

A Sampled-time Controller for a Class of Constrained Nonlinear Systems via Interval Prediction [★]

A. Gutiérrez ^{*} H. Ríos ^{*,***} M. Mera ^{**} D. Efimov ^{****}
and R. Ushirobira ^{****}

^{*} *Tecnológico Nacional de México/I.T. La Laguna. (e-mails: m.agutierrez@correo.itlalaguna.edu.mx, hrriosb@lalaguna.tecnm.mx).*

^{**} *Instituto Politécnico Nacional, ESIME-UPT. (e-mail: mmerah@ipn.mx)*

^{***} *CONAHCYT IxM.*

^{****} *Inria-Lille Nord Europe, Université de Lille CNRS, UMR. (e-mails: denis.efimov@inria.fr and rosane.ushirobira@inria.fr).*

Abstract: In this paper a solution for the stabilization problem is proposed for continuous-time nonlinear systems, taking into account state and input constraints. The proposed sampled-time controller includes the design of a control law based on an interval predictor-based state-feedback controller and a model predictive control (MPC) approach that deals with the system constraints. The interval predictor-based state-feedback controller is designed based on Lyapunov function approach, which provides a safe set where the state constraints are not violated, out of this set the MPC is activated. The practical, uniform, and asymptotic stability of the considered nonlinear systems is guaranteed. A constructive method based on linear matrix inequalities (LMIs) is proposed to compute the controller gains.

Keywords: Constrained Systems; Interval Predictor; Model Predictive Control.

1. INTRODUCCIÓN

Los sistemas dinámicos, que por lo general pueden ser representados por modelos no lineales, tienen limitaciones estructurales, *i.e.*, tienen restricciones en la entrada de control y en los estados, (ver *e.g.* Allenspach and Ducard (2021), Li and Shi (2013) y Weiss et al. (2015)). También, los sistemas pueden verse afectados por incertidumbres paramétricas que pueden afectar su comportamiento. En este sentido, el MPC es una estrategia de control que toma en cuenta las restricciones del sistema, en esta técnica la señal de control actual se obtiene resolviendo en línea un problema de control óptimo, utilizando el estado actual de la planta como estado inicial Mayne et al. (2000).

Con respecto al uso de MPC para sistemas restringidos, en Bujarbaruah et al. (2022) se propone un MPC para sistemas lineales inciertos. En este trabajo, se garantiza estabilidad Entrada-Estado (ISS) del sistema en lazo

cerrado, así como el cumplimiento de las restricciones del sistema. De igual manera, el MPC ha sido aplicado en sistemas lineales con parámetros variantes en el tiempo (LPV), *e.g.*, en Ding and Pan (2016) se propone un MPC por realimentación de salida para sistemas LPV perturbados. En este algoritmo los movimientos de control de horizonte infinito, se parametrizan con una ley de realimentación de salida. Sin embargo, se exige una gran carga computacional para lograr la tarea de control. En Mayne et al. (2009) se considera un MPC por realimentación de salida para sistemas lineales en tiempo discreto con perturbaciones. El controlador se basa en un estimado del estado y un MPC, sin embargo, se requiere la solución en línea de un programa cuadrático estándar. El sistema en lazo cerrado es exponencialmente estable. Es importante mencionar que en la mayoría de los trabajos mencionados anteriormente los algoritmos desarrollados son para sistemas lineales, por lo que el tipo de sistemas a los cuales se pueden aplicar es restringido.

La técnica de MPC puede ser aplicada a sistemas no lineales, en Manzano et al. (2020) se propone un MPC robusto para sistemas no lineales restringidos. Se utiliza una técnica de aprendizaje automático para estimar el modelo de predicción y así garantizar que el sistema en lazo cerrado sea asintóticamente estable. En Sun

[★] Este trabajo fue apoyado por los proyectos SEP-CONACYT-ANUIES-ECOS NORD 315597 y ECOS NORD M20M04. A. Gutiérrez agradece el apoyo de CONAHCYT CVU 932774. H. Ríos agradece el apoyo de CONAHCYT IxM CVU 270504 Proyecto 922, de Proyectos TecNM y de la Red Internacional de Control y Cómputo Aplicados, TecNM. M. Mera agradece el apoyo por parte del proyecto IPN-SIP 20230170.

et al. (2018) se propone un MPC robusto para robots diferenciales con restricciones en la entrada y perturbaciones. En este trabajo, se garantiza ISS del sistema en lazo cerrado. El MPC también se puede aplicar a sistemas no lineales en tiempo discreto. Para este tipo de sistemas en Xie et al. (2021) se propone un MPC con un mecanismo self-triggered para reducir la carga computacional mientras se cumple la tarea de control deseada. Sin embargo, el algoritmo tiene una tolerancia relativamente baja a las perturbaciones. Cabe resaltar que, en los trabajos mencionados anteriormente se necesita una gran carga computacional, debido a que el MPC está activo durante la tarea de control.

El MPC puede ser combinado con otras técnicas, *e.g.*, en Rubagotti et al. (2010) se propone una combinación de un MPC con un control por modos deslizantes (SMC) para sistemas no lineales inciertos restringidos. El enfoque propuesto garantiza que el sistema en lazo cerrado es ISS. Mientras tanto, en Ji et al. (2021) se propone un MPC para sistemas no lineales. El control propuesto se basa en una función costo caracterizada por una ley SMC implícita. Sin embargo, para garantizar la estabilidad asintótica del sistema en lazo cerrado, se requiere un modelo linealizado. En Reis de Souza et al. (2022) se incorpora un observador y un predictor por intervalos (IP) en el esquema MPC clásico para un sistema restringido lineal en tiempo discreto afectado por perturbaciones externas. No obstante, la mayoría de los trabajos mencionados anteriormente solo pueden garantizar ISS, requieren las trayectorias del sistema y no toman en cuenta el control muestreado.

Motivados por estos problemas, este artículo propone el diseño de un controlador muestreado para estabilizar sistemas no lineales restringidos en tiempo continuo. El esquema de control se basa en un controlador por realimentación de estado basado en un IP en tiempo discreto y un enfoque MPC. Además, el esquema de control posee las siguientes características: 1) Se caracteriza un conjunto seguro, donde no se transgreden las restricciones en los estados. 2) Bajo costo computacional ya que el MPC solo se activa fuera de la región segura. 3) El algoritmo propuesto garantiza la estabilidad práctica, uniforme, y asintótica del sistema no lineal restringido.

Notación: Para una matriz A , se define $A^+ = \max\{0, A\}$ y $A^- = A^+ - A$ (de manera similar para vectores).

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Se considera el siguiente sistema no lineal

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + Bu(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el estado, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función localmente Lipschitz, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ es la entrada de control. La matriz B es conocida y de dimensiones adecuadas. Se considera que $u \in \mathcal{U} := \{u \in \mathbb{R}^p \mid -u_{\max} \leq u \leq u_{\max}\}$, con $0 < u_{\max} \in \mathbb{R}^p$ como el vector que contiene el valor máximo que puede tomar cada señal de control.

Además, el control está muestreado, *i.e.*, $u(t) = u(t_k)$, para $t \in [t_k, t_{k+1})$ y $k \in \mathbb{N}_+$.

La solución del sistema (1) está restringida dentro de un politopo

$$\mathcal{X} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{b}x \leq \mathbf{1}_{k_x}\}, \quad (2)$$

donde $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_{k_x})^\top \in \mathbb{R}^{k_x \times n}$, y $b_i \in \mathbb{R}^n$ son vectores que caracterizan las restricciones en los estados, $k_x \in \mathbb{N}$ es el número de caras del politopo, y $\mathbf{1}_{k_x} = (1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^{k_x}$. Se asumen las siguientes suposiciones sobre el sistema (1).

Suposición 1. Existe una matriz Metzler $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y unas matrices conocidas $A_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \bar{N}$ para alguna $N \in \mathbb{N}$, tal que se cumplen las siguientes condiciones

$$f(x(t)) = \left[A_0 + \sum_{j=1}^N \alpha_j(x) A_j \right] x(t),$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j(x) = 1, \quad \alpha_j(x) \in (0, 1), \quad j = 1, \bar{N}.$$

Suposición 2. Existen vectores conocidos $\underline{x}_0, \bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\underline{x}_0 \leq x(0) \leq \bar{x}_0$.

El objetivo de este trabajo es diseñar una señal de control muestreada para estabilizar el sistema (1), tomando en cuenta restricciones en la entrada de control y los estados, *i.e.*, $x \in \mathcal{X}$ y $u \in \mathcal{U}$.

3. DISEÑO DEL CONTROLADOR

El controlador propuesto comprende el diseño de una ley de control robusta compuesta de un controlador por realimentación de estados basado en un IP y un MPC, el cual se encarga de lidiar con las restricciones del sistema. Se demostrará que existe un conjunto seguro para el controlador por realimentación de estados basado en un IP, donde las restricciones en los estados no son violadas. Se considera que el MPC está activo fuera del conjunto seguro. Debido a que el control está muestreado se diseña un IP en tiempo discreto que toma en cuenta el error de discretización y las restricciones del sistema.

3.1 Predictor por Intervalos

De acuerdo con la Suposición 1, el sistema (1) tiene la siguiente representación

$$\dot{x}(t) = \left[A_0 + \sum_{j=1}^N \alpha_j(x) A_j \right] x(t) + Bu(t). \quad (3)$$

Con base en Reis de Souza et al. (2021) y Efimov et al. (2012), se tiene que $-\underline{x}^- \leq \alpha_j(x)x \leq \bar{x}^+$. Entonces, se obtiene que

$$\Delta A_m \leq \sum_{j=1}^N \alpha_j(x) A_j x \leq \Delta A_M,$$

donde $\Delta A_m = -\Delta A^+ \underline{x}^- - \Delta A^- \bar{x}^+$ y $\Delta A_M = \Delta A^+ \bar{x}^+ + \Delta A^- \underline{x}^-$, con $\Delta A^+ = \sum_{i=1}^N A_i^+$ y $\Delta A^- = \sum_{i=1}^N A_i^-$.

Entonces, el IP continuo para el sistema (3) se define de la siguiente manera (Leurent et al., 2020)

$$\dot{z}(t) = \mathcal{A}_0 z(t) + \mathcal{A}_1 z^+(t) + \mathcal{A}_2 z^-(t) + \mathcal{B}u(t), \quad (4)$$

donde $z = [\underline{x}^\top, \bar{x}^\top]^\top \in \mathbb{R}^{2n}$ es el vector extendido del IP, las matrices $\mathcal{A}_0 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $\mathcal{A}_1 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $\mathcal{A}_2 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, y $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{2n \times p}$ tiene la siguiente estructura

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta A^- \\ 0 & \Delta A^+ \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} -\Delta A^+ & 0 \\ \Delta A^- & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix}.$$

Al inicializar el IP en $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ y $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$, entonces el IP garantiza la propiedad de inclusión (Leurent et al., 2020): $\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t)$, $\forall t \geq 0$. Entonces, para todo $t \geq t_0 \geq 0$, la solución del sistema (4) está dada como

$$z(t) = e^{\mathcal{A}_0(t-t_0)} z(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathcal{A}_0(t-\tau)} \mathcal{B}u(\tau) d\tau$$

$$+ \int_{t_0}^t e^{\mathcal{A}_0(t-\tau)} g(z(\tau)) d\tau, \quad (5)$$

donde $g(z(t)) = \mathcal{A}_1 z^+(t) + \mathcal{A}_2 z^-(t)$. La expresión (5), con el control muestreado $u(t) = u(t_k)$, para $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}_+$, y $t_0 = 0$, genera la siguiente secuencia en tiempo discreto:

$$z(t_{k+1}) = e^{\mathcal{A}_0 h} z(t_k) + \int_0^h e^{\mathcal{A}_0(h-s)} \mathcal{B}ds u(t_k)$$

$$+ \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{\mathcal{A}_0(t_k-s)} g(z(s)) ds,$$

donde $h = t_{k+1} - t_k$ es el intervalo de muestreo constante, y t_k es el instante de muestreo. Entonces, sumando y restando el término $\int_0^h e^{\mathcal{A}_0(h-s)} ds g(z_k)$, se tiene que

$$z(t_{k+1}) = e^{\mathcal{A}_0 h} z(t_k) + \int_0^h e^{\mathcal{A}_0(h-s)} \mathcal{B}ds u(t_k)$$

$$+ \int_0^h e^{\mathcal{A}_0(h-s)} ds g(z(t_k)) + \varphi_k, \quad (6)$$

con $\varphi_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{\mathcal{A}_0(t_{k+1}-s)} [g(z(s)) - g(z(t_k))] ds$. Se considera la notación $z(t_k) = z_k$, $u(t_k) = u_k$, y $\mathcal{G} = \int_0^h e^{\mathcal{A}_0(h-s)} ds \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$. Por lo tanto, (6) puede ser reescrita como

$$z_{k+1} = \bar{\mathcal{A}}_0 z_k + \bar{\mathcal{B}} u_k + \mathcal{G} g(z_k) + \varphi_k. \quad (7)$$

con $\bar{\mathcal{A}}_0 = e^{\mathcal{A}_0 h} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ y $\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{G} \mathcal{B} \in \mathbb{R}^{2n \times p}$. Sin embargo, el IP (7) no puede ser implementado debido a que el término φ_k , que caracteriza la precisión de la discretización y depende de $z(t)$ con $t \in [t_k, t_{k+1}]$, no se puede calcular. Por lo tanto, se propone el siguiente IP aplicable

$$\hat{z}_{k+1} = \bar{\mathcal{A}}_0 \hat{z}_k + \bar{\mathcal{B}} u_k + \mathcal{G} g(\hat{z}_k). \quad (8)$$

Entonces, para estabilizar la dinámica del sistema (1), se necesita diseñar u_k que lleve las trayectorias del sistema (8) a cero, teniendo en cuenta las restricciones del sistema. Se propone la siguiente ley de control para el sistema (7)

$$u_k = \begin{cases} \bar{u}_k & \text{si } \hat{z}_k \notin \mathcal{R}, \\ \hat{u}_k & \text{si } \hat{z}_k \in \mathcal{R}, \end{cases} \quad (9)$$

donde $\bar{u}_k$ es la señal de control calculada con el algoritmo MPC y $\hat{u}_k$ el control por realimentación de estados. Note que $\hat{u}_k$ se encuentra activo únicamente dentro del conjunto seguro $\mathcal{R}$, el cual se definirá más adelante

3.2 Control por Realimentación de Estados

Se propone el siguiente controlador por realimentación de estados no lineal

$$\hat{u}_k = K_0 \hat{z}_k + K_1 \hat{z}_k^+ + K_2 \hat{z}_k^-. \quad (10)$$

El siguiente lema brinda una manera de calcular las ganancias del controlador $K_0, K_1, K_2 \in \mathbb{R}^{p \times 2n}$.

Lema 1. *Assuma que las suposiciones 1 y 2 se cumplen, y la ley de control (10) es aplicada al sistema (7). Suponga que existen matrices simétricas $Q_0, Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, una matriz diagonal $R_3 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, algunas matrices $0 \prec X_1^\top = X_1 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $X_2 \in \mathbb{R}^{2n \times p}$, $K_1 \in \mathbb{R}^{p \times 2n}$, y $K_2 \in \mathbb{R}^{p \times 2n}$, tal que la siguiente desigualdad*

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{11} & Y_2 & Y_3 & 0 & \Sigma_{16} & \Sigma_{17} & X_1 \\ * & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} & 0 & \Sigma_{26} & 0 & 0 \\ * & * & \Sigma_{33} & 0 & \Sigma_{36} & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma I & I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -X_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\gamma I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -X_2 \end{pmatrix} \preceq 0, \quad (11)$$

$$\Sigma_{11} = -X_1 + \gamma Q_0, \quad \Sigma_{16} = X_1 \bar{\mathcal{A}}_0^\top + Y_1 \bar{\mathcal{B}}^\top,$$

$$\Sigma_{17} = 2\gamma k_a X_1, \quad \Sigma_{22} = 4\gamma k_{e_2}^2 \mathcal{A}_1^\top \mathcal{A}_1 + Q_1,$$

$$\Sigma_{23} = 4\gamma k_{e_2}^2 \mathcal{A}_1^\top \mathcal{A}_2 + R_3, \quad \Sigma_{26} = \mathcal{A}_1^\top \mathcal{G}^\top + K_1^\top \bar{\mathcal{B}}^\top,$$

$$\Sigma_{33} = 4\gamma k_{e_2}^2 \mathcal{A}_2^\top \mathcal{A}_2 + Q_2, \quad \Sigma_{36} = \mathcal{A}_2^\top \mathcal{G}^\top + K_2^\top \bar{\mathcal{B}}^\top,$$

se cumple para ciertas constantes $k_{e_1} = 1 + e^{k_\xi k_\xi}$, $k_{e_2} = k_{e_1} k_\xi$, $k_\xi = \xi \nu^{-1} (1 - e^{-\nu h})$, $k_a = k_{e_1} \xi - \|\bar{\mathcal{A}}_0\| - L\|\mathcal{G}\|$, con $\gamma, \xi, \alpha > 0$, $L = 2 \max\{\|\mathcal{A}_1\|, \|\mathcal{A}_2\|\}$, y $\nu = |\operatorname{Re}\{\lambda_{\max}\{\mathcal{A}_0\}\}|$. Si la siguiente desigualdad

$$\gamma Q_0 + \min\{Q_1, Q_2\} + 2 \min\{R_1, R_2\} \succeq 0, \quad (12)$$

se cumple con $R_1 = X_1^{-1} Y_1$ y $R_2 = X_1^{-1} Y_2$; el IP (8) se inicializa en $\hat{z}_0 = (\underline{x}_0^\top, \bar{x}_0^\top)^\top$, y las ganancias del controlador se seleccionan como $K_0 = X_2^\top X_1^{-1}$, K_1 , y K_2 ; entonces, el origen de la dinámica del sistema (7) es prácticamente, uniformemente, y asintóticamente estable (prácticamente UAS)¹. Además, el conjunto seguro está dado como

$$\mathcal{R} = \{z_k \in \mathbb{R}^{2n} : \hat{z}_k^\top X_1^{-1} \hat{z}_k \leq \varepsilon\}, \quad (13)$$

con $\varepsilon = \alpha^{-1} q_1$ y

$$q_1 = 8(k_{e_1} - \|\bar{\mathcal{A}}_0\| - L\|\mathcal{G}\|)^2 \tilde{z}^2 + 8k_{e_2}^2 \|\mathcal{B}\|^2 \bar{u}_{\max}^2$$

$$+ (2\tilde{e}\tilde{z} + \tilde{e}^2) \lambda_{\max}\{P\} + 2[\tilde{z}c_1 + \tilde{e}c_2 + c_4 \tilde{\varphi}] \tilde{e},$$

$$\tilde{z} = \sqrt{2k_x \lambda_{\max}^{-1}\{\mathbf{b}^\top \mathbf{b}\}}, \quad \bar{u}_{\max} = \|u_{\max}\|,$$

$$\tilde{e} = [k_{e_1}(\xi + 1) + k_\xi(\|\mathcal{A}_1\| + \|\mathcal{A}_2\|)] \tilde{z}$$

$$+ k_\xi[\|\mathcal{B}\| \bar{u}_{\max} + \lambda_{\max}^{-1/2}\{R_0\}],$$

$$\tilde{\varphi} = \tilde{e} - [2\|\bar{\mathcal{A}}_0\| + 2L\|\mathcal{G}\|] \tilde{z},$$

¹ Para más detalles sobre este tipo de estabilidad, ver Moreau and Aeyels (2000).

para unos $\mathbf{b}$, $u_{\max}$ dados, y

$$c_1 = (||\tilde{A}_0|| + ||\tilde{A}_1|| + ||\tilde{A}_2||) ||P\tilde{B}|| \bar{K}, \quad (15a)$$

$$c_2 = (0.5||K_0|| + ||K_1|| + ||K_2||) ||P\tilde{B}K_0|| \\ + (||K_0|| + 0.5||K_1|| + ||K_2||) ||P\tilde{B}K_1|| \\ + (||K_0|| + ||K_1|| + 0.5||K_2||) ||P\tilde{B}K_2||, \quad (15b)$$

$$c_3 = ||\tilde{S}_1^\top P\tilde{B}|| \bar{K}, \quad (15c)$$

$$c_4 = ||P\tilde{B}|| \bar{K}, \quad (15d)$$

donde $\tilde{A}_0 = \bar{A}_0 + \bar{B}K_0$, $\tilde{A}_1 = \mathcal{G}A_1 + \bar{B}K_1$, $\tilde{A}_2 = \mathcal{G}A_2 + \bar{B}K_2$, y $\bar{K} = ||K_0|| + ||K_1|| + ||K_2||$. Adicionalmente, para $\bar{P} = \alpha P/q_1 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, con $P = X_1^{-1}$, si las siguientes desigualdades

$$b_i^\top P_{\underline{x}}^{-1} b_i \leq 1, \quad b_i^\top P_{\bar{x}}^{-1} b_i \leq 1, \quad (16)$$

se cumplen para $P_{\underline{x}} = \bar{P}_{11} - \bar{P}_{21}^\top \bar{P}_{22}^{-1} \bar{P}_{21}$ y $P_{\bar{x}} = \bar{P}_{22} - \bar{P}_{21}^\top \bar{P}_{11}^{-1} \bar{P}_{21}$, con $\bar{P}_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{P}_{21} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{P}_{22} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, y

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{21}^\top \\ \bar{P}_{21} & \bar{P}_{22} \end{pmatrix},$$

entonces, la trayectorias del sistema (1) cumple con las restricciones de los estados, i.e., $x \in \mathcal{X}$.

La prueba de los resultados obtenidos se pueden resumir de la siguiente manera. Primero se define el error entre el IP (7) y (8) como $e_k = z_k - \hat{z}_k$. Entonces, considerando (10), la dinámica en lazo cerrado está dada como

$$z_{k+1} = \tilde{A}_0 z_k + \tilde{A}_1 z_k^+ + \tilde{A}_2 z_k^- + \varphi_k \\ - \bar{B}K_0 e_k - \bar{B}K_1 e_k^+ - \bar{B}K_2 e_k^-, \quad (17)$$

donde $\tilde{A}_0 = \bar{A}_0 + \bar{B}K_0$, $\tilde{A}_1 = \mathcal{G}A_1 + \bar{B}K_1$, y $\tilde{A}_2 = \mathcal{G}A_2 + \bar{B}K_2$. Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(z_k) = z_k^\top P z_k, \quad (18)$$

con $P = P^\top \succ 0 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$. Después del desarrollo correspondiente y considerando que se satisfacen las desigualdades correspondientes, se obtiene que

$$V(z_{k+1}) - V(z_k) \leq -\alpha z_k^\top P z_k + q_2.$$

Por lo tanto, el sistema (17) es prácticamente UAS. Entonces, el incremento de la función candidata de Lyapunov es negativa definida fuera del conjunto

$$\mathcal{R} = \{z_k \in \mathbb{R}^{2n} : z_k^\top P z_k \leq \alpha^{-1} q_2\}. \quad (19)$$

Cabe señalar que el error entre la trayectoria del IP continuo (5), y el IP en tiempo discreto (7), se toma en cuenta en (11), y por lo tanto en el cálculo de las ganancias del controlador. Esto implica que las trayectorias del sistema (5) permanecen en el conjunto (19), para todo $t \in [t_k, t_{k+1})$ y $k \in \mathbb{N}$.

Finalmente, para verificar que $\mathcal{R}$ está contenido dentro del politopo (2), es necesario calcular las proyecciones de la matriz $\bar{P} = \alpha P/q_2 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, i.e., nuevas matrices $P_{\bar{x}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $P_{\underline{x}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, en las coordenadas del IP $\bar{x}$ y $\underline{x}$, respectivamente. Las matrices $P_{\bar{x}}$ y $P_{\underline{x}}$ se calculan como $P_{\underline{x}} = \bar{P}_{11} - \bar{P}_{21}^\top \bar{P}_{22}^{-1} \bar{P}_{21}$ y $P_{\bar{x}} = \bar{P}_{22} -$

$\bar{P}_{21}^\top \bar{P}_{11}^{-1} \bar{P}_{21}$, respectivamente. Entonces, para garantizar que el conjunto (13) pertenece al politopo (2), se deben cumplir las desigualdades (16). Además, si el IP (8) se inicializa en $\hat{z}_0 = (x_0^\top, \bar{x}_0^\top)^\top$, debido a que se cumplen las suposiciones 1 y 2; entonces, las trayectorias del sistema (1) también cumplen con las restricciones en los estados, i.e., $x \in \mathcal{X}$.

3.3 Diseño del Control por Modelo Predictivo

Para el diseño del MPC se considera la siguiente suposición.

Suposición 3. Existen algunas ganancias $K_0, K_1, K_2 \in \mathbb{R}^{p \times 2n}$, que cumplen con las condiciones del Lema 1, y $\hat{u}_k(t) = K_0 \hat{z}_k(t) + K_1 \hat{z}_k^+(t) + K_2 \hat{z}_k^-(t) \in \mathcal{U}$, para todo $z_k \in \mathcal{R}$ y $t \geq 0$.

Se asume que la predicción se puede realizar en forma de horizonte en retroceso con una longitud de ventana $N > 1$. El IP (8) tiene una secuencia de entradas $\mathcal{S}_N = \{s_0, \dots, s_{N-1}\}$, con $s_m \in \mathcal{U}$ para todo $m = 0, N-1$, los valores $\hat{z}_{k,m+1}$ pueden ser calculados a partir de $m = 0, N-1$ con $u_{k+m} = s_m$. Se define $\hat{z}_{k+j} = \hat{z}_{k,j}$, para $j = 0, N$. Por lo tanto, el problema de control óptimo que tiene que ser resuelto por el MPC es el siguiente

Problema 1. Para unas matrices $0 \prec W = W^\top \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $0 \prec H = H^\top \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, y $M = M^\top \in \mathbb{R}^{2p \times 2p}$ dadas, encontrar las señales de control

$$\mathcal{S}_N^k = \arg \min V_N(\hat{z}_{k,0}, \dots, \hat{z}_{k,N}, \mathcal{S}_N), \quad (20)$$

con la función costo $V_N(\hat{z}_{k,0}, \dots, \hat{z}_{k,N}, \mathcal{S}_N) = V_f(\hat{z}_{k,N}) + \sum_{m=0}^{N-1} \ell(\hat{z}_{k,m}, s_m)$, donde $V_f(\hat{z}) = \hat{z}^\top W \hat{z}$, $\ell(\hat{z}, s) = \hat{z}^\top H \hat{z} + s^\top M s$, tal que se cumplen las siguientes restricciones: a) $\hat{z}_{k+j}$, para $j = 0, N$ se calcula mediante (8). b) $u_k \in \mathcal{U}$. c) $\hat{z}_{k,N} \in \mathcal{R}$.

Finalmente, considerado los resultados del Lema 1 y la solución del Problema 1 se presenta el siguiente teorema.

Teorema 1. Asuma que las suposiciones 1–3 se cumplen; entonces, el sistema en lazo cerrado compuesto por (1), (8) y (9) tiene las siguientes propiedades: i) Viabilidad recursiva para llegar a $\mathcal{R}$ en N pasos; ii) El origen de la dinámica del sistema (7) es prácticamente UAS, en el conjunto seguro $\mathcal{R}$; iii) Las restricciones en la entrada de control y en los estados no son violadas.

La prueba del Teorema 1 se basa en resultados clásicos en MPC (Mayne et al., 2000).

4. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Se considera el siguiente sistema no lineal

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 + 2 \sin(x_1) \\ 2 \sin(x_2) & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u.$$

Es posible demostrar que este sistema cumple con la Suposición 1. Las matrices A_0 y A_j son calculadas mediante un método politópico convexo. Se considera

$u_{\max} = 2$, $x_1 \in (-12, 12)$ y $x_2 \in (-5, 5)$, por lo tanto, los vectores de restricciones en los estados son $b_1 = (1/12, 0)^\top$, $b_2 = -b_1$, $b_3 = (0, 1/5)^\top$, y $b_4 = -b_3$. Las condiciones iniciales para el sistema son $x(0) = (2, -1)^\top$ y para el IP son $\hat{z}_k(0) = (-2.5, -1.6, 2.5, 1.6)^\top$.

Las simulaciones se realizan en MATLAB con el método de discretización de Euler, con un tiempo de integración de 0.0001 y con un tiempo de muestreo $h = 0.1$. La solución de las LMI's se obtiene mediante el solver SDPT3 y YALMIP, mientras que el MPC se implementa utilizando el toolbox nlmpc MATLAB.

Para resolver las desigualdades del Lema 1, se selecciona $\gamma = 0.1$, y se fija $Q_1 = Q_2 = -0.05I_4$; entonces, se obtienen las siguientes ganancias:

$$K_0 = (-2.8684 \ -5.6117 \ -2.8689 \ -5.6113),$$

$$K_1 = (-0.1033 \ -0.0700 \ -0.1061 \ -0.0471),$$

$$K_2 = (-0.0039 \ 0.0525 \ -0.0980 \ -0.0724).$$

Entonces, con $\alpha = 0.1$ es posible verificar que la condición (12) se cumple. Para el MPC, se considera $W = I_4$, $H = 1000I_4$, $M = 0.0001$, y $N = 10$.

Las trayectorias del sistema y del IP (8), así como las restricciones en los estados se muestran en la Fig. 1. Se observa que ambas trayectorias nunca violan las restricciones.

Por otro lado, en la Fig. 2 se puede observar que las condiciones iniciales del sistema están fuera del conjunto seguro $\mathcal{R}$, pero dentro de las restricciones de los estados. Sin embargo, el MPC lleva las trayectorias del sistema hacia el conjunto seguro $\mathcal{R}$ y estas permanecen dentro de dicho conjunto.

Finalmente, en la Fig. 3 se puede observar que la señal de control no transgrede las restricciones de la entrada de control.

5. CONCLUSIONES

Este artículo trata sobre el diseño de un controlador muestreado para la estabilización de sistemas no lineales restringidos. El controlador propuesto comprende el diseño de una ley de control, que se compone de un controlador de realimentación de estado basado en un IP y un enfoque MPC, que se ocupa de las restricciones del sistema. Se proporciona un conjunto seguro donde no se violan las restricciones en los estados. Dicho conjunto caracteriza la región donde el MPC se encuentra activo, *i.e.*, fuera de este conjunto, garantizando el cumplimiento de las restricciones de estado y de entrada.

REFERENCIAS

Allenspach, M. and Ducard, G.J. (2021). Nonlinear model predictive control and guidance for a propeller-tilting hybrid unmanned air vehicle. *Automatica*, 132, 109790.
Bujarbaruah, M., Rosolia, U., Stürz, Y.R., Zhang, X., and Borrelli, F. (2022). Robust MPC for LPV systems

via a novel optimization-based constraint tightening. *Automatica*, 143, 110459.
Ding, B. and Pan, H. (2016). Output feedback robust MPC for LPV system with polytopic model parametric uncertainty and bounded disturbance. *International Journal of Control*, 89(8), 1554–1571.
Efimov, D., Fridman, L., Raïssi, T., Zolghadri, A., and Seydou, R. (2012). Interval estimation for LPV systems applying high order sliding mode techniques. *Automatica*, 48(9), 2365–2371.
Ji, D., Ren, J., Liu, C., and Shi, Y. (2021). Stabilizing terminal constraint-free nonlinear MPC via sliding mode-based terminal cost. *Automatica*, 134, 109898.
Leurent, E., Efimov, D., and Maillard, O. (2020). Robust-adaptive interval predictive control for linear uncertain systems. In *2020 59th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 1429–1434. IEEE.
Li, H. and Shi, Y. (2013). Robust distributed model predictive control of constrained continuous-time nonlinear systems: A robustness constraint approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59(6), 1673–1678.
Manzano, J.M., Limón, D., and Muñoz de la Peña, D. and Calliess, J.P. (2020). Robust learning-based MPC for nonlinear constrained systems. *Automatica*, 117, 108948.
Mayne, D.Q., Raković, S., Findeisen, R., and Allgöwer, F. (2009). Robust output feedback model predictive control of constrained linear systems: Time varying case. *Automatica*, 45(9), 2082–2087.
Mayne, D.Q., Rawlings, J.B., Rao, C.V., and Sokaert, P.O. (2000). Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, 36(6), 789–814.
Moreau, L. and Aeyels, D. (2000). Practical stability and stabilization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(8), 1554–1558.
Reis de Souza, A., Efimov, D., and Raïssi, T. (2021). Robust output feedback MPC for LPV systems using interval observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 67(6), 3188–3195.
Reis de Souza, A., Efimov, D., Raïssi, T., and Ping, X. (2022). Robust output feedback model predictive control for constrained linear systems via interval observers. *Automatica*, 135, 109951.
Rubagotti, M., Raimondo, D.M., Ferrara, A., and Magni, L. (2010). Robust model predictive control with integral sliding mode in continuous-time sampled-data nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(3), 556–570.
Sun, Z., Dai, L., Liu, K., Xia, Y., and Johansson, K.H. (2018). Robust MPC for tracking constrained unicycle robots with additive disturbances. *Automatica*, 90, 172–184.
Weiss, A., Baldwin, M., Erwin, R.S., and Kolmanovsky, I. (2015). Model predictive control for spacecraft rendezvous and docking: Strategies for handling constraints and case studies. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 23(4), 1638–1647.

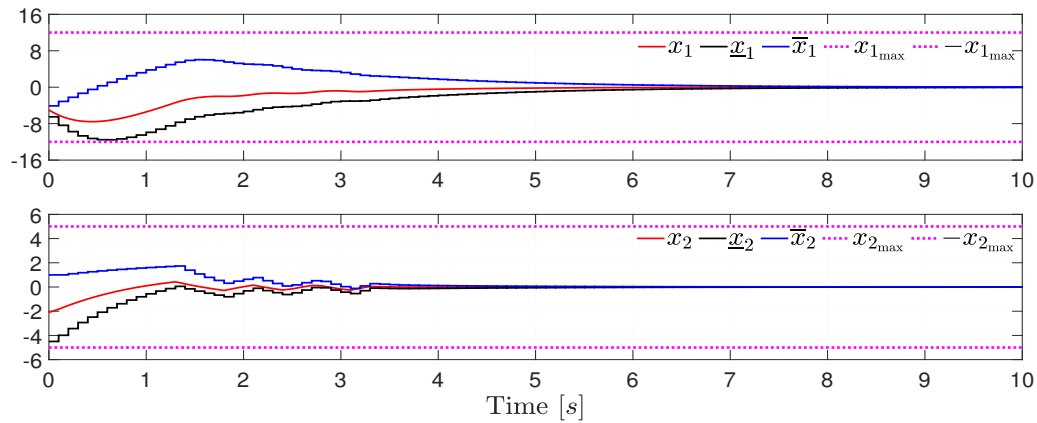


Fig. 1. Trayectorias del sistema y restricciones en los estados

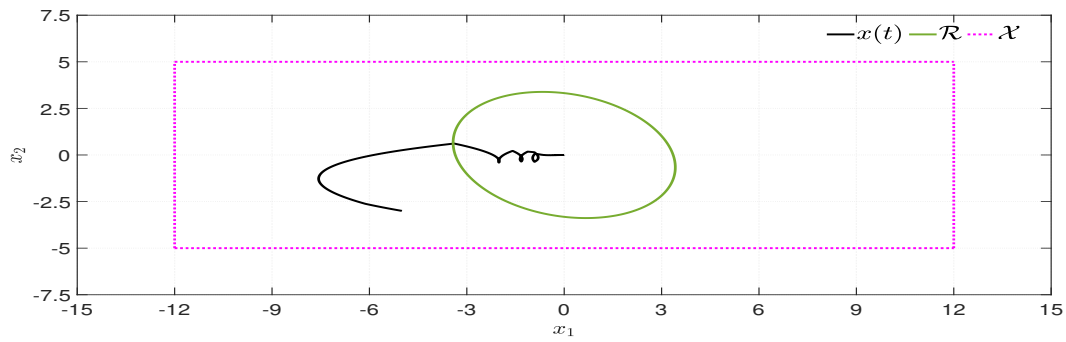


Fig. 2. Trayectorias del sistema, conjuntos $\mathcal{X}$ y $\mathcal{R}$.

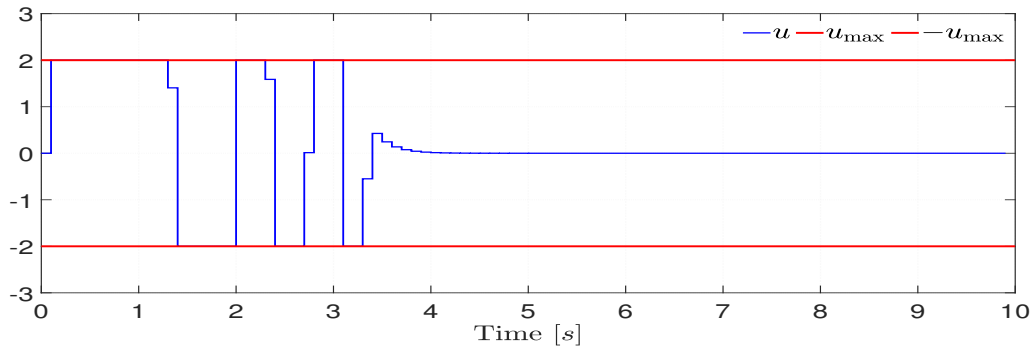


Fig. 3. Señal de control.

Xie, H., Dai, L., Luo, Y., and Xia, Y. (2021). Robust MPC for disturbed nonlinear discrete-time systems via a composite self-triggered scheme. *Automatica*, 127, 109499.