Memorias del 2023 Congreso Nacional de Control Automático
25-27 de Octubre, 2023. Acapulco, Guerrero, México.

Design of an observer for detectable systems with time delay and unknown inputs

Jesús Alberto Suárez Bautista y Francisco Javier Bejarano

Instituto Politécnico Nacional, ESIME Ticomán, SEPI, Av. San José Ticomán 600, C.P. 07340, Ciudad de México, México

Abstract: This paper investigates an unknown input observer for time delay systems in the strong observable and strong detectable cases. Conditions are derived to transform the system into an observer normal form and to replace the unknown inputs. This replacement allows us to use the measurements obtained at the output of the system to compensate for the missing information. These conditions enable the design of a Luenberger-like observer for systems that are strongly observable and to generalize to the case of strongly detectable systems, thereby relaxing the conditions for this type of system.

Keywords: Observer design, Detectable systems, Commensurate delays, Unknown inputs

1. INTRODUCCIÓN

La observabilidad en sistemas con retardos ha sido ampliamente estudiada en la teoría de sistemas de control. Para llevar a cabo el análisis de este concepto es necesario trabajar con la estructura del sistema, debido a que al examinar la observabilidad del sistema se deben tomar en cuenta ciertos criterios que tienen que ver las propiedades del mismo. El estudio de esta propiedad se remonta desde la década de los 80 del siglo pasado, Salamon (1980), Lee y Olbrot (1981), (Brown , 1993).
En términos de observabilidad para este tipo de sistemas, también existen trabajos como Zheng et al. (2015), en donde se proporcionan condiciones para llevar a cabo el análisis, proporcionando conceptos como; *Sistema Fuertemente Observable (Strong Observable, SO)*, necesario para el diseño de un observador de tipo Luenberger, considerando sistemas con entradas desconocidas y retardos conmensurados. Sin embargo su análisis se queda limitado ya que no considera el caso detectable.
Uno de los temas importantes que abordamos tiene que ver con las entradas desconocidas, esta clase de sistemas ha sido abordado en diversos trabajos como Perdon (1980).
El objetivo de este trabajo es analizar la problemática que se presenta cuando no se cuenta con un sistema SO. Siguiendo la metodología presentada en Zheng et al. (2015) y Bejarano (2021), se hace uso de la forma de dinámica cero para sistemas con retardos y entradas desconocidas, así como de la forma normal observable para adaptar ambos resultados, logrando obtener dos observadores. El primer observador propuesto aplica únicamente al caso SO, la diferencia con el propuesto en Zheng et al. (2015) está en el diseño, el cual es bastante mas simple. El segundo observador propuesto aplica para el caso fuertemente detectable, donde se hace uso de la forma normal de observador y el observador propuesto para el caso fuertemente observable.
En la Sección 2 se da una explicación de la problemática que intentamos resolver, presentando el tipo de sistema que estaremos utilizando, así como algunos conceptos importantes en la teoría de anillos polinomiales que nos resultan muy útiles en nuestro análisis.
En la Sección 3 abordamos el problema de los cambios de base necesarios para llevar al sistema detectable con retardos y entradas desconocidas hacia una forma con la cual poder trabajar desde el punto de vista de la observabilidad. En primer lugar realizamos un cambio de base para evitar trabajar con entradas desconocidas y usar la salida medible, de manera que ésta se compense en el observador, ademas usamos la estrategia vista en Zheng et al. (2015) para obtener una salida lineal retardada con ayuda de unos conceptos vistos en Hou y Muller (1992), para obtener una forma normal observable. En la Sección 4 realizamos el diseño y la justificación analítica del observador para sistemas detectables con retardos y entradas desconocidas, logrando sintetizar el observador para el caso fuertemente observable y añadiendo el caso fuertemente detectables.

2. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Consideremos la siguiente clase de sistema.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=0}^{k_a} A_i x(t-ih) + \sum_{i=0}^{k_b} B_i w(t-ih) \\ y(t) &= \sum_{i=0}^{k_c} C_i x(t-ih) \end{aligned} \tag{1}$$

Donde, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de trayectorias del sistema, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ representa el vector se las salidas del sistema, y el vector de entradas desconocidas es representado mediante $w(t) \in \mathbb{R}^m$. La condición inicial $\varphi(t)$ es una función continua a trozos, $\varphi(t) : [-kh, 0] \to \mathbb{R}^n$, donde $k \max\{k_a, k_b, k_c\}$. Las matrices que aparecen en (1) tienen las siguientes dimensiones, $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $C_i \in \mathbb{R}^{p\times n}$.

Para llevar a cabo el diseño del observador utilizaremos el operador de retardo δ definido como $\delta : x(t) \mapsto x(t-h)$. De esa manera, el sistema (1) queda representado de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) =& A(\delta)x(t) + B(\delta)w(t)\\ y(t) =& C(\delta)x(t)\end{aligned} \qquad (2)$$

Donde $A(\delta) := \sum_{i=0}^{k_a} \delta^i A_i$, $B(\delta) := \sum_{i=0}^{k_b} \delta^i B_i$, $C(\delta) := \sum_{i=0}^{k_c} \delta^i C_i$. Por consiguiente, los elementos de $A(\delta)$, $B(\delta)$ y $C(\delta)$ pertenecen al anillo polinomial $\mathbb{R}[\delta]$. En seguida recordamos algunas definiciones concernientes a las matrices sobre anillos polinomiales, para mayor detalle invitamos al lector a consultar las siguientes referencias, Kailat (1980), Adkins y Weintraub (1999), Bhaskara (2002). Para cualquier matriz $E(\delta) \in \mathbb{R}^{s\times q}[\delta]$, existen dos matrices invertibles $U(\delta) \in \mathbb{R}^{s\times s}$ y $W(\delta) \in \mathbb{R}^{q\times q}[\delta]$, que reduce a $E[\delta]$ en su forma normal de Smith:

$$U(\delta)E(\delta)W(\delta) = \begin{bmatrix} diag\left(\psi_1(\delta)\cdots\psi_r(\delta)\right) & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} \qquad (3)$$

donde $r = \operatorname{rank} E(\delta)$.

Definición 1 (Factores invariantes)**.** *Los términos no nulos $\{\psi_i\}$ en la forma normal de Smith de la matriz $E(\delta)$ son llamados factores invariantes de $E(\delta)$. Usaremos la notación $\operatorname{inv_s} E$ para denotar al conjunto de factores invariantes de E.*

Definición 2 (Matrices unimodulares)**.** *Una matriz $E(\delta) \in \mathbb{R}^{n\times m}[\delta]$ es llamada invertible por la izquierda (o unimodular por la izquierda) si existe una matriz $E^+(\delta) \in \mathbb{R}^{m\times n}[\delta]$ de manera que $E^+(\delta)E(\delta) = I$. Una matriz polinomial invertible por la derecha (o unimodular por la derecha) está definida de manera análoga. De forma obvia, una matriz $E(\delta) \in \mathbb{R}^{n\times n}[\delta]$ es dicha invertible o unimodular si es invertible tanto por la izquierda como por la derecha.*

Recordemos que el concepto de módulo representa una generalización del de espacio vectorial, pero ahora en lugar de un campo tenemos un anillo.

Definición 3 (Cadenas de submódulos)**.** *Dada una cadena ascendente de submódulos de un módulo $\mathcal{M}$, es decir,*

$$\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{M}_i \subseteq \cdots$$

decimos que ésta es una cadena ascendente estacionaria *si, para algún* k, $\mathcal{M}_{k+j} = \mathcal{M}_k$ *para todo* $j \geq 1$. *Una* cadena descendente estacionaria *esta definida de manera análoga, remplazando $\subseteq$ por $\supseteq$ en la cadena anterior. Nosotros trabajaremos con módulos sobre el anillo polinomial $\mathbb{R}[\delta]$.*

3. DESCOMPOSICIÓN EN LA FORMA OBSERVABLE Y DETECTABLE

El primer paso será la construcción de una matriz que será nuestro análogo de la matriz de observabilidad para el caso sin entradas desconocidas. Para esto se define a Δ_k como la matriz generada por el siguiente algoritmo dado en Bejarano y Zheng (2014)

$$\Delta_0(\delta) = C(\delta)$$

Sea $T_1(\delta)$ una matriz unimodular seleccionada de manera que $T_1(\delta)C(\delta)B(\delta) = \begin{bmatrix} 0 \\ F_1(\delta)\end{bmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \Delta_1(\delta) & 0 \\ G_1(\delta) & F_1(\delta)\end{pmatrix} = T_1(\delta)\left(\Delta_0(\delta)A(\delta) \ \ \Delta_0(\delta)B(\delta)\right)$$

Sea $T_{k+1}(\delta)$ una matriz unimodular tal que:

$$T_{k+1}(\delta)\begin{pmatrix} F_k(\delta) \\ \Delta_k(\delta)B(\delta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_k(\delta)\end{pmatrix}$$

Siendo $F_k(\delta)$ una matriz de rango completo.

$$\begin{pmatrix} \Delta_{k+1}(\delta) & 0 \\ G_{k+1}(\delta) & F_{k+1}(\delta)\end{pmatrix} = T_{k+1}(\delta)\begin{pmatrix} G_k(\delta) & F_k(\delta) \\ \Delta_k(\delta)A(\delta) & \Delta_k(\delta)B(\delta)\end{pmatrix}$$

Formando N_k con las filas generadas por cada Δ_i. De esta manera obtenemos la matriz $\Delta_{k+1}(\delta)$, definida de forma implícita.

$$N_k(\delta) \triangleq \begin{pmatrix} \Delta_0(\delta) \\ \vdots \\ \Delta_k(\delta)\end{pmatrix}, \quad \text{para } k \geq 0 \qquad (4)$$

En Bejarano y Zheng (2014) quedó probada la existencia de un entero positivo k^* tal que los factores invariantes de $N_{k^*+i}(\delta)$ son iguales a los factores invariantes de N_{k^*} para todo $i \geq 1$.

Definición 4. *Sea el sistema (2) asociado a la la tripleta $(A(\delta), B(\delta), C(\delta))$. Decimos que el sistema* (2) *es fuertemente observable (SO) si $N_{k^*}(\delta)$ es invertible por la izquierda sobre $\mathbb{R}[\delta]$. Lo anterior es equivalente a que la matriz $N_{k^*}(\delta)$ tenga n factores invariantes constantes.*

La pregunta que nos hacemos es ¿como diseñamos un observador si N_{k^*} no tiene n factores invariantes constantes. Para dar respuesta, necesitamos los siguientes conceptos.

3.1 Subespacio débilmente inobservable

Definimos el submódulo débilmente inobservable $\mathcal{V}^*(\delta)$, como el máximo submódulo que cumple las siguientes condiciones.

$$\begin{aligned} &A(\delta)\mathcal{V}(\delta) \subseteq \mathcal{V}(\delta)) + \operatorname{im}(B(\delta)) \\ &C(\delta)\mathcal{V}(\delta) = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Donde $A(\delta)$, $B(\delta)$ y $C(\delta)$ son las matrices del sistema 2.
Observación 1. *En el caso de sistemas sin retardos a $\mathcal{V}^*$ se le conoce como el subespacio débilmente inobservable. Este subespacio $\mathcal{V}^*$ esta vinculado con la dinámica del sistema (2) de la siguiente manera, si $x_0 \in \mathcal{V}^*$ entonces existe una entrada $u(t)$ tal que $x(t; x_0, u(t)) \in \mathcal{V}^*$ $\forall$ $t \geq 0$, y también $y(t; x_0, u(t)) = 0$ $\forall$ $t \geq 0$. Para el caso de sistemas con retardos conmensurados, $\mathcal{V}^*(\delta)$ ya no cumple con esa propiedad.*

Veamos una forma de encontrar el subespacio $\mathcal{V}^*(\delta)$. Definamos $\mathcal{L}_k(\delta) = \ker(N_k(\delta))$. El siguiente teorema nos ayudará a descomponer el sistema en su parte observable y no observable.
Teorema 1. *Bejarano (2021) La identidad $\mathcal{V}^*(\delta) = \mathcal{L}_{k^*}(\delta)$ es verdadera, si y solo si , $A(\delta)\mathcal{L}_{k^*}(\delta) \subseteq \mathcal{L}_{k^*}(\delta) + \operatorname{im} B(\delta)$.*

La inclusión dada en el teorema 1, se puede expresar en términos matriciales como sigue:

$$\begin{aligned} &A(\delta)L(\delta) = L(\delta)Q(\delta) + B(\delta)R(\delta) \\ &C(\delta)L(\delta) = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Dado que estamos buscando como construir $\mathcal{V}^*(\delta)$, y el Teorema (1) nos da una forma de calcularlo, entonces asumiremos que

A1. La inclusión $A(\delta)\mathcal{L}_{k^*}(\delta) \subseteq \mathcal{L}_{k^*}(\delta) + \operatorname{im} B(\delta)$ es satisfecha.

3.2 Transformación detectable

Asumimos que existe una matriz $L(\delta)$ que satisface 6. En ese caso $\operatorname{im} L(\delta) = \mathcal{V}^*(\delta)$. De las condiciones presentadas en (6), obtenemos la siguiente ecuación:

$$\left(A(\delta)L(\delta) - B(\delta)R(\delta)L^+(\delta)\right)L(\delta) = L(\delta)Q(\delta)$$

Simplificando las matrices como sigue: $F_d(\delta) = R(\delta)L^+(\delta)$ y $P(\delta) = [\, M(\delta)\;\; L(\delta) \,]$

siendo $M(\delta)$ el complemento ortogonal de $L(\delta)$, $P(\delta)$ una matriz unimodular, obtenemos,

$$\begin{aligned} A(\delta)P(\delta) - B(\delta)F_d(\delta)P(\delta) =& P(\delta)\begin{pmatrix} A_{11}(\delta) & 0 \\ A_{21}(\delta) & A_{22}(\delta) \end{pmatrix} \\ C(\delta) =& P(\delta)\,(\, C_1 \;\; 0 \,) \end{aligned}$$

Ahora definimos el siguiente cambio de coordenadas $z(t) = P^{-1}(\delta)x(t)$ y obtenemos la siguientes ecuaciones dinámicas:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11}(\delta) & 0 \\ A_{21}(\delta) & A_{22}(\delta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} B_1(\delta) \\ B_2(\delta) \end{bmatrix} \bar{w} \\ y(t) &= [\, C_1(\delta)\;\; 0 \,]\, z \end{aligned} \tag{7}$$

Donde $z_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $z_2(t) \in \mathbb{R}^{n-n}$ ($n_1 := dim\mathcal{L}_{k^*}(\delta) = dim\mathcal{V}^*$) y $\bar{w} = w(t) + F_d(\delta)P(\delta)z(t)$.

Siguiendo el procedimiento dado en Bejarano (2015), es directo probar que si los factores invariantes de N_{k^*} son constantes y en número menor que n, entonces el sistema asociado a la tripleta $(A_{11}(\delta), B_1(\delta), C_1(\delta))$ es fuertemente observable de acuerdo a la definición (4). Por tanto asumiremos que

A2. Los factores invariantes de la matriz N_{k^*} son constantes.

3.3 Sustitución de las entradas desconocidas

Las siguiente condición nos permiten hacer una sustitución de las entradas desconocidas por información de los estados y la salida. Para esto asumimos que se cumple la siguiente identidad:

A3. $\operatorname{inv_s}\begin{bmatrix} C(\delta)B(\delta) \\ B(\delta) \end{bmatrix} = \operatorname{inv_s}[C(\delta)B(\delta)]$

De manera que podemos calcular una matriz $G(\delta)$ de manera que transforme a $C(\delta)B(\delta)$ en su forma normal de Hermite como sigue.

$$G(\delta)C(\delta)B(\delta) = \begin{bmatrix} V(\delta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Siendo $V(\delta)$ de rango completo.
Por la condición **A3** se garantiza la existencia de una matriz $U(\delta)$ tal que, $U(\delta)C(\delta)B(\delta) = B(\delta)$, para la construcción de esta calculamos $\bar{V}(\delta)$ que cumple con lo siguiente: $\bar{V}(\delta)V(\delta) = B(\delta)$. Finalmente seleccionamos a la matriz $U(\delta)$ como.

$$U(\delta) = \left[\bar{V}(\delta)\;\; 0\right] G(\delta) \tag{8}$$

Ahora veamos el procedimiento para sustituir las entradas desconocidas por información de los estados y la salida. Derivando en el tiempo la salida del sistema (2) y premultiplicando por la matriz $U(\delta)$, obtenemos

$$U(\delta)\dot{y} = U(\delta)C(\delta)A(\delta)x + U(\delta)C(\delta)B(\delta)w$$

Usando la identidad

$$B(\delta)w = U(\delta)\dot{y} - U(\delta)C(\delta)A(\delta)x$$

Sustituyendo la expresión anterior en el sistema (2), obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\dot{x} =& \bar{A}(\delta)x + U(\delta)\dot{y}\\ y =& Cx\end{aligned} \tag{9}$$

El procedimiento anterior lo podemos aplicar directamente al sistema dado en (7). En ese caso las matrices quedan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\bar{A}(\delta) &= \begin{bmatrix} A_{11}(\delta) & 0 \\ A_{21}(\delta) & A_{22}(\delta)\end{bmatrix} - U(\delta)\left[C_1(\delta)A_{11}(\delta)\ 0\right]\\ \bar{C}(\delta) &= \left[\, C_1(\delta)\ 0\,\right]\end{aligned} \tag{10}$$

Si separamos $U(\delta) \in \mathbb{R}^{n\times p}$ en dos submatrices,

$$U(\delta) = \begin{bmatrix} U_1(\delta) \\ U_2(\delta)\end{bmatrix}, \tag{11}$$

con $U_1(\delta) \in \mathbb{R}^{n_1\times p}$ y $U_2(\delta) \in \mathbb{R}^{n-n_1\times p}$, el sistema (7) toma la siguiente forma

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2\end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & 0 \\ \bar{A}_{21} & A_{22}(\delta)\end{bmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2\end{pmatrix} + \begin{bmatrix} U_1(\delta) \\ U_2(\delta)\end{bmatrix}\dot{y}\\ y &= C_1(\delta)\, z_1\end{aligned} \tag{12}$$

Donde $\bar{A}_{11} := A_{11} - U_1(\delta)C_1(\delta)A_{11}(\delta)$ y $\bar{A}_{21} = A_{21}(\delta) - U_2(\delta)C_1(\delta)A_{11}(\delta)$.

Lema 1. *Si las suposiciones A1, A2 y A3 se cumplen, entonces existe a un entero positivo $l^* \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$\mathcal{O}_{l^*}(\delta) = \begin{bmatrix} C_1(\delta) \\ C_1(\delta)\, A_{11}(\delta) \\ \vdots \\ C_1(\delta)\, A_{11}^{l^*}(\delta)\end{bmatrix} \tag{13}$$

es unimodular por la izquierda.

Proof. Sean las matrices $\bar{N}_k$ construidas usando el algoritmo dado más arriba pero ahora usando las matrices de el subsistema $SO\left(A_{11}(\delta), B_1(\delta), C_1(\delta)\right)$. Entonces, tenemos que existe un entero $l^* \in \mathbb{N}$ tal que el rank $\left(\bar{N}_{k^*}(\delta)\right) = n_1$ es unimodular sobre $\mathbb{R}[\delta]$. Ahora, en la primera iteración del algoritmo citado tenemos

$$\begin{pmatrix} \Delta_1(\delta) & 0 \\ G_1(\delta) & F_1(\delta)\end{pmatrix} = T_1(\delta)\left(\Delta_0(\delta)A_{11}(\delta)\ \Delta_0(\delta)B_1(\delta)\right)$$

Existen matrices dos matrices $S_1(\delta)$ y $R_1(\delta)$ sobre $\mathbb{R}[\delta]$ tal que, $\Delta_1(\delta) = S_1(\delta)C(\delta)$ y $G_1(\delta) = R_1(\delta)C(\delta)$. En la segunda iteración, obtenemos

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \Delta_2(\delta) & 0 \\ G_2(\delta) & F_2(\delta)\end{bmatrix} &= T_2(\delta)RF_1(\delta)\\ & T_2\left(R_1(\delta)\, C(\delta)\ F_1(\delta)\right)\end{aligned}$$

Donde

$$RF_1(\delta) = \begin{pmatrix} R_1(\delta)\, C(\delta) & F_1(\delta) \\ S_1(\delta)\, C_1(\delta)\, A_{11}(\delta) & S_1(\delta)\, C_1(\delta)\, B_1(\delta)\end{pmatrix}$$

Es posible observar que existen matrices $S_2(\delta)$ y $R_2(\delta)$, formando $\Delta_2 = S_2(\delta)\begin{bmatrix} C_1(\delta) \\ C_1(\delta)\, A_{11}(\delta)\end{bmatrix}$ y $G_2(\delta) = R_2(\delta)\begin{bmatrix} C_1(\delta) \\ C_1(\delta)\, A_{11}(\delta)\end{bmatrix}$. Siguiendo con esta idea, ahora se busca realizar la siguiente iteración obteniendo:

$$\begin{bmatrix} \Delta_3(\delta) & 0 \\ G_3(\delta) & F_3(\delta)\end{bmatrix} = T_3(\delta)RF_2(\delta)$$

Con

$$\Delta_3(\delta) = S_3(\delta)\begin{bmatrix} C_1(\delta) \\ C_1(\delta)A_{11}(\delta) \\ C_1(\delta)A_{11}^2(\delta)\end{bmatrix}$$

y $G_3(\delta) = \begin{bmatrix} C(\delta) \\ C(\delta)A(\delta) \\ C(\delta)A_{11}^2(\delta)\end{bmatrix}$ De manera que por simple inducción en la iteración l^* existirá la matriz $S_{l^*}(\delta)$ tal que.

$$\Delta_{l^*}(\delta) = S_{l^*}(\delta)\begin{bmatrix} C_1(\delta) \\ C_1(\delta)\, A_{11}(\delta) \\ \vdots \\ C_1(\delta)\, A_{11}^{l^*}(\delta)\end{bmatrix}$$

Con $l^* \in \mathbb{N}_0$. De este modo la matriz $\bar{N}_{l^*}(\delta)$ puede ser expresada como $\bar{N}_{l^*}(\delta) = S(\delta)\mathcal{O}_{l^*}(\delta)$, donde $S(\delta)$ depende de $S_i(\delta)$. Por lo tanto, si la suposición A2 se cumple para el sistema (2), N_{l^*} tiene una inversa por la izquierda $\left[\bar{N}_{l^*}(\delta)\right]_L^{-1}$ tal que.

$$I = \left[\bar{N}_{l^*}(\delta)\right]_L^{-1}\bar{N}_{l^*} = \left[\bar{N}_{l^*}(\delta)\right]_L^{-1} S(\delta)\mathcal{O}_{l^*}(\delta)$$

Esto implica que $\left[\bar{N}_{l^*}(\delta)\right]_L^{-1} S(\delta)$ es una inversa por la izquierda de $\mathcal{O}_{l^*}$. □

4. DISEÑO Y JUSTIFICACIÓN DEL OBSERVADOR

Del Lema (1), es directo probar que la matriz $\bar{\mathcal{O}}_{l^*}(\delta) = \begin{bmatrix} C_1(\delta) \\ C_1(\delta)\, \bar{A}_{11}(\delta) \\ \vdots \\ C_1(\delta)\, \bar{A}_{11}^{l^*}(\delta)\end{bmatrix}$ es invertible por la izquierda, es decir tiene n_1 factores invariantes. Diremos que el sistema es (2) es fuertemente detectable si se cumplen las suposiciones A1-A3 y ademas la dinámica del sistema $\dot{w}_2 = A_{22}(\delta)\, w$ es estable.

Teorema 2. *Si el sistema (2) es fuertemente detectable y entonces el observador dado por*

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = A_{10}\hat{\bar{z}}_1 + L\left(y - C_0\bar{z}_1\right) + F(\delta)y \\ \hat{\bar{z}}_1 = \xi_1 + \bar{U}_1(\delta)y \\ \dot{\hat{\bar{z}}}_2 = \bar{A}_{21}\hat{\bar{z}}_1 + A_{22}(\delta)\hat{\bar{z}}_2 \\ \hat{x} = P\begin{pmatrix} T_o^+\hat{\bar{z}}_1 \\ \hat{\bar{z}}_2\end{pmatrix}\end{cases} \tag{14}$$

converge a los estados originales si la matriz L se escoge tal que $A_{10} - LC_0$ sea Hurwitz (lo cual siempre es posible). Donde

$$[\, F_{l^*} \ \cdots \ F_0 \,] = F := C_1(\delta)\, A_{11}^{l^*+1}(\delta)\, \mathcal{O}_{l^*}^{+}(\delta) \tag{15}$$

$$T_o(\delta) = \begin{bmatrix} I_p & 0 & & 0 \\ -F_0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -F_{l^*} & \cdots & -F_0 & I_p \end{bmatrix} \bar{\mathcal{O}}_{l^*}(\delta) \tag{16}$$

$$A_{10} = \begin{bmatrix} 0 & I_p & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & I_p \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ C_0 = [\, I_p \ 0 \ \cdots \ 0 \,]$$

y $T_o^{+}(\delta)$ es una inversa por la izquierda de $T_o(\delta)$.

Proof. De acuerdo con Hou y Muller (1992), al definir $\bar{z}_1 = T_o z_1$ obtenemos la siguiente dinámica

$$\dot{\bar{z}}_1 = A_{10}\bar{z}_1 + F(\delta)y + U_1(\delta)\dot{y}$$

Así definiendo $e_1 = \bar{z}_1 - \hat{\bar{z}}_1$ y $e_2 = \bar{z}_2 - \hat{\bar{z}}_2$ tenemos

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = A_{10}z + F(\delta)y + \bar{U}_1(\delta)\dot{y} - \dot{\xi} - \bar{U}_1(\delta)\dot{y} \\ \dot{e}_2 = \bar{A}_{21}z_1 + A_{22}z_2 - \bar{A}_{21}\hat{z}_1 - A_{22}(\delta)\hat{z}_2 \end{cases}$$

Simplificando: $\begin{cases} \dot{e}_1 = (A_{10} - LC_0)\, e_1 \\ \dot{e}_2 = A_{22}(\delta)e_2 + \bar{A}_{21}e_1 \end{cases}$ □

5. EJEMPLO

A continuación se presenta un sistema *Fuertemente Detectable* con la finalidad de observar el comportamiento del error de estimación.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t-h)$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-2h) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t-3h)$$
$$+ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w(t-h)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t)$$

Como podemos observar, el análisis del sistema en esta forma no nos ayuda a establecer las condiciones presentadas en este trabajo, por lo tanto, para resolver este problema haremos uso del operador de retardo δ, de modo que obtenemos lo siguiente.

$$A(\delta) = \begin{bmatrix} -\delta & 1-\delta & -\delta & -1+\delta \\ 0 & \delta^3 & 2+2\delta & -2-\delta^3 \\ \delta & \delta+\delta^2 & 1 & -\delta-\delta^2 \\ -\delta & -\delta+\delta^3 & 1+\delta & -2+\delta-\delta^3 \end{bmatrix}$$

$$B(\delta) = \begin{bmatrix} 1-\delta \\ \delta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Trabajando con un retardo en el tiempo de $h = 0.33$, una entrada desconocida definida por: $w(t) = 0.5sen(10t)$, se obtiene lo siguiente. La matriz $N_{k^*}(\delta)$ dada en (4) para verificar sus factores invariantes constantes.

$$N_{k^*}(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \delta & 0 & 1 & 0 \\ \delta-\delta^2 & \delta+\delta^2 & 1-\delta & -\delta(1+\delta) \end{bmatrix}$$

Con unos factores invariantes $\mathrm{inv_s} = [1 \ 1 \ 1 \ 0]'$ vemos que el sistema no es fuertemente observable. Realizando la descomposición para obtener el subsistema SO y analizar su complemento obtenemos lo siguiente.

$$\bar{A}(\delta) = \begin{bmatrix} -\delta & 1+\delta & 1 & 0 \\ -\delta^2 & \delta+\delta^2 & 1+\delta & 0 \\ -\delta^2+\delta^3 & 2\delta+\delta^2-\delta^3 & 1-\delta^2 & 0 \\ -2\delta-\delta^2 & \delta+\delta^2+\delta^3 & 1+\delta & -2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}(\delta) = \begin{bmatrix} 1 \\ \delta \\ \delta-\delta^2 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{C}(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora se busca realizar la sustitución de las entradas desconocidas, para esto es necesario la matriz $U(\delta)$ presente en (8) siendo esta: $U(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 0 \\ \delta-\delta^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Llevando ahora al sistema en su forma normal observable mediante $F(\delta)$ y $T(\delta)$ definidas en (15), (16).

$$F(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-\delta \\ 0 & 0 \\ 0 & \delta+\delta^2 \end{bmatrix} \quad T(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1+\delta & 1 \end{bmatrix}$$

Ademas realizando un cambio de base en la matriz $\bar{U}(\delta) = T(\delta)U(\delta)$, (esto debido a la forma normal observable del sistema SO)

$$\bar{U}(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Reemplazando las matrices en el observador (14) podemos obtener las siguientes gráficas correspondientes al error porcentual definido como $e_z = \frac{|z-\hat{z}|}{\|z\|}$.

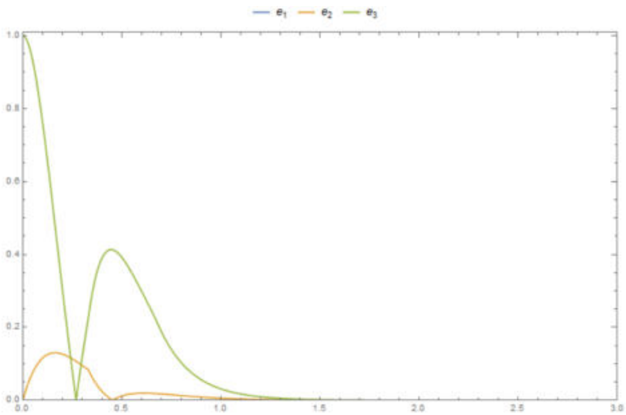

Fig. 1. Error de estimación de los estados z_1, z_2 y z_3

Como ya se había previsto, el subsistema fuertemente observable cuenta con un error que tiende a cero conforme el tiempo tiende a infinito. En la Figura 1 puede observarse las trayectorias que siguen los errores de estimación correspondientes, mostrando algunas variaciones que tocan con el eje de las abscisas resultado de alguno cruces entre las trayectorias del sistema nominal con las trayectorias del observador.

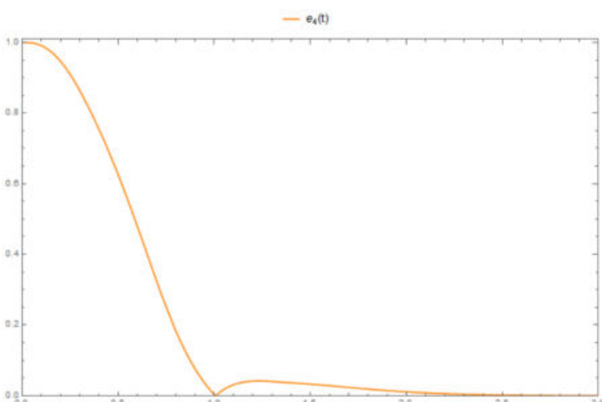

Fig. 2. Error de estimación del estado z_4

De igual manera, la trayectoria error de estimación correspondiente al subsistema detectable que podemos apreciar en la Figura 2, se adapta muy bien a lo esperado con el análisis analítico del problema.

CONCLUSIONES

El diseño del observador para el caso detectable de un sistema con retardos y entradas desconocidas presentó grandes retos, esto debido a la complejidad de trabajar en el anillo de los polinomios. Uno de los aportes de este trabajo fue el diseño de un observador para el caso fuertemente observable. Obteniendo un modelo bastante simplificado para el observador.

Analíticamente se comprobó en la Sección 4 la convergencia de los errores de estimación, mostrando en la dinámica de $\dot{e}_2$ una matriz multiplicada por e_1 el cual consideramos como una perturbación desvaneciente que no altera la estabilidad de e_2, por tal motivo, podemos decir que si $A_{22}(\delta)$ es estable, el sistema será detectable.

AGRADECIMIENTOS

F. J. Bejarano agradece el apoyo del proyecto SIP 20231425

REFERENCES

Adkins WA. and Weintraub SH. (1999) , *Algebra, an approach via module theory*, corr. 2nd printing.

Bhaskara Rao KPS, (2002) *Theory of generalized inverses over commutative rings*, vol. 17, CRC Press.

Bejarano F. J. and Zheng G. (2014) *Observability of linear systems with commensurate delays and unknown inputs*, Automatica, vol. 50, no. 8, pp. 2077−2083.

Bejarano F. J. (2015) *Detectability of linear systems over a principal ideal domain with unknown inputs*, Systems Control Letters, vol. 78, pp. 1−7.

Bejarano F. J. (2021) *Zero dynamics normal form and disturbance decoupling of commensurate and distributed time-delay systems*, Automatica, vol. 129, pp. 109634.

Brown, W.C., (1993) *Matrices Over Commutative Rings. Pure and Applied Mathematics*, Marcel Dekker, Inc, New York, Basel, Hong Kong.

Hou M. and Muller P. C. (1992) *Design of observers for linear systems with unknown inputs*, IEEE Transactions on automatic control, vol. 37, no. 6, pp. 871−875.

Kailath T. (1980) *Linear systems*, vol. 156, Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ.

Salamon D., (1980) *Observers and duality between observation and state feedback for time delay systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 25, no. 6, pp. 1187−1192.

Perdon, A.M., Anderlucci, M., (2010) *Disturbance decoupling problem for a class of descriptor systems with delay via systems over rings*, IMA Journal fo Mathematical Control and Information 27.

Lee EB and Olbrot A, (1981) *Observability and related structural results for linear hereditary systems*, International Journal of Control, vol. 34, no. 6, pp. 1061−1078, 1981.

Zheng et al. (2015), *Unknown input observer for linear time-delay systems*, Automatica, vol. 61, pp. 35−43.