

Output-Feedback Stabilization of the Reaction Wheel Pendulum via Active Disturbance Rejection Control^{*}

S. Kharuf-Gutierrez^{*} A. Ferreira de Loza^{**} L. T. Aguilar^{***}
L. N. Coria^{*}

^{*} *Tecnológico Nacional de México/IT de Tijuana, Calz. del Tecnológico S/N, Tomás Aquino, 22414, Tijuana, BC, México.*

^{**} *IXM CONAHCYT, Mexico City 03940, México.*

^{***} *Instituto Politécnico Nacional, Avenida Instituto Politécnico Nacional 1310, Col. Nueva Tijuana, Tijuana, B.C., 22435, México.*

Abstract: This work presents a continuous robust control method for stabilizing the reaction wheel pendulum, despite the effect of external perturbations and using only output information. To achieve this, first, an extended high-order sliding-modes observer estimates the states and identifies the perturbations, theoretically, in finite time. Then, an active disturbance rejection scheme considers the estimated states and the identified perturbation. As a result, the closed-loop system is robust against external perturbations, and the system trajectories converge to the origin. Experimental results illustrate the performance and advantages of the presented algorithm.

Keywords: Reaction wheel pendulum, Active-disturbance rejection control, High-order sliding-modes observers.

1. INTRODUCCIÓN

El péndulo invertido de rueda inercial (PRI) es un sistema subactuado para el diseño y prueba de diferentes esquemas de control robusto, (Spong et al., 2001). La tarea de estabilizar localmente el sistema del PRI, es decir conducir los estados a la posición vertical del péndulo (el origen del sistema) es uno de los temas más estudiados. Diversos autores han propuesto múltiples estrategias de control, por ejemplo: control por modos deslizantes en Gutiérrez-Oribio et al. (2021b), linealización por retroalimentación de estados en Hernández-Guzmán y Silva-Ortigoza (2019) y la técnica de control backstepping en Teja et al. (2020). No obstante, la mayoría de estas estrategias emplean un cambio de coordenadas para reducir el modelo del PRI a solo tres estados, es decir, no consideran la posición de la rueda como un objetivo de control.

El control por modos deslizantes es una estrategia ampliamente empleada para compensar de forma teóricamente exacta el efecto de las perturbaciones, Utkin et al. (2017). Por ejemplo, en Trentin et al. (2021) se propone un

esquema basado en modos deslizantes para estabilizar un péndulo con dos ruedas inerciales. Sin embargo, los métodos de control por modos deslizantes se ven afectados por el fenómeno del chattering; el cual se refiere a oscilaciones indeseables de frecuencia y amplitud finitas. Una alternativa para atenuar el efecto del chattering y compensar perturbaciones colocadas y Lipschitz continuas es emplear los algoritmos por modos deslizantes continuos, (Chalanga et al. (2013)). Por ejemplo, en Gutiérrez-Oribio et al. (2021a) y Gutiérrez-Oribio et al. (2021b) se proponen varios esquemas de control por modos deslizantes continuos para estabilizar en tiempo finito las dinámicas del PRI, a pesar de la presencia de perturbaciones colocadas Lipschitz.

En la práctica, lo más común es disponer sólo de mediciones incompletas de los estados. Por tanto, es imprescindible diseñar observadores para estimar los estados no medidos. Además, una idea intuitiva para contrarrestar el efecto de las perturbaciones externas es identificarlas mediante un observador y retroalimentarlas a través de la ley de control para cancelar sus efectos. En este sentido, una metodología propuesta en la literatura para garantizar robustez es la de identificación y rechazo activo de perturbaciones, Han (2009). Por ejemplo, en Ramírez-Neria et al. (2019) proponen un control basado en rechazo activo de perturbaciones para estabilizar el punto de equilibrio inestable del PRI. Además, el control robusto propuesto

^{*} Los autores agradecen el apoyo al CONAHCYT (Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías): CVU 1030388, CVU 166403 y al Proyecto 1537. Al Tecnológico Nacional de México por el proyecto del cuerpo académico ITTIJ-CA-10 y la red internacional RICCA. Al Instituto Politécnico Nacional por la subvención SIP 2023-1268.

se compara con otras técnicas clásicas de control. No obstante, el esquema presentado en Ramírez-Neria et al. (2019) requiere realizar una linealización del modelo del sistema.

En el presente trabajo se desarrolla un control basado en rechazo activo de perturbaciones para estabilizar el estado completo del péndulo de rueda inercial, a pesar de la presencia de perturbaciones externas y con un conocimiento parcial del vector de estados.

En este sentido, primero, un observador por modos deslizantes de orden superior (OMDOS) estima los estados e identifica las perturbaciones, teóricamente en tiempo finito. Para la síntesis del controlador, se transforma el modelo mediante un cambio de coordenadas; posteriormente, inspirados en el enfoque propuesto por Gutiérrez-Oribio et al. (2021a), se diseña una linealización por retroalimentación de estados y se estabiliza la dinámica cero mediante el controlador robusto. El valor identificado de las perturbaciones externas se inyecta mediante el controlador, para rechazar el efecto de las mismas. Los resultados experimentales muestran la viabilidad del esquema de control propuesto.

La estructura del trabajo es la siguiente. La Sección 2 presenta el modelo dinámico y el objetivo de control. La Sección 3 presenta el diseño del OMDOS y la Sección 4 presenta el diseño del control robusto propuesto. Los experimentos realizados en el sistema real, se muestran en la Sección 5. Por último, se dan las conclusiones del trabajo en la Sección 6.

Notación: \mathbb{R} representa el conjunto de los números reales. \mathcal{Z} representa el conjunto de los números enteros. La norma inducida de una matriz $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se denota por $\|P\|$. Sea una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, con $\text{rank}(A) = m$, se representa su pseudoinversa como $A^\dagger = A^T(AA^T)^{-1}$. La operación $|b|^q \text{sign}(b)$ para cualquier $b \in \mathbb{R}$ y $q \in \mathbb{R}$ se denota como $[b]^q := |b|^q \text{sign}(b)$, en consecuencia $[b]^0 = \text{sign}(b)$.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La dinámica del péndulo de rueda inercial, tomada de Aström et al. (2007), se describe con las siguientes ecuaciones

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ f_1(x_1) \\ x_4 \\ f_2(x_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J_1 - J_2} \\ 0 \\ \frac{J_1}{J_2(J_1 - J_2)} \end{bmatrix} \left(\tau + \omega(t) \right), \quad (1a)$$

$$y(t) = [x_1, x_3]^T \quad (1b)$$

donde

$$f_1(x_1) = \frac{-h \sin(x_1)}{J_1 - J_2}, \quad f_2(x_1) = \frac{h \sin(x_1)}{J_1 - J_2},$$

con $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$, donde $x_1(t) \in \mathbb{R}$ es el ángulo del péndulo, medido en el sentido de las manecillas del reloj desde la posición vertical descendente [rad], $x_2(t) \in \mathbb{R}$ es la velocidad angular del péndulo [rad/s],

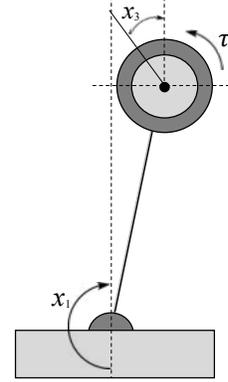


Fig. 1. Esquema del péndulo de rueda inercial.

$x_3(t) \in \mathbb{R}$ es la posición angular de la rueda [rad] y $x_4(t) \in \mathbb{R}$ es la velocidad angular de la rueda [rad/s]. Los términos J_1 , J_2 y h son parámetros físicos positivos, que dependen de las dimensiones geométricas y de la distribución de inercia del sistema. $\tau \in \mathbb{R}$ es el torque aplicado a la rueda [Nm], y $\omega(t) \in \mathbb{R}$ representa las perturbaciones externas que afectan al actuador [Nm]. Las salidas medidas son representadas por $y(t) \in \mathbb{R}^2$. Una representación esquemática del péndulo de rueda inercial se da en la Figura 1. Calculando los puntos de equilibrio del sistema (1) se obtiene: $x^* = [n\pi, 0, k, 0]^T$, $k \in \mathbb{R}$, $n \in \mathcal{Z}$. A continuación se introduce la siguiente suposición:

Suposición 1. La primera derivada de la perturbación $\dot{\omega}(t)$ existe y es acotada. Lo anterior significa que $\|\dot{\omega}(t)\| \leq d_1$, $\forall t \geq 0$; donde d_1 es una constante conocida.

La Suposición 1 limita el tipo de perturbaciones a ser consideradas, no obstante, tiene sentido físico y es razonable.

El objetivo de este trabajo es diseñar un controlador continuo y robusto para el PRI que permita estabilizar el punto de equilibrio inestable $x = [\pi, 0, k, 0]^T$, a pesar de la presencia de perturbaciones externas $\omega(t)$ y empleando solo la información medida a la salida.

3. DISEÑO DEL OBSERVADOR

Esta sección aborda el diseño del observador extendido por modos deslizantes de orden superior para estimar las velocidades $x_2(t)$ y $x_4(t)$, así como las perturbaciones externas.

Conviene señalar que el sistema (1) tiene grado relativo completo con respecto a la perturbación; en consecuencia satisface la condición de observabilidad algebraica fuerte, (Angulo et al., 2013). Entonces, es posible diseñar un observador para estimar los estados y las perturbaciones. Primeramente, se define el vector de entradas del sistema

(1) como $B = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{J_1 - J_2} \\ \frac{J_1}{J_2(J_1 - J_2)} \end{bmatrix}^T$. Considerando la Suposición 1 y con el vector de entradas B , se satisface la

siguiente desigualdad

$$\left\| \frac{d}{dt} \left(B \omega(t) \right) \right\| < \bar{L}_i, \quad \forall t \geq 0, \quad (2)$$

donde \bar{L}_i es un conjunto de constantes positivas, con $i \in \{p, r\}$. A continuación se extiende la dinámica del sistema (1); definiendo los nuevos estados $\varphi = B\omega(t)$, donde $\varphi(t) = [\varphi_p, \varphi_r]^T$. Quedando entonces el sistema (1) con la dinámica extendida como:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (3a)$$

$$\dot{x}_2 = f_1(x_1) - \frac{1}{J_1 - J_2} \tau + \varphi_p, \quad (3b)$$

$$\dot{\varphi}_p = -\frac{1}{J_1 - J_2} \dot{\omega}, \quad (3c)$$

$$\dot{x}_3 = x_4, \quad (3d)$$

$$\dot{x}_4 = f_2(x_1) + \frac{J_1}{J_2(J_1 - J_2)} \tau + \varphi_r, \quad (3e)$$

$$\dot{\varphi}_r = \frac{J_1}{J_2(J_1 - J_2)} \dot{\omega}. \quad (3f)$$

Entonces, se propone un OMDOS de la siguiente manera

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \gamma_{p1} [e_{1p}]^{\frac{2}{3}}, \quad (4a)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = \hat{\varphi}_p + \gamma_{p2} [e_{1p}]^{\frac{1}{3}} + f_1(x_1) - \frac{1}{J_1 - J_2} \tau, \quad (4b)$$

$$\dot{\hat{\varphi}}_p = \gamma_{p3} [e_{1p}]^0, \quad (4c)$$

$$\dot{\hat{x}}_3 = \hat{x}_4 + \gamma_{r1} [e_{1r}]^{\frac{2}{3}}, \quad (4d)$$

$$\dot{\hat{x}}_4 = \hat{\varphi}_r + \gamma_{r2} [e_{1r}]^{\frac{1}{3}} + f_2(x_1) + \frac{J_1}{J_2(J_1 - J_2)} \tau, \quad (4e)$$

$$\dot{\hat{\varphi}}_r = \gamma_{r3} [e_{1r}]^0, \quad (4f)$$

donde \hat{x}_1 y \hat{x}_3 representan las posiciones estimadas del péndulo y la rueda, respectivamente; mientras que \hat{x}_2 y \hat{x}_4 son las velocidades estimadas. Además, los términos $\hat{\varphi}_p(t)$ y $\hat{\varphi}_r(t)$ son los valores estimados de $\varphi_p(t) \in \mathbb{R}$ y $\varphi_r(t) \in \mathbb{R}$, respectivamente. Las variables $e_{1p} := x_1 - \hat{x}_1$ y $e_{1r} := x_3 - \hat{x}_3$ corresponden a los errores de observación. La convergencia del observador se establece en el siguiente teorema.

Teorema 1. (Cruz-Zavala y Moreno (2019)). Sea el OMDOS (4) aplicado al sistema (1), satisfaciendo la *Suposición 1*. Si las ganancias del observador se seleccionan como

$$\gamma_{i1} = 3.1 \bar{L}_i^{\frac{1}{3}}, \quad \gamma_{i2} = 5.7 \bar{L}_i^{\frac{2}{3}}, \quad \gamma_{i3} = 1.1 \bar{L}_i, \quad (5)$$

entonces, las siguientes igualdades se obtienen en un tiempo finito $t_f \geq 0$

$$\hat{x}_1 \equiv x_1, \quad \hat{x}_2 \equiv x_2, \quad \hat{\varphi}_p \equiv \varphi_p, \quad (6a)$$

$$\hat{x}_3 \equiv x_3, \quad \hat{x}_4 \equiv x_4, \quad \hat{\varphi}_r \equiv \varphi_r. \quad (6b)$$

La prueba del Teorema 1 se presenta en el Apéndice A.1. Obsérvese que se puede acceder a una estimación fiable del estado luego de un transitorio de tiempo finito. Entonces, el controlador robusto puede conectarse una vez que finaliza el transitorio del observador, y puede determinarse un valor estimado de t_f en las simulaciones. Entonces, se obtiene el estimado de la perturbación como

$$\hat{\omega}(t) = B^\dagger \hat{\varphi}(t). \quad (7)$$

4. DISEÑO DEL CONTROLADOR

En esta sección se presenta un controlador basado en la técnica de identificación y rechazo activo de perturbaciones, para tareas de regulación de posición. En este sentido se emplea el OMDOS, para estimar los estados e identificar las perturbaciones. Para ello, se asume que las igualdades en (6) son satisfechas.

Primeramente, empleando el mismo enfoque propuesto por Gutiérrez-Oribio et al. (2021a) se introduce el siguiente cambio de coordenadas

$$z_1 = J_1 x_1 + J_2 x_3, \quad z_2 = J_1 x_2 + J_2 x_4, \quad (8a)$$

$$z_3 = x_1, \quad z_4 = x_2. \quad (8b)$$

que permite transformar el modelo en (1) a una estructura cercana a la forma canónica controlable de cuarto orden. Entonces, es posible reescribir el modelo en (1) como

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad (9a)$$

$$\dot{z}_2 = -h \sin(z_3), \quad (9b)$$

$$\dot{z}_3 = z_4, \quad (9c)$$

$$\dot{z}_4 = -\frac{h \sin(z_3)}{J_1 - J_2} - \frac{1}{J_1 - J_2} \left(\tau + \omega(t) \right). \quad (9d)$$

Diseñando

$$\tau = -(J_1 - J_2) \left(\frac{h \sin(z_3)}{J_1 - J_2} + \nu \right) - \hat{\omega}, \quad (10)$$

donde $\hat{\omega}$ es el término de rechazo de perturbaciones, se obtiene el siguiente sistema

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad (11a)$$

$$\dot{z}_2 = -h \sin(z_3), \quad (11b)$$

$$\dot{z}_3 = z_4, \quad (11c)$$

$$\dot{z}_4 = \nu, \quad (11d)$$

donde el término de control ν debe ahora garantizar la estabilidad de las dinámicas del lazo cerrado (11), y se propone como un control continuo por retroalimentación de estados expresado como $\nu = -k_1 z_1 - k_2 z_2 - k_3 z_3 - k_4 z_4$ con $k_i > 0$, $i = \overline{1, 4}$. Nótese que el término $\hat{\omega}$ en (10) es la señal de perturbación identificada proveniente del observador y definida de acuerdo a (7). La Figura 2 sintetiza la metodología de rechazo activo de perturbaciones que se propone en este trabajo. Primero, el OMDOS estima los estados e identifica las perturbaciones externas. Entonces, se realiza el cambio de coordenadas del sistema y se aplica el control por rechazo activo de perturbaciones. El siguiente teorema establece la estabilidad asintótica de las dinámicas en lazo cerrado en (11).

Teorema 2. Considere el sistema presentado en (1) que satisface la Suposición 1. La ley de control robusto propuesta en (10), que incorpora los estados estimados por el OMDOS (4), asegura la convergencia exponencial local de las trayectorias del sistema en lazo cerrado al punto de equilibrio; a pesar de la presencia de perturbaciones externas ω .

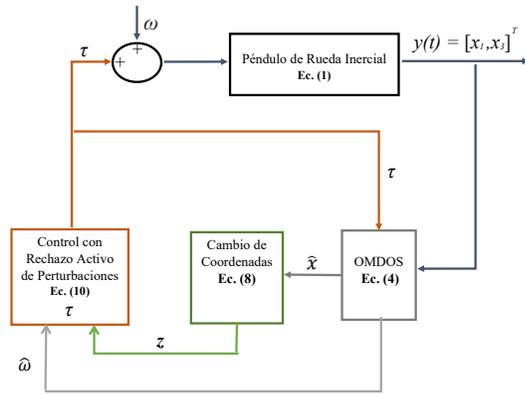


Fig. 2. Esquema del control por rechazo activo de perturbaciones.

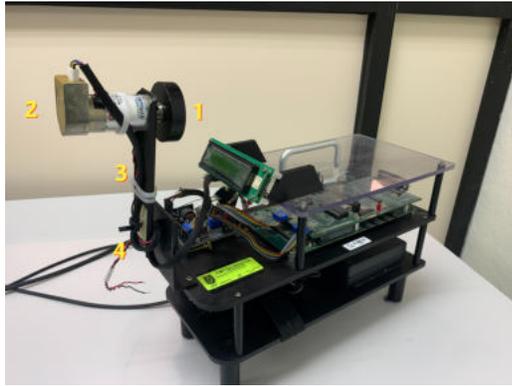


Fig. 3. Plataforma experimental de un PRI de Quanser®.

La prueba del Teorema 2 se presenta en el Apéndice A.2.

5. VALIDACIÓN EXPERIMENTAL

En esta sección se presentan los resultados experimentales para el péndulo de rueda inercial manufacturado por Quanser Inc. En la Figura 3 se aprecian la rueda (Etiqueta 1), el encoder para medir la posición angular de la rueda (Etiqueta 2), el péndulo (Etiqueta 3), y finalmente el encoder del péndulo en la Etiqueta 4. La plataforma experimental incluye una computadora personal equipada con el software dSPACE para la adquisición de datos en tiempo real. El ángulo del péndulo y de la rueda son medidos por dos encoders con una resolución de 1024 y 500 pulsos por revolución respectivamente. Dado que la plataforma solo cuenta con sensores de posición, las velocidades son estimadas mediante el OMDOS (4). Los parámetros del sistema del péndulo de rueda inercial están dados por $J_1 = 4.572 \times 10^{-3}$, $J_2 = 2.495 \times 10^{-5}$, $h = 0.4594$; mientras que las ganancias del OMDOS se ajustan como $L_r = 4 \times 10^6$ y $L_p = 2500$.

El objetivo de control es estabilizar de forma robusta la coordenada subactuada x_1 en su punto de equilibrio inestable (posición vertical hacia arriba del péndulo), a pesar de la presencia de perturbaciones externas y empleando únicamente las posiciones del sistema x_1 y x_3 . El experimento tuvo una duración de 180 [s], con un tiempo de muestreo de $t_s = 1 \times 10^{-4}$ [s], método de integración de Euler y condiciones iniciales $x_0(t_0) = [2.88, 0, 0, 0]^T$. Las ganancias del control por realimentación de estados ν en (11d) se seleccionaron como $\nu = [49.8103, 95.5408, 27.7922, 7.7836]^T$. Durante el experimento, el péndulo del sistema PRI se levanta de forma manual hasta alcanzar una región cercana al punto de equilibrio inestable. Entonces se conecta el control propuesto, una vez que halla finalizado el transitorio del observador. El sistema fue perturbado artificialmente con la siguiente señal $\omega = 0.05 \sin(t)$, $t \in [40, 180]$. El experimento cuenta con tres etapas:

- (1) Durante $0 < t \leq 40$ se aplica el controlador nominal, sin el término de rechazo de perturbaciones $\tau = -(J_1 - J_2) \left(\frac{h \sin(z_3)}{J_1 - J_2} + \nu \right)$.
- (2) Durante $40 < t \leq 90$ el control nominal se mantiene, y la dinámica actuada del sistema se perturba con la señal ω .
- (3) Durante $90 < t \leq 180$ (área sombreada) el sistema está aún perturbado, y el control robusto propuesto en (10) se conecta, haciendo que las posiciones del sistema converjan al origen.

En la parte superior de las Figuras 4 y 5 se ilustra la evolución de las variables de posición del sistema. Durante la primera etapa el control nominal estabiliza la trayectoria de los estados a una región cercana al punto de equilibrio inestable del sistema. Entonces, en la segunda etapa, el sistema es perturbado. Como resultado, el nivel de oscilaciones de la posición del péndulo y el número de vueltas de la rueda se incrementa. Finalmente, en la tercera etapa, el control robusto que incluye el término de rechazo de perturbaciones $\hat{\omega}$ se conecta. Se puede apreciar entonces una disminución apreciable en el nivel de oscilaciones de la posición de la rueda (Figura 5), así como la estabilización del péndulo en su posición vertical hacia arriba (Figura 4). Las etapas de los experimentos se resaltan mediante líneas punteadas verticales.

En la parte inferior de las Figuras 4 y 5 se ilustra la evolución de las variables de velocidad del sistema. Se aprecia como ambos estados convergen a cero cuando se conecta el control robusto. La Figura 6 muestra la señal de control generada. Se puede apreciar que cuando se conecta el control robusto se sigue obteniendo una señal de control continua, a pesar de la presencia de perturbaciones externas. Las Figuras 7 y 8 muestran los estados transformados mediante el cambio de coordenadas en (8). Se observa en ambas figuras que se consigue la estabilización de las dinámicas a pesar de la presencia de perturbaciones externas.

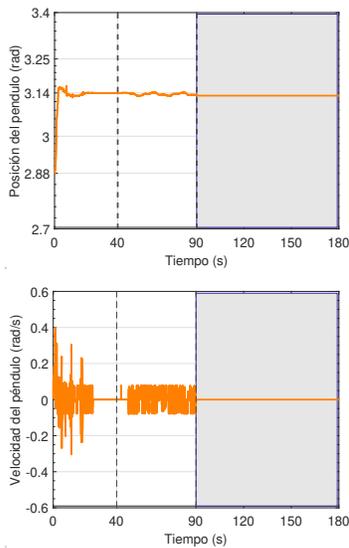


Fig. 4. Posición del péndulo (arriba) y velocidad del péndulo (abajo). La región sombreada indica que el control robusto está activo; de lo contrario, solo actúa el control nominal.

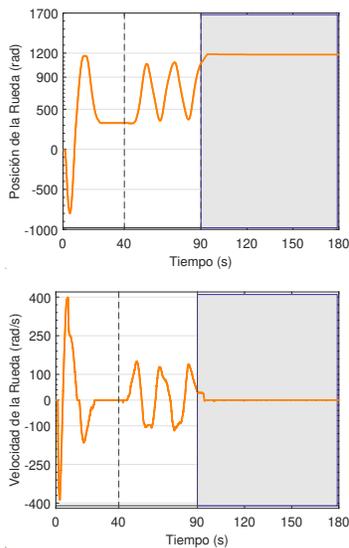


Fig. 5. Posición de la rueda (arriba) y velocidad de la rueda (abajo).

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó un control robusto para estabilizar el péndulo de rueda inercial en su punto de equilibrio inestable, considerando solo mediciones de las posiciones. La metodología de control propuesta permite rechazar las perturbaciones externas y dinámicas no modeladas presentes en el sistema. El esquema de control se obtuvo combinando una linealización por retroalimentación de estados con un esquema de identificación y compensación de perturbaciones mediante un OMDOS.

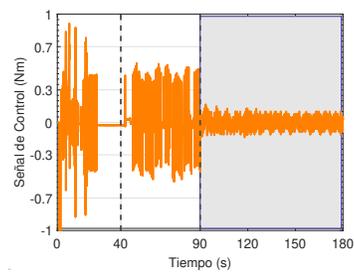


Fig. 6. Señal de control. La región sombreada indica que el control robusto está activo; de lo contrario, solo actúa el control nominal.

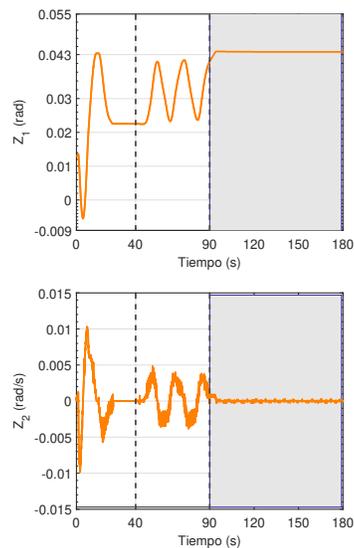


Fig. 7. Estados transformados de las posiciones del sistema (arriba) y de las velocidades (abajo).

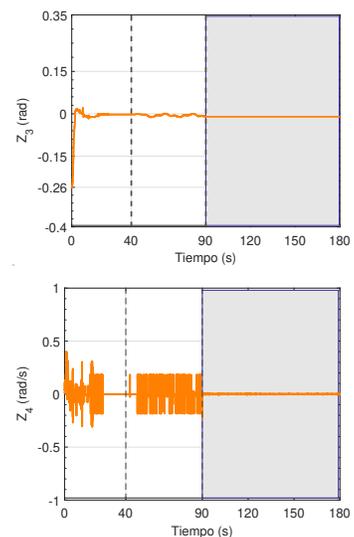


Fig. 8. Estados transformados de la posición (arriba) y velocidad (abajo) del péndulo.

La señal de control generada es continua y asegura convergencia asintótica de los estados al origen, a pesar de la presencia de perturbaciones externas. El esquema de control robusto fue validado mediante resultados experimentales. Los resultados evidencian que el esquema propuesto mejoró la dinámica del sistema en lazo cerrado.

Appendix A. PRUEBA DE LOS TEOREMAS

A.1 Prueba del Teorema 1

Considérese los errores de observación como sigue

$$\begin{aligned} e_{1p} &:= x_1 - \hat{x}_1, & e_{2p} &:= x_2 - \hat{x}_2, & e_{3p} &:= \varphi_p - \hat{\varphi}_p, \\ e_{1r} &:= x_{1a} - \hat{x}_{1a}, & e_{2a} &:= x_{2a} - \hat{x}_{2a}, & e_{3a} &:= \varphi_a - \hat{\varphi}_a. \end{aligned}$$

Diferenciando con respecto al tiempo los errores de observación y empleando (3) y (4); es posible reescribir las dinámicas del error de observación como n diferenciadores SISO

$$\dot{e}_{1j} = e_{2j} - \gamma_1 [e_{1j}]^{\frac{2}{3}}, \quad (\text{A.1a})$$

$$\dot{e}_{2j} = e_{3j} - \gamma_2 [e_{1j}]^{\frac{1}{3}}, \quad (\text{A.1b})$$

$$\dot{e}_{3j} = \dot{\varphi}_j - \gamma_3 [e_{1j}]^0, \quad (\text{A.1c})$$

con $j \in \{p, r\}$. Las soluciones de (A.1) son entendidas en el sentido de Filippov (1988). La dinámica anterior corresponde a un diferenciador de segundo orden de Levant. En Cruz-Zavala y Moreno (2019) se demuestra que seleccionando las ganancias del observador como en (5) se asegura la convergencia en tiempo finito del error de las trayectorias, es decir, $e(t) \equiv 0$, para todo $t \geq t_f$, donde $e(t) = [e_{1p}, e_{2p}, e_{3p}, e_{1r}, e_{2r}, e_{3r}]^T$. ■

A.2 Prueba del Teorema 2

El sistema transformado en (11) tiene una estructura similar a la forma canónica controlable, dado que la variable de salida z_1 tiene un grado relativo de 4 con respecto al término de control ν ; siendo una cadena de integradores, excepto por el término no lineal $-h \sin(z_3)$ en (11b). Nótese, que este término es lineal en una región cercana al punto de equilibrio inestable $z_3 = \pi$, es decir, $-h \sin(z_3) \approx h z_3$; pudiéndose reescribir entonces el sistema (11) como

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = h z_3, \quad \dot{z}_3 = z_4, \quad \dot{z}_4 = \nu. \quad (\text{A.2a})$$

Se propone el término ν como un control por realimentación de estados y expresando el lazo cerrado de forma matricial se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & -k_4 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

con el término $h = 0.4594$ y las ganancias k_1, k_2, k_3, k_4 positivas. Se propone una función candidata de Lyapunov para (A.3) de la forma $V_1(z) = z^T P z$, donde $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ y derivando con respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{V}_1(z) = z^T [PA + A^T P] z \leq -\lambda_{\min}\{Q\} \|z\|^2, \quad (\text{A.4})$$

con $A^T P + PA = -Q$, donde $Q = Q^T > 0 \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$. Así, se comprueba que $\dot{V}_1(z)$ es definida negativa, garantizándose la estabilidad exponencial al punto de equilibrio. Entonces, de acuerdo a (8), los estados $x \in \mathbb{R}^4$, también alcanzarán el origen. ■

REFERENCES

- Angulo, M.T., Fridman, L., y Moreno, J.A. (2013). Output-feedback finite-time stabilization of disturbed feedback linearizable nonlinear systems. *Automatica*, 49(9), 2767–2773.
- Aström, K., Block, D., y Spong, M. (2007). *The reaction wheel pendulum*. Morgan and Claypool Publishers.
- Chalanga, A., Kamal, S., y Bandyopadhyay, B. (2013). Continuous integral sliding mode control: A chattering free approach. In *2013 IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, 1–6.
- Cruz-Zavala, E. y Moreno, J.A. (2019). Levant's arbitrary-order exact differentiator: A Lyapunov approach. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 64(7), 3034–3039.
- Filippov, A.F. (1988). *Differential Equations with Discontinuous Righthand side*. Springer, Dordrecht.
- Gutiérrez-Oribio, D., Mercado Uribe, J., Moreno, J., y Fridman, L. (2021a). Reaction wheel pendulum control using fourth-order discontinuous integral algorithm. *Int. J. Robust Nonlinear Control.*, 31, 185–206.
- Gutiérrez-Oribio, D., Ángel Mercado-Uribe, Moreno, J.A., y Fridman, L. (2021b). Joint swing-up and stabilization of the reaction wheel pendulum using discontinuous integral algorithm. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 41, 101042.
- Han, J. (2009). From PID to active disturbance rejection control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 56(3), 900–906.
- Hernández-Guzmán, V.M. y Silva-Ortigoza, R. (2019). *Control of an Inertia Wheel Pendulum*, 921–950. Springer International Publishing, Cham.
- Ramírez-Neria, M., Sira-Ramírez, H., Garrido-Moctezuma, R., y Luviano-Juárez, A. (2019). Active disturbance rejection control of the inertia wheel pendulum through a tangent linearization approach. *Int J Control Autom Syst*, 17, 18–28.
- Spong, M.W., Corke, P., y Lozano, R. (2001). Nonlinear control of the reaction wheel pendulum. *Automatica*, 37(11), 1845–1851.
- Teja, G.P., Dhabale, A., y Waghmare, T. (2020). Nonlinear control of the reaction wheel pendulum using passivity-based control and backstepping control. In *2020 IEEE First International Conference on Smart Technologies for Power, Energy and Control (STPEC)*, 1–6.
- Trentin, J.F., da Silva, S., Ribeiro, J.M.d.S., y Schaub, H. (2021). An experimental study to swing up and control a pendulum with two reaction wheels. *Meccanica*, 56(4), 981–990.
- Utkin, V., Guldner, J., y Shi, J. (2017). *Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems*. CRC press.