cada uno de ellos, logrando estimar el vector de parámetros desconocidos, por medio de una separación de los estados medibles y de

los no medibles, limitando la estimación de los parámetros con la condición de que se encuentren involucrados en las ecuaciones de los estados medibles. En (Ibrir, 2010) el autor presenta un observador que logra estimar un coeficiente de entrada desconocido de un sistema no lineal de estado acotado, el diseño que proponen se valida con sistemas de entrada no lineales con parametrización lineal. En Zhang et al. (2014) los autores proponen un observador adaptable descriptivo, donde utilizan el enfoque  $\mathcal{H}_\infty$ , del cual aseguran su estabilidad por el método de Lyapunov con el fin de estimar fallas en un brazo robótico, en cual se ven afectados de manera constante los actuadores y sensores. En Shi et al. (2022) los autores estiman el estado de carga (SOC) de una batería de iones de litio, de tal manera que buscan aprovechar al máximo la capacidad y el rendimiento de la batería. Para ello proponen un filtro de Kalman extendido adaptable con el objetivo de identificar un parámetro, por medio de mínimos cuadrados recursivos.

El análisis para la estimación de múltiples parámetros desconocidos es un tema de interés. Algunos trabajos que abordan esta problemática se presentan en Vélez-Landa et al. (2019); Bonargent et al. (2021); Kozachek et al. (2023). En Vélez-Landa et al. (2019) los autores proponen un observador adaptable no lineal con el fin de estimar la tasa de crecimiento y absorción de un modelo

de cultivos de microalgas, estimando los parámetros de forma simultánea logrando converger al valor verdadero. En Bonargent et al. (2021) los autores proponen un observador adaptativo para sistemas no lineales Lipschitz para sistemas MIMO ante presencia de incertidumbres paramétricas, donde determinan su estabilidad por un análisis de Lyapunov. En Kozachek et al. (2023) los autores proponen un observador adaptable, donde parten del análisis del observador generalizado, realizando una parametrización, reduciendo el sistema no lineal a un modelo de regresión lineal.

La principal contribución de este trabajo es la estimación de múltiples parámetros desconocidos por medio del diseño de un observador adaptable utilizando el criterio  $H_\infty$ , donde se logra estimar los estados de los sistemas y se estima el vector de los parámetros desconocidos convergiendo al valor real. Dicho observador se diseña para sistemas no lineales Lipschitz, y se aplica al caso de estudio de una suspensión semiactiva con el fin de estimar la rigidez del neumático y la rigidez del chasis. El modelo y el diseño del observador se presenta en la sección 2. En la sección 3, se presenta el modelo de la suspensión semiactiva donde se aplica el observador adaptable para obtener los parámetros desconocidos  $k_t$  y  $k_s$ , y estimar sus estados. En la sección 4 se muestran los resultados obtenidos de las simulaciones y finalmente en la sección 5 se presentan las conclusiones de este artículo.

## 2. OBSERVADOR ADAPTABLE $H_\infty$

Este artículo considera el problema de estimación de estados y parámetros para una clase de sistemas no lineales Lipschitz descritos por:

$$\mathcal{S} : \begin{cases} \dot{x} = Ax + \Psi(y, u) + \Phi(x, \theta, u) \\ y = Cx \end{cases} \quad (1)$$

$$\Phi(x, \theta, u) = \Phi_1(x, u) + B\Phi_2(x, u)\theta \quad (2)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $\theta \in \mathbb{R}^q$  son los estados y el vector de parámetros desconocidos. Los vectores  $u \in \mathbb{R}^m$  y  $y \in \mathbb{R}^p$  representan las variables de entrada y salida del sistema.  $\Phi(x, \theta, u)$  es una no linealidad de Lipschitz,  $\Psi(y, u)$  es una no linealidad.  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times l}$  y  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  son las matrices de dimensiones apropiadas.

Las funciones no lineales  $\Phi_1(x, u)$  y  $\Phi_2(x, u)$  son Lipschitz con respecto a las variables de estado. En consecuencia para un valor acotado de  $\theta$ , la función no lineal  $\Phi(x, \theta, u) = \Phi_1(x, u) + B\Phi_2(x, u)\theta$  satisface la condición de Lipschitz:

$$\|\Phi(x, \theta, u) - \Phi(\hat{x}, \theta, u)\| \leq \gamma \|x - \hat{x}\| \quad (3)$$

siendo  $\gamma$  la constante Lipschitz.

El observador adaptativo  $\mathcal{H}_\infty$  propuesto para el sistema representado por las Ecs. (1) y (2) con los parámetros desconocidos  $\theta$  tiene la siguiente forma:

$$\mathcal{O} : \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \Psi(y, u) + \Phi_1(\hat{x}, u) + B\Phi_2(\hat{x}, u)\hat{\theta} \\ \quad -L(y - C\hat{x}) \\ \dot{\hat{\theta}} = \Gamma\Phi_2^T H(y - C\hat{x}), \text{ donde } \Gamma > 0, \end{cases} \quad (4)$$

donde  $\hat{x}$  y  $\hat{\theta}$  son las estimaciones de los estados y parámetros respectivamente,  $\Gamma$  es un vector definido positivo. Las matrices  $L$  y  $H$  son las ganancias del observador y deben seleccionarse de tal manera que se garantice la convergencia de los estados y parámetros estimados. El observador dado por la Ec. (4), es capaz de estimar simultáneamente las variables de estado  $x$  y los parámetros desconocidos  $\theta$ , siempre que la función dada por la Ec. (2) sea Lipschitz.

Los errores de observación se definen como:

$$e_x = x - \hat{x} \quad (5)$$

$$e_\theta = \theta - \hat{\theta} \quad (6)$$

$$r = Ce_x \quad (7)$$

Se aplica el criterio  $H_\infty$ , donde  $\beta$  es el factor de atenuación y  $r$  se muestra en la Ec. (7), obtenemos:

$$Jr = \dot{V} + r^T r \leq \beta^2 \eta^T \eta \quad (8)$$

Cumpliendo las condiciones, se establece el siguiente teorema:

*Teorema 1.* Para la Ec. (1), con  $(\Phi_1; \Phi_2)$  satisfaciendo la condición de Lipschitz, el observador dado por la Ec. (4), converge exponencialmente si existen las matrices  $P > 0$ ,  $R > 0$  y  $Q > 0$  sean simétricas definidas positivas; y si se puede elegir  $L = P^{-1}Q$  para garantizar que se satisfaga el LMI siguiente:

$$\begin{bmatrix} PA + QC + A^T P + C^T Q^T + R & P & C^T \\ P & -\beta I & 0 \\ C & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (9)$$

Por lo tanto, el estado del observador adaptativo  $\mathcal{H}_\infty$  Ec. (4) convergerá exponencialmente a una región sujeta al criterio  $H_\infty$  (8).

### 2.1 Demostración del Teorema 1

Las dinámicas de (5) y (6) son:

$$\dot{e}_x = \dot{x} - \dot{\hat{x}} \quad (10)$$

$$\dot{e}_\theta = \dot{\theta} - \dot{\hat{\theta}} \quad (11)$$

Sustituyendo a las Ecs. (1) y (4) en la Ec. (10), obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\dot{e}_x &= Ax + \Psi(y, u) + \Phi_1(x, u) + B\Phi_2(x, u)\theta \\
&\quad - [A\hat{x} + \Psi(y, u) + \Phi_1(\hat{x}, u) + B\Phi_2(\hat{x}, u)\hat{\theta} \\
&\quad - L(y - C\hat{x})] \\
\dot{e}_x &= Ax + \Psi(y, u) + \Phi_1(x, u) + B\Phi_2(x, u)\theta \\
&\quad - A\hat{x} - \Psi(y, u) - \Phi_1(\hat{x}, u) - B\Phi_2(\hat{x}, u)\hat{\theta} \\
&\quad + L(y - C\hat{x}) \\
\dot{e}_x &= B\Phi_2(\hat{x}, u)\theta + Ax + B\Phi_2(x, u)\theta + \Psi(y, u) \\
&\quad + \Phi_1(x, u) - A\hat{x} - B\Phi_2(\hat{x}, u)\hat{\theta} - \Psi(y, u) \\
&\quad - \Phi_1(\hat{x}, u) + LC(x - \hat{x}) - B\Phi_2(\hat{x}, u)\theta \\
&= (A + LC)e_x + \Phi_1(x, u) + B\Phi_2(x, u)\theta - \Phi_1(\hat{x}, u) \\
&\quad - B\Phi_2(\hat{x}, u)\theta + B\Phi_2(\hat{x}, u)\theta - B\Phi_2(\hat{x}, u)\hat{\theta} \\
&= (A + LC)e_x + \Phi(x, \theta, u) - \Phi(\hat{x}, \theta, u) \\
&\quad + B\Phi_2(\hat{x}, u)e_\theta
\end{aligned}$$

donde:

$$e_\Phi = \Phi(x, \theta, u) - \Phi(\hat{x}, \theta, u) \quad (12)$$

$$\dot{e}_x = (A + LC)e_x + e_\Phi + B\Phi_2(\hat{x}, u)e_\theta \quad (13)$$

Considerando que  $\theta$  permanece constante en  $\theta(0)$ , tenemos que  $\dot{\theta} = 0$ , por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\dot{e}_\theta &= \dot{\theta} - \dot{\hat{\theta}} = 0 - \Gamma\Phi_2(\hat{x}, u)^T H[(Cx - C\hat{x})] \\
\dot{e}_\theta &= -\Gamma\Phi_2(\hat{x}, u)^T H C e_x
\end{aligned} \quad (14)$$

Se propone la siguiente función cuadrática de Lyapunov:

$$V = e_x^T P e_x + e_\theta^T \Gamma^{-1} e_\theta, \quad P > 0, \Gamma^{-1} > 0 \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq e_x^T P \dot{e}_x + \dot{e}_x^T P e_x + e_\theta^T \Gamma^{-1} \dot{e}_\theta + \dot{e}_\theta^T \Gamma^{-1} e_\theta \\
&\leq e_x^T P [(A + LC)e_x + e_\Phi + B\Phi_2(\hat{x}, u)e_\theta] \\
&\quad + [(A + LC)e_x + e_\Phi + B\Phi_2(\hat{x}, u)e_\theta]^T P e_x \\
&\quad + e_\theta^T \Gamma^{-1} [-\Gamma\Phi_2(\hat{x}, u)^T H C e_x] \\
&\quad + [-\Gamma\Phi_2(\hat{x}, u)^T H C e_x]^T \Gamma^{-1} e_\theta \\
&\leq e_x^T P (A + LC)e_x + e_x^T P e_\Phi \\
&\quad + e_x^T P B\Phi_2(\hat{x}, u)e_\theta + e_x^T (A + LC)^T P e_x \\
&\quad + e_\Phi^T P e_x + e_\theta B^T \Phi_2(\hat{x}, u)^T P e_x \\
&\quad - e_\theta^T \Phi_2(\hat{x}, u)^T H C e_x - e_x^T \Phi_2(\hat{x}, u) H^T C e_\theta
\end{aligned} \quad (16)$$

Considerando que si se cumple la igualdad  $B^T P C = 0$ , esto implica que existe una matriz  $H$ , tal que  $B^T P = H C$  (Ekramian et al., 2013). Con esta consideración, la desigualdad anterior se simplifica a lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq e_x^T P (A + LC)e_x + e_x^T P e_\Phi \\
&\quad + e_x^T (A + LC)^T P e_x + e_\Phi^T P e_x \\
&\leq e_x^T [(A + LC)^T P + P(A + LC)]e_x + 2e_x^T P e_\Phi
\end{aligned} \quad (17)$$

Considerando que  $r = C e_x$ , y reemplazando  $\dot{V}$  en la Ec. (8):

$$\begin{aligned}
J_r &= e_x^T P (A + LC)e_x + e_x^T P e_\Phi \\
&\quad + e_x^T (A + LC)^T P e_x + e_\Phi^T P e_x \\
&\leq e_x^T [(A + LC)^T P + P(A + LC)]e_x + 2e_x^T P e_\Phi \\
&\quad + e_x^T C^T C e_x - \beta^2 \eta^T \eta \leq 0
\end{aligned} \quad (18)$$

Con base en la condición de Lipschitz generalizada:  $e_\Phi^T Q e_\Phi \leq e_x^T R e_x$ , propuesta por Ekramian et al. (2011), donde  $Q$  y  $R$  son matrices simétricas definidas positivas, obtenemos:

$$\begin{aligned}
e_x^T [P(A + LC) + (A + LC)^T P + C^T C + P Q^{-1} P + R]e_x \\
- \beta^2 \eta^T \eta \leq 0
\end{aligned} \quad (19)$$

La desigualdad anterior se ordena de forma matricial y se obtiene:

$$\begin{bmatrix} e_x \\ \eta \end{bmatrix}^T \zeta \begin{bmatrix} e_x \\ \eta \end{bmatrix} \leq 0 \quad (20)$$

donde:

$$\zeta = \begin{bmatrix} P(A + LC) + (A + LC)^T P + C^T C + P Q^{-1} P + R & P \\ P & -\beta^2 I \end{bmatrix}$$

Finalmente, la LMI resultante se obtiene simplificando el siguiente término  $Q = PL$ , obteniendo:

$$\begin{bmatrix} PA + QC + A^T P + C^T Q^T + C^T C + R & P \\ P & -\beta^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (21)$$

Ahora, aplicando el complemento de Schur, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} PA + QC + A^T P + C^T Q^T + R & P & C^T \\ P & -\beta^2 I & 0 \\ C & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

Al existir un elemento al cuadrado, se simplifica  $\beta^2 = \bar{\beta}$ , para que sea una LMI, obteniendo:

$$\begin{bmatrix} PA + QC + A^T P + C^T Q^T + R & P & C^T \\ P & -\bar{\beta} I & 0 \\ C & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (23)$$

Resolviendo la LMI se obtienen las ganancias del observador  $L$  y  $H$ , las cuales permiten la correcta estimación de los parámetros desconocidos y los estados. ■

### 3. OBSERVADOR ADAPTABLE APLICADO A UNA SUSPENSIÓN AUTOMOTRIZ SEMIACTIVA

Partiendo del sistema de una suspensión semiactiva formada por un amortiguador magnetoreológico (MR), el modelo matemático que lo describe es el siguiente (Guo et al., 2006):

$$m_s \ddot{z}_s = -k_s(z_s - z_{us}) - F_{MR} \quad (24)$$

$$m_{us} \ddot{z}_{us} = k_s(z_s - z_{us}) - k_t(z_{us} - z_r) + F_{MR} \quad (25)$$

El comportamiento dinámico de la fuerza de amortiguamiento semiactiva ( $F_{MR}$ ), con la inclusión de una señal de manipulación (corriente eléctrica) se representa de la siguiente manera:

$$F_{MR} = I f_c \rho + b_1 \dot{z}_{def} + b_2 z_{def} \quad (26)$$

donde  $\rho$  es la parte no lineal que representa la histéresis de la fuerza proporcionada por el amortiguador magnetoreológico (Martínez et al., 2016). Tal no linealidad se describe de la siguiente manera:

$$\rho = \tanh(a_1 \dot{z}_{def} + a_2 z_{def}) \quad (27)$$

las salidas están dadas por:

$$y_1 = z_s \quad (28)$$

$$y_2 = z_{us} \quad (29)$$

$$y_3 = z_s - z_{us} = z_{def} \quad (30)$$

Considere el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned} x_1 &= z_s & x_3 &= z_{us} \\ x_2 &= \dot{z}_s = \dot{x}_1 & x_4 &= \dot{z}_{us} = \dot{x}_3 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{z}_s & \dot{x}_4 &= \ddot{z}_{us} \end{aligned}$$

Entonces el modelo dado por las Ecs. (24) y (25) se pueden reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{b_2 + k_s}{m_s} x_1 - \frac{b_1}{m_s} x_2 + \frac{b_2 + k_s}{m_s} x_3 \\ &\quad + \frac{b_1}{m_s} x_4 - \frac{f_c \rho}{m_s} I \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{b_2 + k_s}{m_{us}} x_1 + \frac{b_1}{m_{us}} x_2 - \frac{b_2 + k_s + k_t}{m_{us}} x_3 \\ &\quad - \frac{b_1}{m_{us}} x_4 + \frac{f_c \rho}{m_{us}} I + \frac{k_t}{m_{us}} z_r \end{aligned} \quad (31)$$

Los vectores de estado, salida y entrada son:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} I \\ z_r \end{bmatrix}$$

donde  $x_1$  y  $x_2$  son la posición y la velocidad del chasis,  $x_3$  y  $x_4$  son la posición y la velocidad de los neumáticos,  $y_1$  es la posición del chasis,  $y_2$  es la posición de los neumáticos y  $y_3$  es la posición del pistón,  $I$  es la corriente y  $z_r$  es el perfil de la carretera.

Reescribiendo las Ecs. (31), en la forma del sistema adaptativo  $\mathcal{H}_\infty(1)$ , donde se consideran dos parámetros desconocidos que forman el vector  $\theta$ , donde  $\theta_1 = k_s$  que es el coeficiente de rigidez del chasis y  $\theta_2 = k_t$  que es el coeficiente de rigidez del neumático, obtenemos:

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix}}_x &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{b_2}{m_s} & -\frac{b_1}{m_s} & \frac{b_2}{m_s} & \frac{b_1}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{b_2}{m_{us}} & \frac{b_1}{m_{us}} & -\frac{b_2}{m_{us}} & -\frac{b_1}{m_{us}} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_x \\ &+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{f_c \rho}{m_s} \\ 0 \\ \frac{f_c \rho}{m_{us}} \end{bmatrix}}_{\Psi(y,u)} I + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{x_1}{m_s} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{x_1 - x_3}{m_{us}} & \frac{z_r - x_3}{m_{us}} \end{bmatrix}}_{\Phi(x,u)} \underbrace{\begin{bmatrix} k_s \\ k_t \end{bmatrix}}_{\theta} \end{aligned} \quad (32)$$

Las salidas del sistema son:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}}_y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_x \quad (33)$$

Para el diseño del observador del sistema (32), se comprueba que la función (2) sea Lipschitz, por lo que se obtiene la norma de sus jacobianos, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(x, u)}{\partial x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{x_1}{m_s} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{x_1 - x_3}{m_{us}} & \frac{z_r - x_3}{m_{us}} \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \Phi(x, u)}{\partial x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{m_s} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m_{us}} \end{bmatrix} \\ \left\| \frac{\partial \Phi(x, u)}{\partial x} \right\|_1 &= \frac{1}{m_{us}} \end{aligned}$$

Dado que la norma del jacobiano con respecto al vector de estado  $x$  de  $\Phi(x, u)$ , está acotada, entonces el sistema Ec. (32) es Lipschitz.

Considerando los parámetros a estimar  $k_s$  y  $k_t$ , entonces el observador Ec. (4) para el sistema Ec. (32) es:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \\ \dot{\hat{x}}_4 \end{bmatrix}}_{\dot{\hat{x}}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{b_2}{m_s} & -\frac{b_1}{m_s} & \frac{b_2}{m_s} & \frac{b_1}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{b_2}{m_{us}} & \frac{b_1}{m_{us}} & -\frac{b_2}{m_{us}} & -\frac{b_1}{m_{us}} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix}}_{\hat{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{f_c \rho}{m_s} \\ 0 \\ \frac{f_c \rho}{m_{us}} \end{bmatrix}}_{\Psi(y,u)} I \\
 &+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{x_1}{m_s} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{x_1 - x_3}{m_{us}} & \frac{z_r - x_3}{m_{us}} \end{bmatrix}}_{\Phi_2(\hat{x}, \theta, u)} \hat{\theta} - L(y - C\hat{x}) \\
 \dot{\hat{\theta}} &= \Gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{x_1}{m_s} & 0 \\ \frac{x_1 - x_3}{m_{us}} & \frac{z_r - x_3}{m_{us}} \end{bmatrix}^T H(y - C\hat{x}) \quad (34)
 \end{aligned}$$

Las matrices  $L$  y  $H$  son las ganancias del observador y deben seleccionarse para garantizar la convergencia de los estados y parámetros estimados con los reales. El único requisito para elegir la ganancia  $\Gamma$  es que sea un escalar positivo. En este caso se elige  $\Gamma = 75$ , debido a que este valor permite un adecuado tiempo de convergencia del observador. La ganancia del observador se obtiene resolviendo la LMI presentada en la Ec. (23) del Teorema 1 con el Toolbox YALMIP para MATLAB, con lo cual se obtienen las siguientes matrices:

$$L = \begin{bmatrix} 6.1077 & -5.6950 & -36.3961 \\ 33.3006 & 68.4376 & -41.8431 \\ 177.2995 & -178.0433 & -452.6916 \\ 68.4376 & -200.8580 & -315.7305 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$H = \begin{bmatrix} -0.1002 & -0.0017 & -0.0985 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.1400 & 0.1371 & -0.2771 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

#### 4. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Para evaluar el funcionamiento del observador propuesto, se analiza el comportamiento de la suspensión, se consideran los parámetros presentados en (Martínez et al., 2016), buscando estimar los parámetros desconocidos  $k_s$  y  $k_t$ . La simulación se implementó en el programa MATLAB 2019a, con un tiempo de simulación de 75 segundos. El método de integración de las ecuaciones diferenciales fue el de Euler con un paso de integración de 1 ms. Las condiciones iniciales del sistema y del observador fueron:  $x(0) = [0, 0, 0, 0]^T$  y  $\hat{x}(0) = [1, 2, 1.5, 3]^T$ .

$$I = \begin{cases} 2A & t \geq 0 \end{cases}$$

Se propone un perfil de carretera que inicia un camino recto donde luego pasa por dos topes y finalmente continúa con su camino ( $z_r$ ) como se muestra en la Fig. 1. Este perfil de suelo se considera como una entrada  $z_r$ .

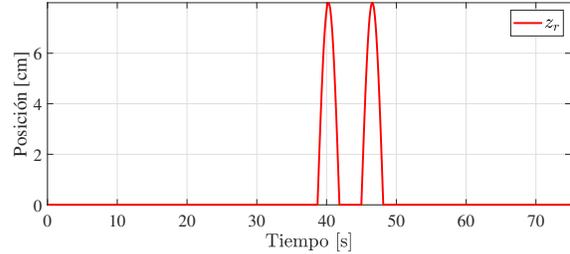


Fig. 1. Perfil de suelo.

Una vez que los datos del sistema están disponibles, se ejecuta la simulación estimando los parámetros desconocidos. Como se muestra en la Fig. 2, se observa que  $\hat{\theta}_1$  logra estimar el valor del coeficiente de rigidez del chasis  $k_s = 118,000 Nm^{-1}$  y en la Fig. 3, se observa que  $\hat{\theta}_2$  logra estimar el valor del coeficiente de rigidez de la rueda  $k_t = 260,000 Nm^{-1}$ , convergiendo adecuadamente en el tiempo.

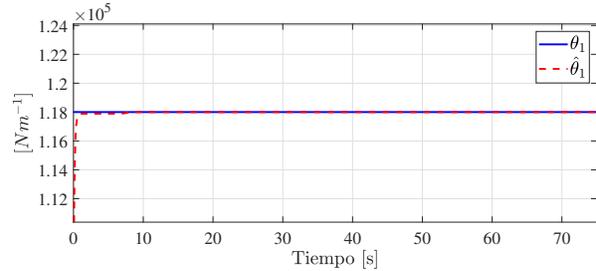


Fig. 2. Coeficiente de rigidez del chasis.

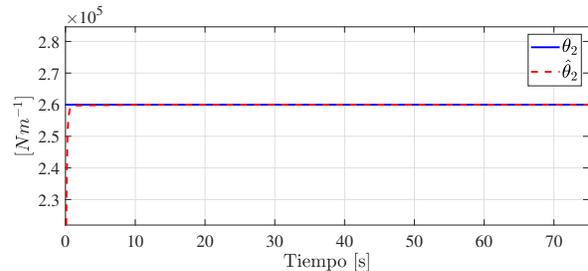


Fig. 3. Coeficiente de rigidez del neumático.

Una vez estimado los parámetros  $k_s$  y  $k_t$ , el observador es capaz de estimar la posición del chasis  $x_1$  donde se observa como se ve afectada al momento de pasar los topes en la Fig. 4, se compara la señal  $x_1$  con la  $\hat{x}_1$  estimada, afectando la comodidad y seguridad de los pasajeros al pasar los topes del camino. En la Fig 5, se muestra la posición de la llanta  $x_3$  con la  $\hat{x}_3$  estimada, logrando converger a la señal real.

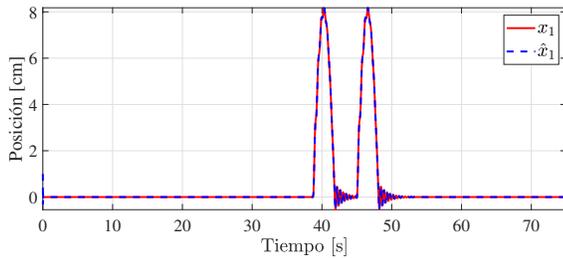


Fig. 4. Posición vertical del chasis.

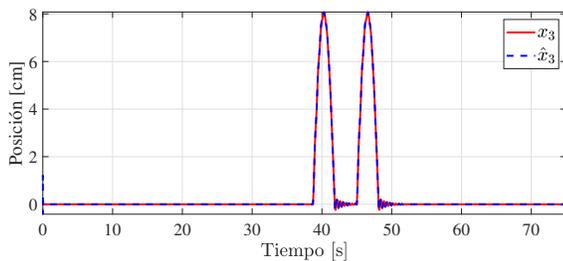


Fig. 5. Posición vertical del neumático.

Una vez obtenidas las dos posiciones observamos el comportamiento del pistón del amortiguador  $y_3$  al pasar por el perfil del suelo, donde se muestra que al momento que pasa por los topes presenta unas oscilaciones, provocando un desgaste en el amortiguador, se visualiza que el observador converge a la salida como se muestra en la Fig. 6.

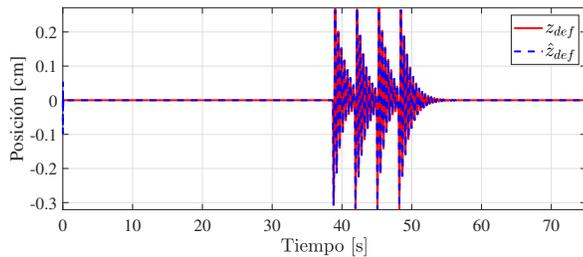


Fig. 6. Posición del pistón.

## 5. CONCLUSIÓN

Se diseñó de un observador adaptable con enfoque  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas no lineales Lipschitz. Se comprobó su funcionamiento aplicándolo a una suspensión semiactiva. Se logró estimar los dos parámetros desconocidos y al mismo tiempo los estados con el fin de monitorear el deterioro automóvil. El desempeño del observador fue evaluado mediante simulaciones, demostrando la estimación correcta de las posiciones del vehículo, la rigidez del neumático y del chasis, así como también la posición del pistón del amortiguador. Se comprobó que el observador adaptable puede estimar varios parámetros, siempre y cuando cumpla con las condiciones Lipschitz, y se obtengan las ganancias adecuadas. Como trabajo futuro se pretende

aplicar la instrumentación en los sistemas físicos, con el fin de realizar un monitoreo preventivo y así evitar las fallas que puedan presentarse.

## 6. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha desarrollado en el marco de la red internacional "Red Internacional de Control y Cómputo Aplicados" apoyada por el TecNM.

## REFERENCES

- Besançon, G. (2000). Remarks on nonlinear adaptive observer design. *Systems & Control Letters*, 41(4), 271–280.
- Bonargent, T., Menard, T., Gehan, O., and Pigeon, E. (2021). Adaptive observer design for a class of Lipschitz nonlinear systems with multirate outputs and uncertainties: Application to attitude estimation with gyro bias. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 31(8), 3137–3162.
- Ekramian, M., Hosseinnia, S., and Sheikholeslam, F. (2011). Observer design for non-linear systems based on a generalised Lipschitz condition. *IET Control Theory & Applications*, 5(16), 1813–1818.
- Ekramian, M., Sheikholeslam, F., Hosseinnia, S., and Yazdanpanah, M.J. (2013). Adaptive state observer for Lipschitz nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 62(4), 319–323.
- Guo, S., Yang, S., and Pan, C. (2006). Dynamic modeling of magnetorheological damper behaviors. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 17(1), 3–14.
- Ibrir, S. (2010). Global estimation of nonlinear systems with unknown-input coefficients. In *2010 IEEE International Symposium on Intelligent Control*, 2326–2331. IEEE.
- Kozachek, O., Bobtsov, A., and Nikolaev, N. (2023). Adaptive observer of state variables of a nonlinear time varying system with unknown constant parameters. *arXiv preprint arXiv:2305.15504*.
- Martínez, J.C.T., Varrier, S., Menéndez, R.M., and Sename, O. (2016). Control tolerante a fallas en una suspensión automotriz semi-activa. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial*, 13(1), 56–66.
- Shi, N., Chen, Z., Niu, M., He, Z., Wang, Y., and Cui, J. (2022). State-of-charge estimation for the lithium-ion battery based on adaptive extended Kalman filter using improved parameter identification. *Journal of Energy Storage*, 45, 103518.
- Vélez-Landa, L., Hernández de León, H., Astorga-Zaragoza, C., Bermúdez-Hernández, J., López-Estrada, F., and Adam-Medina, M. (2019). Observador adaptable para la estimación simultánea de parámetros en cultivos de microalgas.
- Zhang, J., Swain, A.K., and Nguang, S.K. (2014). Robust  $\mathcal{H}_\infty$  adaptive descriptor observer design for fault estimation of uncertain nonlinear systems. *Journal of the Franklin Institute*, 351(11), 5162–5181.