

High-gain observer-based predictor for a flexible joint robot with input delay^{*}

Bryan Rojas-Ricca^{*} Fernando Castaños^{*} Sabine Mondié^{*}
Rubén Garrido^{*}

^{} Departamento de Control Automático, CINVESTAV-IPN, Av. Instituto Politécnico Nacional 2508, Col. San Pedro Zacatenco, Gustavo A. Madero, C.P. 07360, Ciudad de México, México (e-mail: bryan.rojas@cinvestav.mx).*

Abstract: This article presents the prediction problem for uniformly observable nonlinear systems with input delay. The prediction problem is addressed using high-gain observer-based predictors. A modified Lyapunov-Krasovskii functional is used to analyze the exponential convergence of the prediction error. The predictor design and tuning are illustrated through a flexible joint robot with input delay.

Keywords: Delay systems, Input-to-State Stability, Nonlinear observers, Lyapunov methods, Application of nonlinear analysis and design.

1. INTRODUCCIÓN

La teoría de sistemas con retardos permite representar, analizar y controlar sistemas que involucran fenómenos de transporte y propagación mediante ecuaciones funcionales diferenciales. Esta clase de sistemas aparecen con frecuencia en diversas áreas de la ingeniería, como por ejemplo, en teleoperación (Nuño et al., 2009); en biología (Borri et al., 2017) o epidemiología (Castaños and Mondié, 2021), por mencionar algunos. Uno de los principales desafíos en el análisis de sistemas con retardos es que son infinito-dimensionales, por lo que es natural plantear la siguiente pregunta: ¿es posible aplicar las herramientas tradicionales para sistemas sin retardos, que son finito dimensionales, a los sistemas con retardos?. Por ejemplo, el análisis de estabilidad de Lyapunov-Krasovskii y el de Lyapunov-Razumikhin son una extensión a sistemas con retardos de la teoría de Lyapunov del caso sin retardos, sin embargo, una limitante de estas extensiones de la teoría de Lyapunov es que se obtienen criterios de estabilidad muy conservativos (Fridman, 2014; Kharitonov, 2013).

En teoría de control es común encontrar leyes de control que requieran la retroalimentación del estado completo, sin embargo, disponer de este no siempre es posible en la práctica. Para remediar este problema se emplean observadores, que reconstruyen el estado a partir de la entrada y la salida. En este contexto se supone que la entrada y la salida están disponibles en el instante de tiempo que se requieren pero, ¿qué pasa cuando no es el caso y la entrada o la salida tienen retardos?. A este planteamiento se le conoce como el problema de

predicción del estado, que consiste en emplear predictores para reconstruir el estado en un instante de tiempo diferente al de las señales disponibles. Una forma de abordar este problema es considerar el retardo como una perturbación y emplear observadores de alta ganancia para reconstruir el estado (Ahmed-Ali et al., 2012; Lei and Khalil, 2016), sin embargo, esta estrategia limita el retardo a valores muy pequeños. Otro enfoque Rojas-Ricca et al. (2023), también considera un modelo de predictor basado en observadores de alta ganancia pero emplea el concepto de dominancia inducida por multiplicidad (*Multiplicity-induced-dominance*, MID) (Boussaada et al., 2020; Rojas-Ricca et al., September 27–30, 2022) para la sintonización. En este caso se diseña la ganancia del predictor considerando el retardo en el sistema, lo que resulta en condiciones menos conservativas en cuanto al retardo.

En este artículo se reexamina el problema de predicción del estado para sistemas no lineales uniformemente observables con retardo a la entrada basado en observadores de alta ganancia. Se introduce un análisis de estabilidad empleando una funcional de Lyapunov-Krasovskii modificada para determinar la convergencia exponencial del error de predicción. Se presenta el diseño del predictor para un robot de un grado de libertad con junta flexible y con retardo en la entrada para ilustrar el desempeño del predictor propuesto.

En la Sección 2, se presenta el observador de alta ganancia desde el punto de vista de homogeneidad ponderada. En la Sección 3, se emplea el enfoque de Lyapunov-Krasovskii con una funcional modificada para establecer condiciones suficientes para la convergencia exponencial

^{*} This work was supported by Project Conacyt A1-S-24796.

del error de predicción. En la Sección 4, se presenta el diseño y sintonización del predictor propuesto para el eslabón con junta flexible. En la Sección 5 se encuentran los comentarios finales de este trabajo.

2. PRELIMINARES Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El problema de predicción del estado puede enunciarse como:

Problema 2.1. Encontrar un estado estimado $\hat{x}(t)$ de $x(t + \tau)$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{x}(t) - x(t + \tau)) = 0,$$

empleando sólo la entrada $u \in \mathbb{R}^m$ y la salida $y \in \mathbb{R}$ del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))u(t - \tau), \\ y(t) &= h(x(t)) \end{aligned} \quad (1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el estado, y $f, g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ y $h : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ son funciones no lineales.

Note que el problema de predicción con $\tau = 0$ se reduce al problema de observación, el cual puede ser resuelto eficazmente mediante observadores de alta ganancia. A continuación se presenta un breve repaso del observador de alta ganancia desde el punto de vista de homogeneidad ponderada (Bacciotti and Rosier, 2005).

Dados un vector $x \in \mathbb{R}^n$, un vector de pesos $r = [r_1, \dots, r_n]$ con $r_i \in \overline{\mathbb{R}}_+$, $i = 1, \dots, n$ y una ganancia escalar $\lambda > 0$ se tiene que

- La familia de dilataciones $\Lambda_\lambda^r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se define como

$$\Lambda_\lambda^r(x) = [\lambda^{r_1}x_1 \ \dots \ \lambda^{r_n}x_n]^\top.$$

- Una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es r -homogénea de grado $d \in \mathbb{R}$ si

$$V(\Lambda_\lambda^r(x)) = \lambda^d \cdot V(x).$$

- Un campo vectorial $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice que es r -homogéneo de grado $d \in \mathbb{R}$ si

$$f(\Lambda_\lambda^r(x)) = \lambda^d \cdot \Lambda_\lambda^r(f(x)). \quad (2)$$

Sea el sistema (1) con $\tau = 0$ uniformemente observable (Gauthier and Bornard, 1981), entonces, existe un difeomorfismo $\Gamma : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ que permite expresar el sistema (1) en la siguiente forma canónica (Gauthier et al., 1992):

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + \varphi(z, u) \\ y_z &= Cz \end{aligned} \quad (3)$$

donde $z \in \mathbb{R}^n$, $y_z \in \mathbb{R}$ son el estado y la salida en las nuevas coordenadas, con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ un bloque de Jordan de valor propio cero, $C = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$, y φ una función no lineal triangular en z y afín en u , es decir:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial z_i}(z, u) = 0,$$

para cualquier $j \geq i + 1$, $1 \leq i, j \leq n$. Si la función φ es Lipschitz con respecto a z , uniformemente con respecto a u , es decir:

$$\|\varphi(\hat{z}, u) - \varphi(z, u)\| \leq \gamma_\varphi \|\hat{z} - z\|, \quad (4)$$

entonces, el sistema (3) admite un observador de la forma (Besançon, 2007):

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + \varphi(\hat{z}, u) + \Lambda_\lambda^r(L \cdot (y_z - C\hat{z})), \quad (5)$$

con $r = [1, \dots, n]$. Note que el estado estimado en las coordenadas originales es $\hat{x} = \Gamma^{-1}(\hat{z})$, de modo que si $\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{z} - z) = 0$ entonces también $\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{x} - x) = 0$. Aplicando el siguiente cambio de coordenadas (Corolario 1 (Rojas-Ricca et al., 2023)):

$$\varepsilon(\tilde{t}) = \Lambda_{\lambda^{-1}}^r(e(\lambda^{-1}\tilde{t})),$$

donde $e = \hat{z} - z$ y $\tilde{t} = \lambda t$, se tiene que la dinámica del error de observación es

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(\tilde{t}) &= (A - LC)\varepsilon(\tilde{t}) \\ &\quad + \lambda^{-1} \cdot \Delta\Phi_\lambda(\varepsilon(\tilde{t}), z(\lambda^{-1}\tilde{t}), u(\lambda^{-1}\tilde{t} - \tau)), \end{aligned}$$

con

$$\Delta\Phi_\lambda(\varepsilon, z, u) = \Lambda_{\lambda^{-1}}^r(\varphi(z + \Lambda_\lambda^r(\varepsilon), u) - \varphi(z, u)).$$

Debido a (4), se tiene que $\|\Delta\Phi_\lambda(\varepsilon, z, u)\| \leq \gamma_\varphi \|\varepsilon\|$. Si se diseña la ganancia de observación L tal que $A - LC$ sea Hurwitz y λ suficientemente grande para que el término $\lambda^{-1} \cdot \Delta\Phi_\lambda(\varepsilon, z, u)$ sea dominado por $(A - LC)\varepsilon$, entonces, se garantiza que $\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0$. El sistema (5) se conoce como observador de alta ganancia (Hammouri, 2007) ya que su sintonización requiere alguna λ suficientemente grande.

Considere ahora el sistema (1) con $\tau > 0$. Debido a la propiedad de observabilidad uniforme, es posible expresarlo en la forma canónica (3). Más aún, el sistema (3) admite un predictor de la forma (Ahmed-Ali et al., 2012):

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}(t) &= A\hat{z}(t) + \varphi(\hat{z}(t), u(t - \tau)) \\ &\quad + \Lambda_\lambda^r(L \cdot (y_z(t) - C\hat{z}(t - \tau))). \end{aligned} \quad (6)$$

De la misma manera que para el caso sin retardos, tras el cambio de coordenadas (Proposición 3 (Rojas-Ricca et al., 2023)), se tiene que el error de predicción $e(t) = \hat{z}(t - h) - z(t)$ evoluciona de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(\tilde{t}) &= A\varepsilon(\tilde{t}) + LC\varepsilon(\tilde{t} - \lambda\tau) \\ &\quad + \lambda^{-1} \cdot \Delta\Phi_\lambda(\varepsilon(\tilde{t}), z(\lambda^{-1}\tilde{t}), u(\lambda^{-1}\tilde{t} - \tau)), \end{aligned} \quad (7)$$

con

$$\|\lambda^{-1} \cdot \Delta\Phi_\lambda(\varepsilon, z, u)\| \leq \lambda^{-1}\gamma_\varphi \|\varepsilon\|, \quad \forall \lambda \geq 1. \quad (8)$$

Note que $L \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda > 0$ siguen siendo los parámetros de diseño, además la no linealidad $\Delta\Phi_\lambda(\varepsilon, z, u)$ sigue estando acotada por el estado (Lema 2, (Rojas-Ricca et al., 2023)) y atenuada por λ . Sin embargo, ahora la parte lineal es un sistema con retardos, por lo que diseñar $A - LC$ Hurwitz no garantiza su estabilidad. Además, el retardo correspondiente en la nueva escala de tiempo es el producto $\lambda\tau$, por lo que escoger λ suficientemente grande ya no es factible.

Escogiendo $L = L^* := [l_1^*, \dots, l_n^*]^\top$ con

$$l_k^* = \sum_{j=n-k+1}^n \sum_{i=1}^j \left[(-1)^{n+j+k} \binom{n}{j-i} \cdot \binom{j-1}{n-k} \frac{1}{(i-1)! \sigma_*^{i-1}} \right] \sigma_*^k e^{\sigma_*}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (9)$$

donde σ_* es la raíz más a la derecha de

$$q(\sigma) := \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{n!}{j!} \sigma^j \quad (10)$$

y $\lambda = 1/\tau$, se garantiza que la parte lineal $A\varepsilon(\tilde{t}) + LC\varepsilon(\tilde{t} - \lambda\tau)$ de (7) sea exponencialmente estable (Teorema 2, (Rojas-Ricca et al., 2023)) y además $\lambda = 1/\tau$ es suficientemente grande para garantizar la estabilidad asintótica de (7). En la siguiente sección presentamos un análisis de estabilidad que introduce condiciones suficientes para garantizar la estabilidad exponencial de (7).

3. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD

Con el fin de simplificar el análisis de estabilidad note que el sistema no lineal con retardos (7) tiene la forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-1) + w(x(t)), \quad (11)$$

donde $A_1 = L^*C$, $\lambda\tau = 1$ y por (8) se puede considerar que una función $w(x(t))$ que satisface $\|w(x(t))\| \leq c_w \|x(t)\|$ puede representar a la no linealidad $\lambda^{-1}\Delta(\varepsilon, z, u)$ cuando $c_w = \lambda^{-1}\gamma_\varphi$.

A continuación se emplea un análisis de estabilidad para establecer condiciones suficientes y determinar que el sistema (7) es exponencialmente estable. Se define $D[-1, 0]$ como el espacio de Banach de funciones absolutamente continuas $x_{t_0} : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\dot{x}_{t_0} \in L_2(-1, 0)$ (el espacio de funciones cuadradas integrables) con la norma:

$$\|x_{t_0}\|_D := \|x_{t_0}\|_\tau + \left[\int_{t_0-1}^{t_0} \|\dot{x}(s)\|^2 ds \right]^{1/2},$$

donde $\|x_{t_0}\|_\tau = \max_{\theta \in [-1, 0]} \|x_{t_0}(\theta)\|$ es la norma uniforme estándar.

Definición 3.1. (Definición 4.1 (Fridman, 2014)). Se dice que las trayectorias del sistema (11) son exponencialmente estables, si existen constantes positivas δ y β tales que

$$\|x(t)\| \leq \beta e^{-\delta(t-t_0)} \|x_{t_0}\|_D,$$

para todo $t \geq t_0$.

Considere la siguiente funcional de Lyapunov-Krasovskii modificada:

$$V(t, x_t) = x^\top(t)Px(t) + \int_{t-1}^t e^{2\delta(s-t)} x^\top(s)Sx(s)ds + \int_{-1}^0 \int_{t+\theta}^t e^{2\delta(s-t)} \dot{x}^\top(s)R\dot{x}(s)dsd\theta. \quad (12)$$

Derivando (12) con respecto al tiempo y a la derivada sumándole $2\delta x^\top(t)Px(t)$ a ambos lados, además sumando

y restando $\|w(x(t))\|^2$ del lado derecho, se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x_t) + 2\delta V(t, x_t) &\leq \dot{x}^\top(t)Px(t) + x^\top(t)P\dot{x}(t) \\ &\quad + 2\delta x^\top(t)Px(t) + x^\top(t)Sx(t) + \dot{x}^\top(t)R\dot{x}(t) \\ &\quad - e^{2\delta} x^\top(t-1)Sx(t-1) - w^\top(x(t))w(x(t)) \\ &\quad + c_w^2 x^\top(t)x(t) - \int_{-1}^0 e^{2\delta\theta} \dot{x}^\top(t+\theta)R\dot{x}(t+\theta)d\theta. \end{aligned} \quad (13)$$

Para acotar el último término de (13), se considera un cambio de variable en los límites de la integral $s = t + \theta$ y por la desigualdad de Jensen, se obtiene

$$- \int_{t-1}^t e^{2\delta(s-t)} \dot{x}^\top(s)R\dot{x}(s)ds \leq -e^{-2\delta} [x^\top(t) - x^\top(t-1)] R [x(t) - x(t-1)]. \quad (14)$$

Por lo tanto, al reemplazar (14) en (13) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x_t) + 2\delta V(t, x_t) &\leq 2x^\top(t)P\dot{x}(t) + 2\delta x^\top(t)Px(t) \\ &\quad + c_w^2 x^\top(t)x(t) - w^\top(x(t))w(x(t)) + x^\top(t)Sx(t) \\ &\quad - e^{2\delta} x^\top(t-1)Sx(t-1) + \dot{x}^\top(t)R\dot{x}(t) \\ &\quad - e^{-2\delta} [x^\top(t) - x^\top(t-1)] R [x(t) - x(t-1)]. \end{aligned} \quad (15)$$

Ahora, considerando el siguiente término nulo basado en el método descriptor (Fridman, 2014):

$$0 = 2 [x^\top(t)P_2^\top + \dot{x}^\top(t)P_3^\top + w^\top(x(t))P_4^\top] \cdot [-\dot{x}(t) + Ax(t) + A_1x(t-1) + w(x(t))], \quad (16)$$

sumando (16) a (15) y definiendo

$$\xi(t) = [x^\top(t), \dot{x}^\top(t), x^\top(t-1), w^\top(x(t))]^\top,$$

se obtiene que

$$\dot{V}(t, x_t) + 2\delta V(t, x_t) \leq \xi^\top(t)W\xi(t) \quad (17)$$

para todo $\xi(t) \neq 0$ y todo $t \geq t_0$, donde W es una matriz simétrica, definida como sigue:

$$W = \begin{bmatrix} W_{1,1} & W_{1,2} & 2e^{-2\delta}R + P_2^\top A_1 & P_2^\top + A^\top P_4 \\ * & W_{2,2} & P_3^\top A_1 & P_3^\top - P_4 \\ * & * & -e^{-2\delta}(S + R) & A_1^\top P_4 \\ * & * & * & P_4^\top + P_4 - I_n \end{bmatrix},$$

con

$$W_{1,1} = P_2^\top A + A^\top P_2 + S - e^{-2\delta}R + 2\delta P + c_w^2 I_n$$

$$W_{1,2} = P - P_2^\top + A^\top P_3$$

$$W_{2,2} = -P_3^\top - P_3 + R.$$

Esto permite plantear condiciones suficientes para determinar si las soluciones de (11) son exponencialmente estables.

Considere el siguiente resultado:

Teorema 3.1. Sea $\delta > 0$ una constante positiva dada, si existen matrices $P > 0$, $S > 0$, $R > 0$, $P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con P_2, P_3, P_4 libres, tales que la desigualdad lineal matricial

$$W < 0 \quad (18)$$

es factible, entonces la solución del sistema (11) es exponencialmente estable.

Demostración. Note que si la desigualdad lineal matricial (18) es factible para alguna $\delta > 0$ dada, de (17) se sigue que

$$\dot{V}(t, x_t) + 2\delta V(t, x_t) \leq \xi^\top(t) W \xi(t) \leq 0,$$

lo que nos permite expresar la siguiente desigualdad:

$$V(t, x_t) \leq e^{-2\delta(t-t_0)} V(t_0, x_{t_0}).$$

Note que $V(t, x_t)$ satisface la siguiente cota inferior:

$$\lambda_{\min}(P) \|x(t)\|^2 \leq V(t, x_t), \quad (19)$$

Además, se puede encontrar una cota superior para $V(t_0, x_{t_0})$ al analizar cada término de $V(t, x_t)$; el primero satisface

$$x^\top(t) P x(t) \leq \lambda_{\max}(P) \|x(t)\|^2;$$

Del segundo término se tiene que

$$\int_{t-1}^t e^{2\delta(s-t)} x^\top(s) S x(s) ds \leq \lambda_{\max}(S) \|x_t\|_\tau^2 \int_{t-1}^t e^{2\delta(s-t)} ds.$$

Desarrollando la integral y considerando que $1 - e^{-2\delta} \leq 1$, se tiene

$$\int_{t-1}^t e^{2\delta(s-t)} x^\top(s) S x(s) ds \leq \frac{\lambda_{\max}(S)}{2\delta} \|x_t\|_\tau^2.$$

De manera similar, el tercer término satisface la desigualdad

$$\int_{-1}^0 \int_{t+\theta}^t e^{2\delta(s-t)} \dot{x}^\top(s) R \dot{x}(s) ds d\theta \leq \lambda_{\max}(R) \int_{-1}^0 \int_{t+\theta}^t e^{2\delta(s-t)} \|\dot{x}(s)\|^2 ds d\theta,$$

considerando que $e^{2\delta(s-t)} \leq 1$ para todo $s \in [t-1, t]$, se tiene que

$$\int_{-1}^0 \int_{t+\theta}^t e^{2\delta(s-t)} \dot{x}^\top(s) R \dot{x}(s) ds d\theta \leq \lambda_{\max}(R) \int_{t-1}^t \|\dot{x}(s)\|^2 ds.$$

Por lo tanto, $V(t_0, x_{t_0})$ puede acotarse como sigue:

$$V(t_0, x_{t_0}) \leq \lambda_{\max}(P) \|x(t_0)\|^2 + \frac{1}{2\delta} \lambda_{\max}(S) \|x_{t_0}\|_\tau^2 + \lambda_{\max}(R) \int_{t_0-1}^{t_0} \|\dot{x}(s)\|^2 ds. \quad (20)$$

De (19) y (20) se tiene que

$$\|x(t)\|^2 \leq \left(\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \|x(t_0)\|^2 + \frac{\lambda_{\max}(S)}{2\delta \lambda_{\min}(P)} \|x_{t_0}\|_\tau^2 + \frac{\lambda_{\max}(R)}{\lambda_{\min}(P)} \int_{t_0-1}^{t_0} \|\dot{x}(s)\|^2 ds \right) e^{-2\delta(t-t_0)}.$$

Aplicando la raíz cuadrada a ambos lados de la desigualdad anterior (y dado que $\sqrt{a+b+c} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a, b, c \geq 0$), se obtiene

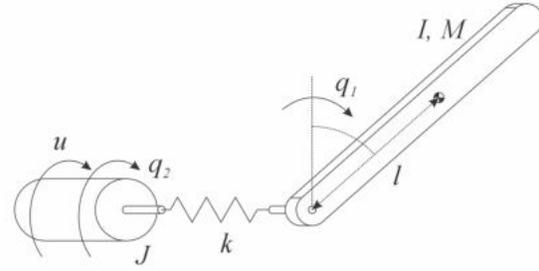


Fig. 1. Modelo de un robot de un grado de libertad con junta flexible.

$$\|x(t)\| \leq \left(\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \|x(t_0)\| + \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(S)}{2\delta \lambda_{\min}(P)}} \|x_{t_0}\|_\tau + \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(R)}{\lambda_{\min}(P)}} \left[\int_{t_0-1}^{t_0} \|\dot{x}(s)\|^2 ds \right]^{1/2} \right) e^{-\delta(t-t_0)}.$$

Definiendo

$$\beta := \max \left\{ \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} + \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(S)}{2\delta \lambda_{\min}(P)}}, \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(R)}{\lambda_{\min}(P)}} \right\},$$

puede concluirse que las trayectorias de (11) están acotadas por

$$\|x(t)\| \leq \beta e^{-\delta(t-t_0)} \|x_{t_0}\|_D.$$

4. ESLABÓN CON JUNTA FLEXIBLE

Para ilustrar la metodología propuesta y su utilidad para compensar el retardo en la entrada, se presenta el siguiente ejemplo ilustrativo. Se considera el modelo un robot con un eslabón y una junta flexible, además para el caso sin retardos se considera que existe una ley de control que estabiliza al lazo cerrado. Se muestra el deterioro de la estabilidad debido al retardo en la entrada y como se recupera dicha estabilidad al incluir un predictor sintonizado con la metodología propuesta.

Al aplicar el formalismo de Euler-Lagrange al modelo de la Figura 1 se obtiene las ecuaciones del movimiento:

$$\begin{aligned} I\ddot{q}_1(t) + Mgl \sin(q_1(t)) + k(q_1(t) - q_2(t)) &= 0 \\ J\ddot{q}_2(t) + k(q_2(t) - q_1(t)) &= u(t-h), \end{aligned} \quad (21)$$

donde $q_1(t)$ es la posición angular del eslabón, $q_2(t)$ es la rotación del motor; el eje del eslabón y el del motor están conectados mediante un resorte con coeficiente elástico k . La entrada de control es el par $u(t)$ y los parámetros del modelo son: la masa M , la longitud l y la inercia I del eslabón y por último la inercia rotacional J del motor.

Considerando $x_1(t) = q_1(t)$, $x_2(t) = \dot{q}_1(t)$, $x_3(t) = q_2(t)$ y $x_4(t) = \dot{q}_2(t)$, se puede escribir el sistema (21) en la forma (1) (Spong, 1990). Además, como (21) es uniformemente observable, existe un difeomorfismo $\Gamma : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ que permite transformar al sistema (21) en la forma (3) donde $\varphi(z(t), u(t-\tau)) := [0 \ 0 \ 0 \ \varphi_4(z(t), u(t-\tau))]^\top$, con

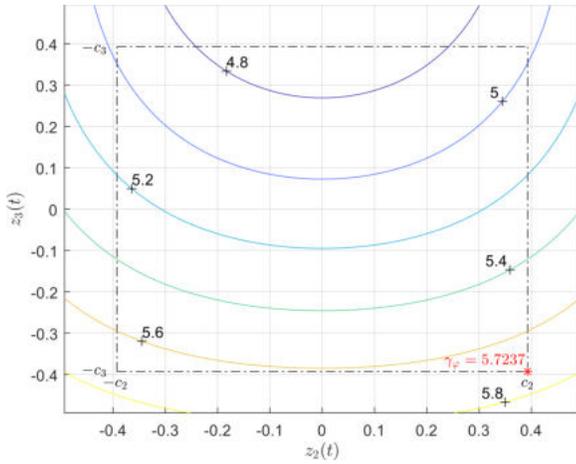


Fig. 2. Curvas de nivel para el cálculo de γ_φ en función de $|c_2|$ y $|c_3|$.

$$\varphi_4(z(t), u(t - \tau)) = \frac{Mgl}{I} \sin(z_1(t)) \left(z_2^2(t) - \frac{k}{J} \right) - \left(\frac{Mgl}{I} \cos(z_1(t)) + \frac{k}{I} + \frac{k}{J} \right) z_3(t) + \frac{k}{JI} u(t - \tau).$$

Esto se logra definiendo Γ como sigue (Marino and Spong, 1986):

$$\Gamma(x) := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -\frac{Mgl}{I} \sin(x_1) - \frac{k}{I} (x_1 - x_3) \\ -\frac{Mgl}{I} \cos(x_1) x_2 - \frac{k}{I} (x_2 - x_4) \end{bmatrix}.$$

4.1 Constante de Lipschitz de $\varphi(z, u)$

Es importante notar que $\varphi(z, u)$ es Lipschitz sólo localmente, por lo que el valor de la constante depende de como se acote el estado z . Considerando que existen constantes positivas c_2 y c_3 tales que $|z_2| \leq c_2$, $|z_3| \leq c_3$ y recordando que $\cos(z_1) \leq 1$ y $\sin(z_1) \leq 1$, para todo $z_1 \in \mathbb{R}$, una constante de Lipschitz: $\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\|_2 \leq \gamma_\varphi$, puede calcularse como

$$\gamma_\varphi^2 = \left(\frac{Mgl}{I} \right)^2 \left(c_2^2 + c_3 - \frac{k}{J} \right)^2 + 4c_2^2 \left(\frac{Mgl}{I} \right)^2 + \left(\frac{Mgl}{I} + \frac{k}{I} + \frac{k}{J} \right)^2.$$

De la expresión anterior se observa que el valor de γ_φ depende directamente de c_2 y c_3 , que corresponden a cotas sobre la velocidad y la aceleración del eslabón (Spong, 1990). Con fines ilustrativos se consideran los parámetros $M = 0.5$; $g = 9.81$; $l = 0.5$; $I = 1$; $k = 1$; $J = 1$ y las constantes $c_2 = \pi/8$, $c_3 = \pi/8$, entonces se puede obtener una constante de Lipschitz con el valor de γ_φ más grande dentro de la región acotada por $|c_2|$ y $|c_3|$ como se muestra en la figura 2.

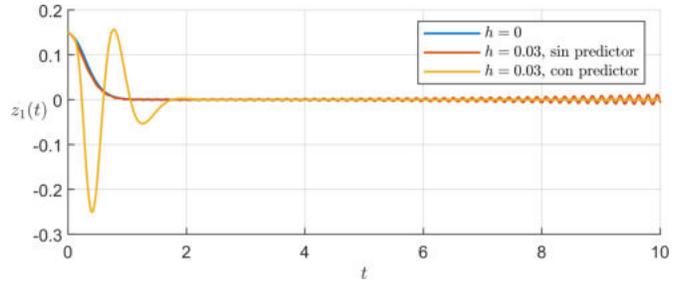


Fig. 3. Comparación de la respuesta del sistema en lazo cerrado.

4.2 Control por retroalimentación de estados

Considerando que este sistema se encuentra en la forma canónica (3) ($\tau = 0$), se puede plantear un controlador no lineal por retroalimentación de estado $u(t) = \kappa(z(t))$, con

$$\kappa(z(t)) := -\frac{JI}{k} \left(\frac{Mgl}{I} \sin(z_1(t)) \left(z_2^2(t) - \frac{k}{J} \right) - \left(\frac{Mgl}{I} \cos(z_1(t)) + \frac{k}{I} + \frac{k}{J} \right) z_3(t) + Kz(t) \right), \quad (22)$$

donde $K = [k_1, k_2, k_3, k_4]$ es la ganancia del controlador y si se escoge K de tal manera que $A - BK$ sea Hurwitz, donde $B = [0, \dots, 0, 1]^\top$, entonces el sistema en lazo cerrado (3, 22) es exponencialmente estable. Para las simulaciones se escoge $K = [10000, 4000, 600, 40]^\top$ y como se observa en la figura 3, cuando $\tau = 0$ el sistema en lazo cerrado (3, 22) es en efecto exponencialmente estable. Sin embargo, al considerar $\tau > 0$ el comportamiento se deteriora y en particular, para $\tau = 0.03$ las trayectorias en lazo cerrado se vuelven inestables a pesar del controlador.

4.3 Sintonización del predictor

Para recuperar el comportamiento deseado del sistema (3,22), se propone agregar el predictor (6) sintonizado de la siguiente forma: De la ecuación (10) se tiene que

$$q(\sigma) = \sigma^4 + 16\sigma^3 + 72\sigma^2 + 96\sigma + 24,$$

cuya raíz más a la derecha es $\sigma_* = -0.322548$. Por lo tanto, la ganancia L se escoge como

$$L = L^* = [0.5296, 0.1537, 0.0232, 0.0014]^\top.$$

Ahora, la ley de control se escoge como $u(t) = \kappa(\hat{z}(t))$, donde $\hat{z}(t)$ es el estado estimado por el predictor (6). Entonces el controlador $\kappa(\hat{z}(t))$ se comportará como $\kappa(z(t))$ con $\tau = 0$ a medida que $e(t) \rightarrow 0$. Como se observa en la figura 3 la estabilidad del lazo cerrado se recupera a pesar del retardo y en la figura 4 se observa que el error de predicción converge a cero después de una respuesta oscilatoria transitoria. En la literatura se sugiere considerar un arreglo de N subpredictores (6) en cascada (Teorema 3 (Rojas-Ricca et al., 2023)) con la ventaja de compensar retardos de mayor valor, sin embargo, la respuesta presenta más oscilaciones a medida que se agregan más subpredictores (figura 5).

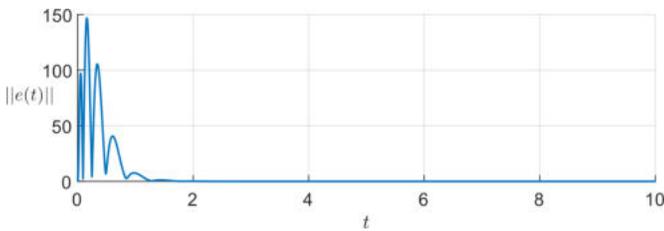


Fig. 4. Norma del error de predicción $e(t) = \hat{z}(t-h) - z(t)$.

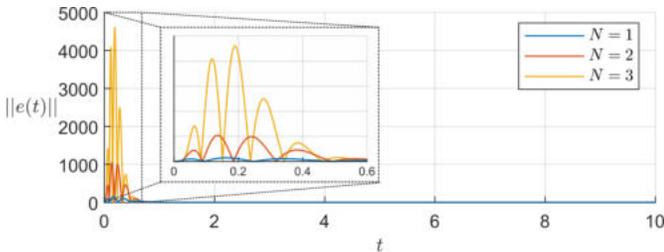


Fig. 5. Norma del error de predicción considerando la cadena de N sub-predicadores en cascada.

5. CONCLUSIONES

En este artículo se aborda el problema de predicción del estado para sistemas no lineales uniformemente observables con retardo a la entrada. Se presenta el análisis de estabilidad en el marco del enfoque de Lyapunov-Krasovskii para el error de predicción. Se enunciaron condiciones suficientes para garantizar la convergencia exponencial de dicho error. Se diseña y sintoniza el predictor mediante la metodología propuesta, para estimar el estado completo. Emplear dicho estimado en la ley de control permite recuperar la estabilidad del lazo cerrado. Se ilustra la propuesta con un robot de un grado de libertad con junta flexible, y se evalúa el uso de sub-predicadores en el esquema de predictor observador.

REFERENCIAS

- Ahmed-Ali, T., Cherrier, E., and Lamnabhi-Lagarrigue, F. (2012). Cascade high gain predictors for a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(1), 221–226. doi:10.1109/TAC.2011.2161795.
- Bacciotti, A. and Rosier, L. (2005). *Liapunov Functions and Stability in Control Theory*. Springer Berlin, Heidelberg, Netherlands. doi:10.1007/b139028.
- Besaçon, G. (2007). An overview on observer tools for nonlinear systems. In G. Besaçon (ed.), *Nonlinear Observers and Applications*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, chapter 1. Springer Berlin, Heidelberg.
- Borri, A., Cacace, F., De Gaetano, A., Germani, A., Manes, C., Palumbo, P., Panunzi, S., and Pepe, P. (2017). Luenberger-like observers for nonlinear time-delay systems with application to the artificial pancreas: The attainment of good performance. *IEEE Control Systems Magazine*, 37(4), 33–49. doi:10.1109/MCS.2017.2696759.
- Boussaada, I., Niculescu, S.I., El Ati, A., Pérez-Ramos, R., and Liviu Trabelsi, K. (2020). Multiplicity-induced-dominancy in parametric second-order delay differential equations: Analysis and application in control design. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 26, 57. doi:10.1051/cocv/2019073.
- Castaños, F. and Mondié, S. (2021). Observer-based predictor for a susceptible-infectious-recovered model with delays: An optimal-control case study. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 31(11), 5118–5133. doi:10.1002/rnc.5522.
- Fridman, E. (2014). *Introduction to Time-Delay Systems*. Birkhäuser Cham. doi:10.1007/978-3-319-09393-2.
- Gauthier, J. and Bornard, G. (1981). Observability for any $u(t)$ of a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(4), 922–926. doi:10.1109/TAC.1981.1102743.
- Gauthier, J., Hammouri, H., and Othman, S. (1992). A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6), 875–880. doi:10.1109/9.256352.
- Hammouri, H. (2007). Uniform observability and observer synthesis. In G. Besaçon (ed.), *Nonlinear Observers and Applications*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, chapter 2. Springer Berlin, Heidelberg.
- Kharitonov, V.L. (2013). *Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices*. Birkhäuser Boston. doi:10.1007/978-0-8176-8367-2.
- Lei, J. and Khalil, H.K. (2016). Feedback linearization for nonlinear systems with time-varying input and output delays by using high-gain predictors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(8), 2262–2268. doi:10.1109/TAC.2015.2491719.
- Marino, R. and Spong, M. (1986). Nonlinear control techniques for flexible joint manipulators: A single link case study. In *Proceedings. 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 3, 1030–1036. doi:10.1109/ROBOT.1986.1087613.
- Nuño, E., Basañez, L., Ortega, R., and Spong, M.W. (2009). Position tracking for non-linear teleoperators with variable time delay. *The International Journal of Robotics Research*, 28(7), 895–910. doi:10.1177/0278364908099461.
- Rojas-Ricca, B., Castaños, F., and Mondié, S. (September 27–30, 2022). Multiplicity-induced dominance in stabilization of state predictors for time-delay systems. In *17th IFAC Workshop on Time Delay Systems*, 17th IFAC Workshop on Time Delay Systems. Montreal, Canada. doi:10.1016/j.ifacol.2022.11.324.
- Rojas-Ricca, B., Castaños, F., and Mondié, S. (2023). Dominant-pole placement for predictor synthesis. Preprint, disponible en arXiv: <https://arxiv.org/abs/2306.13828>.
- Spong, M. (1990). *Control of Flexible Joint Robots: A Survey*. UILU-ENG / 22: UILU-ENG. University of Illinois, Coordinated Science Laboratory.