

Observer-predictor based on a PD controller for high-order delayed systems with one unstable pole and n pairs of complex conjugate poles

A. Olivar-Mejía* B. Del Muro-Cuéllar* J.F. Márquez-Rubio*
G.I. Duchén-Sánchez*

* *Instituto Politécnico Nacional, ESIME Culhuacán, Av. Santa Ana No. 1000, Coyoacán, México (e-mail: aolivarm1500@alumno.ipn.mx, bdelmuro@yahoo.com, jfcomr23@yahoo.com.mx).*

Abstract: This paper considers the stability of continuous linear systems with time delay. In particular, systems with one unstable pole and n pairs of complex conjugate and/or real poles are analyzed. The proposed solution consists of using an estimated state observer with a closed-loop PD type controller to access to the internal variables of the system. A partition of the time delay is proposed in the observer to admit the double of the maximum size that when a simple PD controller is considered. The necessary and sufficient conditions for the stability of the proposed control scheme are presented and an example is presented with simulations to demonstrate the usefulness of the proposed control strategy.

Keywords: Unstable system, observer-predictor, delay partition, stability.

1. INTRODUCCIÓN

Los modelos lineales a menudo son utilizados para el modelado de diferentes clases de procesos, un caso particular son los sistemas con tiempo de retardo, los cuales se pueden encontrar en los procesos químicos e industriales, tales como el almacenamiento de líquidos (Liu et al., 2005), sistemas económicos (Niculescu, 2001), comunicaciones satelitales (Hernández, 2009), sistemas teleoperados (Ailon and Gil, 2000), actuadores hidráulicos (Deng et al., 2021), etc. Los retardos de tiempo tienen su origen debido a diversas particularidades, como por ejemplo cuando el sistema requiere de un tiempo para transportar una masa o una energía de un punto a otro dentro del propio sistema o por el retraso en el envío y/o recepción de la información en un lazo de control. Desde el punto de vista del control estos sistemas representan un alto grado de interés para su análisis, puesto que se busca que su respuesta en lazo cerrado sea aceptable y desde luego estable, sin embargo el tiempo de retardo plantea un reto enorme puesto que al cerrar el lazo de control, el término del retardo aparece en el denominador de la función de transferencia, generando como consecuencia que la ecuación característica contenga un número infinito de raíces. Un enfoque comúnmente utilizado es desprestigiar el término del retardo cuando este es lo suficientemente pequeño en relación con la dinámica del sistema, sin embargo en caso contrario se requiere del diseño de una etapa de control. Para abordar el problema de la esta-

bilidad de los sistemas con tiempo de retardo, se han publicado diversas propuestas para controlar esta clase de sistemas. Una de las soluciones propuestas es el uso de controladores tradicionales, como los proporcionales (P), el proporcional-integral (PI), el proporcional-derivativo (PD) y el Proporcional-Integral-Derivativo (PID), cabe mencionar que este último es el controlador más utilizado en la industria (Silva, 2005), (Wu et al., 2019), (Arrieta et al., 2011). Idealmente una forma de controlar los sistemas con retardo consiste en tener acceso a las señales internas y hacer uso de la señal antes de ser retardada. Con esta señal intermedia es posible aplicar cualquier estrategia de control pues se estaría considerado acceder al sistema libre de retardo, sin embargo estas señales intermedias generalmente son inaccesibles debido a que el retardo se encuentra implícito dentro del sistema. En consecuencia a lo anterior se diseñó un dispositivo capaz de estimar estas señales intermedias y así tener acceso a la señal antes de ser retardada. El primer dispositivo de su tipo se conoce como el predictor de Smith (PS) (Smith, 1957). No obstante este dispositivo se limita exclusivamente a sistemas estables, motivo por el cual, al paso de los años se han desarrollado modificaciones que permiten estimar la señal o señales de interés para sistemas inestables antes de sufrir el efecto del retardo, ver por ejemplo (Sanz et al., 2018), (İçmez and Can, 2023) y (Barragan-Bonilla et al., 2020).

Este trabajo presenta una modificación al Predictor de Smith, que permite aplicar control a sistemas de alto orden con un polo inestable y n par de polos estables complejos conjugados y/o reales, además se presentan las condiciones necesarias y suficientes para aplicar el esquema de control propuesto basado en un esquema observador-predicador en cascada con un controlador tipo PD.

Este trabajo se organiza de la siguiente manera; en la sección 2 se establecen la clase de sistemas que serán abordados. En la sección 3, como resultados preliminares, se presentan las condiciones necesarias y suficientes para estabilizar los sistemas de la sección 2 mediante un controlador tipo PD, del cual se desprende el tamaño máximo de retardo para estabilizar esta clase de sistemas con este tipo de control. El siguiente resultado preliminar presenta los valores de k_p y k_d que hacen que el sistema sea estable mediante un controlador tipo PD. En la sección 4, se presentan los resultados principales de este trabajo. En la sección 5, se presenta 1 ejemplo en simulación el cuál considera una comparativa entre el trabajo presentado en (Hernández-Pérez et al., 2015) contra la propuesta del presente trabajo. Y por último, la sección 6, presenta algunas conclusiones.

2. CLASE DE SISTEMAS

Sea la clase de sistema lineal continuo con tiempo de retardo en lazo abierto,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)e^{-\tau s}, \quad (1)$$

donde $U(s)$ representa la entrada, $Y(s)$ la salida, $G(s)$ es la planta libre de retardo y $\tau \geq 0$ es el tiempo de retardo. El presente trabajo analiza la clase de sistemas lineales continuos con un polo inestable y n pares de polos estables complejos conjugados y/o reales. Por lo que la planta $G(s)$ tiene la forma,

$$G(s) = \frac{b}{(s-a) \prod_{i=1}^n (s^2 + 2\zeta_i \omega_{n_i} s + \omega_{n_i}^2)}, \quad (2)$$

donde a , b , ζ_i , ω_{n_i} son constantes positivas, a representa la posición del polo inestable y b la ganancia del sistema. Una estrategia de control comúnmente utilizada para estabilizar sistemas de la forma dada por la ecuación (1), consiste en utilizar una retroalimentación estática de la salida de forma,

$$U(s) = k(R(s) - Y(s)), \quad (3)$$

donde k presenta con controlador estático y el sistema resultante del lazo de retroalimentación tiene la forma,

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{kG(s)e^{-\tau s}}{1 + kG(s)e^{-\tau s}}, \quad (4)$$

donde $R(s)$ es la nueva entrada de referencia y la ecuación característica de lazo cerrado está dada por,

$$1 + kG(s)e^{-\tau s} = 0, \quad (5)$$

observe que el tiempo de retardo $e^{-\tau s}$ aparece en la ecuación característica dada en la ecuación (5), complicando el análisis de la estabilidad debido al número infinito de raíces que se generan. Para tratar con este problema, en el presente trabajo se propone un estrategia de control basada en un esquema observador-predicador para sistemas inestables de alto orden con retardo dados por la ecuación (1).

3. RESULTADOS PRELIMINARES

En esta sección se presenta un resultado preliminar para estabilizar la clase de sistemas dado en (1) usando un controlador tipo PD. El resultado será utilizado más adelante para la propuesta de este trabajo.

Lema 1. (Hernández-Pérez et al., 2015) Considere el sistema dado en (1), el controlador tipo PD dado por,

$$C(s) = k_p(1 + k_d s), \quad (6)$$

y una retroalimentación unitaria de la salida como acción de control, la cual está dada por $U(s) = C(s)[R(s) - Y(s)]$, donde $R(s)$ es la nueva entrada de referencia. Entonces existen ganancias k_p y k_d , tal que el sistema en lazo cerrado asociado es estable si y sólo si,

$$\tau < \frac{1}{a} + \sqrt{\frac{1}{a^2} + 2 \sum_{i=1}^n \frac{2\zeta_i^2 - 1}{\omega_{n_i}^2} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{\zeta_i}{\omega_{n_i}}}. \quad (7)$$

La función de transferencia de lazo cerrado asociada al Lema 1. es,

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)e^{-\tau s}}{1 + C(s)G(s)e^{-\tau s}}, \quad (8)$$

Una representación en espacio de estados de la ecuación (8) es la siguiente,

$$\begin{bmatrix} \dot{W}(t) \\ \dot{\omega}_{2n+1}(t) \\ y(t+\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & Bbk_p(1 + ak_d) & -Bbk_pk_d \\ 0 & a & -1 \\ C & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(t) \\ \omega_{2n+1}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Bbk_pk_d \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{u}(t), \quad (9)$$

con,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \omega_{n_1}^2 & -2\zeta_1\omega_{n_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_{n_i}^2 & \zeta_i\omega_{n_i} \end{bmatrix},$$

$B = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1]^T$, y $C = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0]$, donde las dimensiones de las matrices son: $A^{2n \times 2n}$, $B^{2n \times 1}$ y $C^{1 \times 2n}$ y son matrices asociadas a los polos complejos conjugados de la ecuación (8).

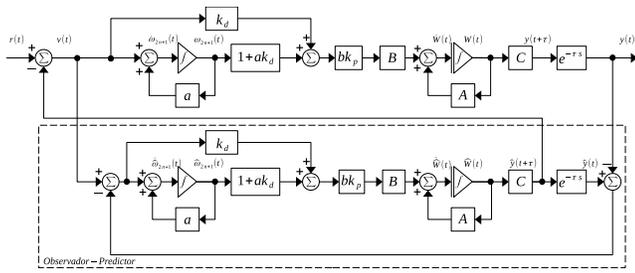


Fig. 2. Esquema observador-predictor propuesto.

Una vez asegurada la convergencia de las señales del esquema de la Fig. 2, es necesario diseñar una etapa de control para la planta, utilizando las señales estimadas. En este caso se propone la retroalimentación de la señal $\hat{y}(t + \tau)$. A continuación se presenta el resultado que formaliza la estabilidad del sistema mostrado en la Fig. 2 considerando la retroalimentación de la señal estimada.

Teorema 3. *Considere el sistema dado por (8) y el esquema de control propuesto en la Fig. 2. Entonces existen las ganancias k_p y k_d tal que el sistema en lazo cerrado mostrado en la Fig. 2 es estable si y sólo si,*

$$\tau < \frac{1}{a} + \sqrt{\frac{1}{a^2} + 2 \sum_{i=1}^n \frac{2\zeta_i^2 - 1}{\omega_{n_i}^2}} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{\zeta_i}{\omega_{n_i}}.$$

4.1 Estrategia de control mejorada

En esta sección se propone una estrategia de control que mejora las condiciones de estabilidad con respecto al tamaño de retardo presentado en el Teorema 3. Para esto, considere una partición del retardo $\tau = \tau_1 + \tau_2$, donde $\tau_1 = \tau_2 = \tau/2$, en el sistema dado por (13), el cual puede ser representado como,

$$\bar{Q}(s) = e^{-\tau_1 s} C(s) G(s) e^{-\tau_2 s} \quad (18)$$

La Fig. 3 es la representación del esquema observador-predictor propuesto para el sistema dado por (18). Note que dicho esquema observador propuesto puede ser visto como un observador especial para la planta dada por (1).

En el siguiente Teorema se presentan las condiciones de estabilidad del esquema de control propuesto mostrado en la Fig. 3. Cabe resaltar que en la prueba de dicho Teorema está incluida la prueba de convergencia del observador propuesto en la Fig. 3.

Teorema 4. *Considere el sistema dado por (18) y el esquema observador-predictor dado por la Fig. 3. Entonces existen ganancias k_p , k_d tal que el sistema en lazo cerrado $Y(s)/R(s)$ es estable si y sólo si,*

$$\tau < 2 \left(\frac{1}{a} + \sqrt{\frac{1}{a^2} + 2 \sum_{i=1}^n \frac{2\zeta_i^2 - 1}{\omega_{n_i}^2}} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{\zeta_i}{\omega_{n_i}} \right).$$

Demostración. Observe que el Teorema 2 puede aplicarse directamente a un sistema con entrada retardada $u(t - \tau_1)$ ya que la convergencia del observador no se ve afectada por la adición del término de retardo $e^{-\tau_1 s}$ a la etapa del

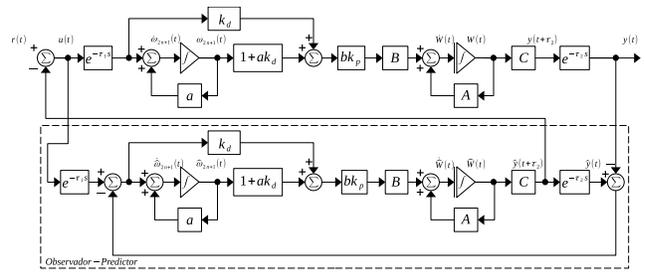


Fig. 3. Esquema observador-predictor con partición de retardo.

observador mostrada en la Fig. 3. Es decir, en el esquema de la Fig. 3, existen ganancias k_p y k_d tales que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\hat{\omega}(t) - \omega(t)] = 0,$$

si y sólo si,

$$\tau_2 < \frac{1}{a} + \sqrt{\frac{1}{a^2} + 2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{2\zeta_i^2 - 1}{\omega_{n_i}^2} \right)} - 2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\zeta_i}{\omega_{n_i}} \right), \quad (19)$$

Observe que esta condición de convergencia solamente limita el tamaño del retardo de la partición τ_2 .

Suponiendo que la condición de convergencia dada en (19) se cumple, es posible diseñar una ley de control basada en la retroalimentación de uno o varios estados estimados. En este caso, se propone utilizar la señal estimada $\hat{y}(t + \tau_2)$ como lo muestra el esquema de la Fig. 3. De esta manera, la condición para estabilizar a la planta libre del retardo τ_2 está dada por,

$$\tau_1 < \frac{1}{a} + \sqrt{\frac{1}{a^2} + 2 \sum_{i=1}^n \frac{2\zeta_i^2 - 1}{\omega_{n_i}^2}} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{\zeta_i}{\omega_{n_i}}.$$

Observe que esta condición de estabilidad solamente limita el tamaño del retardo de la partición τ_1 .

Por lo tanto, se puede concluir que la condición de estabilidad sobre el retardo original τ es,

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 < 2 \left(\frac{1}{a} + \sqrt{\frac{1}{a^2} + 2 \sum_{i=1}^n \frac{2\zeta_i^2 - 1}{\omega_{n_i}^2}} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{\zeta_i}{\omega_{n_i}} \right). \quad \square$$

Como $\tau_1 = \tau_2$ (suposición previamente establecida), los parámetros k_p y k_d obtenidos para la convergencia también permiten estabilizar a la planta o proceso. Por lo tanto, ya no es necesario realizar un diseño adicional para controlar al proceso, dado que el controlador PD, $C(s)$ fue incluido inicialmente como si fuera una extensión del sistema original.

Note que la condición necesaria y suficiente del Teorema 4, permite estabilizar sistemas con retardos del doble de tamaño que los sistemas controlados con un control PD simple, (Lema1).

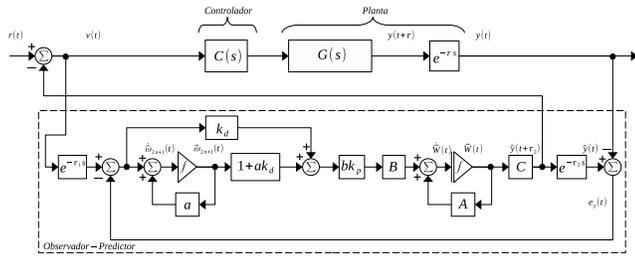


Fig. 4. Esquema observador-predictor para implementación.

Nótese que el diagrama de la Fig. 4, es el esquema sugerido para la implementación práctica, donde el controlador $C(s)$ utilizado, es el mostrado en la ecuación (6) y el retardo τ ya está asociado a la planta sin considerar las particiones que se utilizaron únicamente para la síntesis de la estrategia de control propuesta basada en el observador.

5. RESULTADOS EN SIMULACIÓN

Ejemplo 1. Considere el sistema de orden-siete presentado en (Hernández-Pérez et al., 2015), con un polo inestable, 2 par de polos complejos conjugados, 2 par de polos reales y tiempo de retardo. El sistema está caracterizado por la siguiente función de transferencia,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s - 0.4)(s^2 + 2s + 5)(s^2 + 4s + 8)(s + 3)(s + 4)} e^{-0.4s}, \quad (20)$$

Donde los parámetros del sistema son $\tau=0.4$, $a = 0.4$, $\zeta_1=0.4472$, $\omega_{n_1}=2.2360$, $\zeta_2=0.7071$, $\omega_{n_2}=2.8284$, $\zeta_3=1.0103$, $\omega_{n_3}=3.4646$.

Considere la partición del retardo propuesta en el Teorema 4, por lo que la función de transferencia mostrada en la ecuación (20), se puede representar como,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = e^{-0.2s} \frac{1}{(s - 0.4)(s^2 + 2s + 5)(s^2 + 4s + 8)(s + 3)(s + 4)} e^{-0.2s}, \quad (21)$$

Donde $\tau=\tau_1+\tau_2=0.4$.

Observe que la condición del *Lema 1* se cumple ya que $\tau < 1.0168$. Dado que en este ejemplo $\tau = 0.4$, se procede a encontrar parámetros k_p y k_d del controlador tipo PD dado por la ecuación (6), que aseguran la convergencia de las señales.

Haciendo uso de la ecuación (10), encontramos que el intervalo de valores k_d que hace que la ecuación (21) sea estable son: $-1.216 < k_d < 1.5594$.

El intervalo de valores k_p que hace que la ecuación (21) sea estable son: $192.0399 < k_p < 381.3863$.

Para la simulación, considere una entrada $R(s)$ de tipo escalón, de amplitud 1, condiciones iniciales de 0.6 aplicadas al polo inestable del sistema, donde la respuesta de salida del sistema se estabiliza en estado estacionario tal como se muestra en la Fig. 5.

Una comparativa entre condiciones iniciales nulas y condiciones iniciales distintas de cero, aplicadas a la planta en

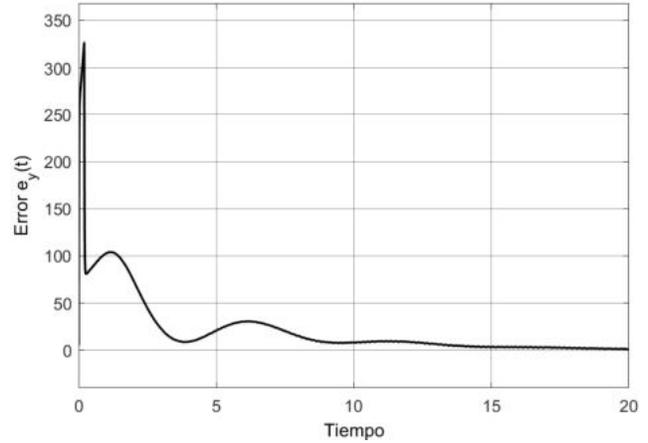


Fig. 5. Error de estimación.

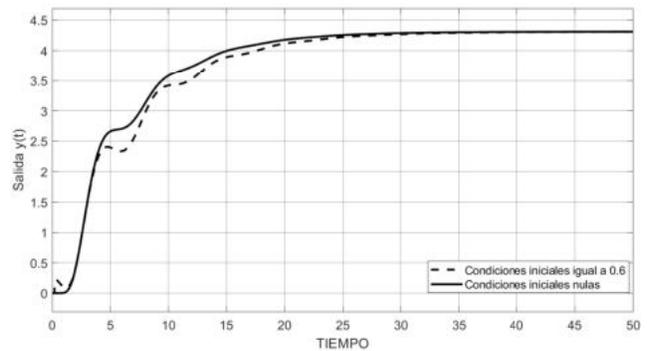


Fig. 6. Respuesta de salida del sistema

cuestión en el polo inestable, se puede observar en la Fig. 6. La señal del error de estimación solamente se aprecia cuando existen condiciones iniciales distintas de cero, por lo que después de un tiempo dicha señal se estaciona en cero. Cuando esto sucede se dice que la señal del esquema observador converge a la señal de la planta.

Note que al aplicar la estrategia de control propuesta en este trabajo demostrada en el Teorema 4, la partición del retardo, consigue a aumentar el tamaño máximo admisible del retardo, quedando como $\tau < 2.0336$. Nótese que en el trabajo presentado en (Hernández-Pérez et al., 2015), el tamaño máximo admisible es de $\tau < 1.0168$. Por lo cual se consigue duplicar en un factor de dos el tamaño de retardo admisible para esta clase de sistemas.

6. CONCLUSIONES

Los sistemas con retardo presentan un reto significativo para el análisis de la estabilidad, en especial cuando el retardo es demasiado grande con relación a la dinámica del sistema. En este trabajo se presentan dos estrategias de control basadas en dos esquemas predictores, los cuales nos permiten estimar adecuadamente las señales internas del sistema para implementar un controlador tipo PD como estrategia de control para el sistema original dado en (1). En el trabajo presentado en (Hernández-

Pérez et al., 2015) el tamaño máximo de retardo admisible esta dado por $\tau < \frac{1}{a} + \sqrt{\frac{1}{a^2} + 2 \sum_{i=1}^n \frac{2\zeta_i^2 - 1}{\omega_{n_i}^2}} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{\zeta_i}{\omega_{n_i}}$, mientras que en este trabajo (Teorema 4) es posible superar dicha condición con respecto al tamaño máximo del retardo admisible quedando como $\tau < 2 \left(\frac{1}{a} + \sqrt{\frac{1}{a^2} + 2 \sum_{i=1}^n \frac{2\zeta_i^2 - 1}{\omega_{n_i}^2}} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{\zeta_i}{\omega_{n_i}} \right)$. Como puede observarse, el tamaño máximo del retardo presentado en este trabajo se aumenta en un factor de dos, con respecto al trabajo de (Hernández-Pérez et al., 2015), lo cual representa una mejora respecto a la clase de sistemas que pueden controlarse.

REFERENCES

- Ailon, A. and Gil, M.I. (2000). Stability analysis of a rigid robot with output-based controller and time delay. *Systems and Control Letters*, 40(1), 31–35. doi: 10.1016/s0167-6911(99)00120-6.
- Arrieta, O., Vilanova, R., and Visioli, A. (2011). Proportional-Integral-Derivative Tuning for Servo/Regulation Control Operation for Unstable and Integrating Processes. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 50(6), 3327–3334. doi: 10.1021/ie101012z.
- Barragan-Bonilla, L.A., Marquez-Rubio, J.F., del Muro-Cuellar, B., and Hernández-Pérez., M.A. (2020). Observer/predictor desing for unstable delayed linear systems with one pole at the origin. *AMCA*.
- Deng, W., Yao, J., Wang, Y., Yang, X., and Chen, J. (2021). Output feedback backstepping control of hydraulic actuators with valve dynamics compensation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 158, 107769. doi:10.1016/j.ymssp.2021.107769.
- Hernández-Pérez, M.A., del Muro-Cuellar, B., and Velasco-Villa, M. (2015). PID for the stabilization of high-order unstable delayed systems with possible complex conjugate poles. *Asia-Pacific Journal of Chemical Engineering*, 10(5), 687–699. doi:10.1002/apj.1904.
- Hernández, R.R.L. (2009). Análisis del método MFSP (Múltiple Frames into Single Packet) para contrarrestar los retardos en los sistemas de Voip.
- İçmez, Y. and Can, M.S. (2023). Smith predictor controller design using the direct synthesis method for unstable second-order and time-delay systems. *Processes*, 11(3), 941. doi:https://doi.org/10.3390/pr11030941.
- Liu, T., Zhang, W., and Gu, D. (2005). Analytical design of two-degree-of-freedom control scheme for open-loop unstable processes with time delay. *Journal of Process Control*, 15(5), 559–572. doi: 10.1016/j.jprocont.2004.10.004.
- Niculescu, S.I. (2001). *Delay Effect on Stability: A Robust Control Approach*.
- Sanz, R., García, P., and Albertos, P. (2018). A generalized smith predictor for unstable time-delay SISO systems. *ISA Transactions*, 72, 197–204. doi: 10.1016/j.isatra.2017.09.020.
- Silva, G. J. Datta, A.B.S.P. (2005). *PID Controllers for Time-Delay Systems*.
- Smith, O.J.M. (1957). Close control of loops with dead time. *Eng. Prog.*, 53.
- Wu, Li, and Xue (2019). A new PID controller design with constraints on relative delay margin for first-order plus dead-time systems. *Processes*, 7(10), 713. doi: 10.3390/pr7100713.