

# Methodology to Obtain the State Feedback Gains for Lateral Control of the Autonomous Vehicles

Jesús Rubén Gómez Gómez\* Israel Ulises Ponce Monarrez\*  
Luis Ricardo Vidal Portilla\*

\*Instituto de Ingeniería y Tecnología, Universidad Autónoma de  
Ciudad Juárez, Cd. Juárez, Chih.

\* e-mail: [al228206@alumnos.uacj.mx](mailto:al228206@alumnos.uacj.mx), [israel.ulises@uacj.mx](mailto:israel.ulises@uacj.mx),  
[lvidal@uacj.mx](mailto:lvidal@uacj.mx)

---

**Abstract:** This paper introduces a methodology for deriving state feedback gains aimed at enhancing the lateral control of Autonomous Vehicles (AV). Autonomous Vehicles represent a groundbreaking technological advancement falling under the category of intelligent transportation systems. In developed nations, AVs are regarded as a potential solution to mitigate injuries resulting from road accidents. The AV system encompasses three distinct modules: Perception, Reference Generation, and Control. Among these, the Control module plays a pivotal role in ensuring the autonomy of the vehicle. Within the realm of existing literature, various lateral control systems have been documented. However, those relying on state feedback mechanisms have failed to provide a well-defined and systematic methodology for acquiring the requisite control gains. Furthermore, these approaches have not addressed the issue of varying vehicle speeds in the context of gain determination. Hence, the primary objective of this article is to present a comprehensive methodology for the systematic derivation of appropriate control gains for the AV lateral control system. The proposed methodology commences by positioning the system's poles in accordance with the desired eigenvalues. Subsequently, the system is subjected to different sets of poles. Finally, an in-depth analysis of input and output data is conducted, with the aim of identifying the poles that most effectively minimize system errors.

**Keywords:** Autonomous Vehicles, Lateral Control, Poles Placement, State Feedback, Path Tracking, Bicycle Model.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Los vehículos autónomos (VA) son una tecnología disruptiva y una vía prometedora para los sistemas de transporte inteligente, según afirman los miembros de la sociedad IEEE Boudali et al. (2018). El objetivo principal es mejorar la seguridad vial y proveer mayor movilidad a un rango más amplio de personas en el mundo Nadafianshahabadi et al. (2021). Tan solo en México, las lesiones por accidentes viales se encuentran entre las 5 principales causas de muerte para personas entre 1 y 64 años Hajar et al. (2004). Conducción bajo la influencia del alcohol, uso del celular, cansancio y exceso de velocidad son las principales causas de los accidentes viales Martínez et al. (2018). La solución para los países desarrollados es apostar por la tecnología de los VA. Sin embargo, en países en desarrollo (como México) existe poca investigación relacionada a los sistemas de transporte inteligente. De acuerdo con la empresa de servicios de auditoría KPMG, México se

encuentra entre los 20 principales países preparados para implementar los VA Izquierdo-Reyes et al. (2018).

El concepto básico de autonomía de un vehículo refiere a la sustitución parcial o total de la intervención humana en el proceso de conducción por dispositivos electrónicos y/o mecánicos. Un marco de referencia de niveles de autonomía ha sido definido por la Sociedad de Ingenieros Automotrices (SAE, por sus siglas en inglés) en 6 niveles, donde el nivel 0 presenta nula autonomía y el nivel 5 presenta una total autonomía del vehículo sin ninguna intervención humana y sin restricciones. En la actualidad, los vehículos Tesla cumplen con un nivel 3 de autonomía según la escala del SAE porque pueden tener conducción autónoma bajo ciertas restricciones. Sin embargo, en algunos casos se requiere la intervención humana Izquierdo-Reyes et al. (2018).

En la literatura, los autores proponen tres módulos principales para la concepción de un VA: la Percepción, la Generación de Referencias y el Control Laghmar et al.

(2019). El módulo de Percepción proporciona toda la información relacionada al vehículo (velocidad, orientación) y su entorno (señalamientos, peatones, automóviles, carretera). Posteriormente, dicha información es utilizada por el módulo de Generación de Referencias para crear la referencia geométrica de la trayectoria y el perfil de velocidad adecuado. Por último, el módulo de Control debe garantizar la autonomía del vehículo. El Control toma como punto de partida la referencia generada en los previos módulos. Luego, el Control compensa la diferencia entre la referencia generada y la posición actual del vehículo (comúnmente conocido como error). Dicha compensación es aplicada mediante señales de salida que ayudan a la reducción del error. Los tres módulos en conjunto aseguran que el VA tenga una autonomía total.

Distintos métodos de control lateral pueden ser encontrados en la literatura. Entre los métodos más utilizados de control lateral se encuentra el controlador por retroalimentación de estados. Dicho controlador es simple de aplicar y tiene como ventajas el lidiar con perturbaciones externas, con errores de modelado y con ruido de los sensores. Además, gracias a estas ventajas el controlador por retroalimentación de estados permite utilizar modelos linealizados para su implementación sin comprometer la autonomía del VA. El controlador por retroalimentación de estados utiliza ganancias que compensan los estados del sistema para asegurar que el error entre la referencia y el estado actual sea cercano o igual a cero. Los artículos revisados en la literatura sobre el control por retroalimentación de estados no muestran una metodología clara para obtener los valores de ganancias para el control de los vehículos autónomos. En Li et al. (2018) y Li et al. (2017), los autores solo formulan la expresión del controlador lateral sin presentar la forma de obtención y los valores de ganancia del controlador. En Kapania and Gerdes (2015), un controlador por retroalimentación de estados es tomado de otro autor y no proponen una metodología para obtener las ganancias. Los autores Kritayakirana and Gerdes (2012) presentan un controlador por retroalimentación de estados formulado con un modelo de errores y los valores de las ganancias están disponibles. Sin embargo, no se presenta una metodología clara de la obtención de los valores de ganancia. Por último, los autores Boudali et al. (2017) proponen una estrategia de control lateral que formula claramente la implementación del método por retroalimentación de estados, donde la matriz de ganancias  $K$  que es obtenida a partir de la ecuación diferencial de Riccati. Sin embargo, las ganancias no son sometidas a diferentes velocidades.

El objetivo principal de este artículo de investigación es proponer una metodología para obtener las ganancias para el controlador por retroalimentación de estados en diversas velocidades para los VA. Como primer paso de la metodología, se obtienen los valores propios del sistema, los cuales sirven de referencia para proponer distintos polos para el sistema en lazo cerrado. Después de múltiples iteraciones, el mejor posicionamiento de

polos es definido para cada velocidad. Finalmente, se propone una discusión y un análisis sobre la información obtenida. El artículo se estructura de la siguiente manera: en la Sección 2, se muestra el modelo dinámico utilizado como planta para las simulaciones. En la Sección 3, se muestra el diseño y la implementación del controlador por retroalimentación de estados. Luego, en la Sección 4 se muestran los pasos de la metodología en conjunto con las simulaciones. Finalmente, en la Sección 5 se dan las conclusiones.

## 2. MODELO DINÁMICO

Esta sección describe el modelo dinámico del vehículo utilizado para simular el comportamiento del vehículo (planta). El modelo utilizado es bien conocido en la literatura como el modelo bicicleta y fue propuesto por el autor Rajamani (2012). Este modelo es una versión linealizada que describe la dinámica lateral del vehículo en dos grados de libertad: posición lateral  $y$  y orientación lateral  $\psi$  del vehículo. El modelo bicicleta parte del concepto del autor Ackerman donde el vehículo es representado como una estructura de cuatro ruedas unidas entre sí a través de ejes laterales y longitudinales. La idea del modelo de bicicleta es agrupar las dos ruedas delanteras y las dos ruedas traseras del vehículo en una sola rueda ubicada en el centro del eje delantero y trasero respectivamente. Como resultado, se obtiene una simetría de una bicicleta. A partir de esta simetría, el autor Rajamani (2012) ha propuesto el modelo de dinámica lateral que se muestra en la Figura 1. El modelo bicicleta propone dos salidas dinámicas  $y$  y  $\psi$  tomando como entradas un ángulo de dirección  $\delta$  y una velocidad longitudinal  $V_x$ .

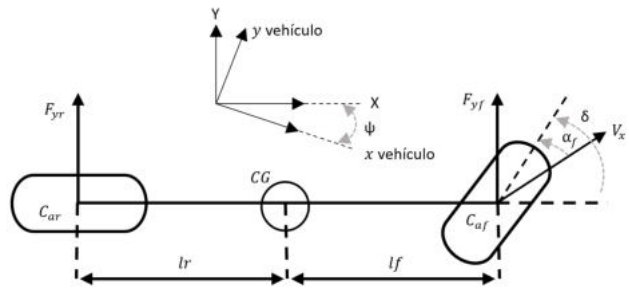


Figura 1. Dinámica lateral del modelo bicicleta, Rajamani (2012).

Aplicando la segunda ley de Newton en el modelo bicicleta, se obtienen las siguientes ecuaciones:

Rajamani (2012):

$$m(\ddot{y} + \dot{\psi}V_x) = F_{yf} + F_{yr} \quad (1)$$

$$I_z\ddot{\psi} = l_f F_{yf} - l_r F_{yr} \quad (2)$$

donde la sumatoria de fuerzas ( $F_{yf} + F_{yr}$ ) es igual a la masa ( $m$ ) por la aceleración ( $\ddot{y} + \dot{\psi}V_x$ ) y la suma de momentos ( $l_f F_{yf} - l_r F_{yr}$ ) es igual a la inercia por la

aceleración angular ( $I_z \ddot{\psi}$ ). Sin embargo, la intención del control lateral es tener el modelo bicicleta en términos de la posición lateral  $y$  y la orientación lateral  $\psi$  del vehículo. Por lo tanto, despejando las ecuaciones (1) y (2) se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\ddot{y} = \frac{F_{yf} + F_{yr}}{m} - \dot{\psi} V_x \quad (3)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{l_f F_{yf} - l_r F_{yr}}{I_z} \quad (4)$$

Considerando que las fuerzas de las llantas  $F_{yf}$  y  $F_{yr}$  tienen un corpotamiento lineal:

$$F_{yf} = 2C_{af}\alpha_f \quad , \quad F_{yr} = 2C_{ar}\alpha_r \quad (5)$$

donde  $C_{af}$  y  $C_{ar}$  son los coeficientes de rigidez de la llantas delantera y trasera respectivamente, mientras que  $\alpha_f$  y  $\alpha_r$  son los ángulos de deslizamiento delantero y trasero respectivamente. Dichos ángulos son calculados de la diferencia entre el eje  $V_x$  y el centro de la llanta, como se muestra en la figura 1. El modelo de bicicleta considera que el vehículo es de dirección delantera y el ángulo de dirección no puede superar los quince grados ( $\delta < 15^\circ$ ). Por lo tanto, los ángulos de deslizamiento  $\alpha_f$  y  $\alpha_r$  se pueden aproximar como:

$$\alpha_f = \delta - \frac{\dot{y} + l_f \dot{\psi}}{V_x} \quad , \quad \alpha_r = -\frac{\dot{y} - l_r \dot{\psi}}{V_x} \quad (6)$$

y sustituyendo la ecuación (6) en (5), para luego sustituir la (5) en las ecuaciones (3) y (4), se obtienen las siguientes ecuaciones dinámicas:

$$\ddot{y} = \frac{2C_{af}}{m} \delta - \frac{2C_{af} + 2C_{ar}}{mV_x} \dot{y} - \left( V_x + \frac{2C_{af}l_f + 2C_{ar}l_r}{mV_x} \right) \dot{\psi} \quad (7)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{2C_{af}l_f}{I_z} \delta + \frac{2C_{af}l_f - 2C_{ar}l_r}{V_x I_z} \dot{y} - \frac{2C_{af}l_f^2 + 2C_{ar}l_r^2}{V_x I_z} \dot{\psi} \quad (8)$$

Obteniendo los estados en términos de posición y orientación, se puede definir el siguiente modelo de espacio de estados:

$$\dot{x}_v = Ax_v + B\delta \quad (9)$$

tal que:

$$\dot{x}_v = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2C_{af} + 2C_{ar}}{mV_x} & 0 & -V_x - \frac{2C_{af}l_f - 2C_{ar}l_r}{mV_x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2C_{af}l_f - 2C_{ar}l_r}{I_z V_x} & 0 & -\frac{2C_{af}l_f^2 + 2C_{ar}l_r^2}{I_z V_x} \end{bmatrix}}^A x_v + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2C_{af}}{m} \\ 0 \\ \frac{2C_{af}l_f}{I_z} \end{bmatrix}}^B \delta \quad (10)$$

donde  $x_v = [y \quad \dot{y} \quad \psi \quad \dot{\psi}]^T$  son las variables de estado y  $\delta$  la entrada del sistema. Dicho sistema de estados (10) representa el comportamiento del vehículo. Sin embargo, es necesario graficar dicho comportamiento en un plano de dos dimensiones para ver el desplazamiento del vehículo con respecto a una trayectoria de referencia. Entonces, las siguientes ecuaciones ayudan a graficar el comportamiento del vehículo en un plano de dos dimensiones  $X$  y  $Y$ :

$$\dot{X} = V_x \cos(\psi) - \dot{y} \sin(\psi) \quad (11)$$

$$\dot{Y} = V_x \sin(\psi) + \dot{y} \cos(\psi) \quad (12)$$

### 3. DISEÑO DEL CONTROL LATERAL

En esta sección se describe el diseño del control lateral para el seguimiento de una trayectoria. El controlador está basado en el método de retroalimentación de estados. La intención del controlador por retroalimentación de estados es obtener las ganancias que ayuden a compensar el sistema. Partiendo del supuesto que el objetivo de un vehículo autónomo es seguir una referencia conocida (trayectoria), el controlador debe asegurar que la trayectoria del vehículo sea lo más cercano posible a la trayectoria de referencia ( $error \approx 0$ ). Por lo tanto, un modelo dinámico para el cálculo de los errores es requerido. El autor Rajamani (2012) propone el modelo dinámico de errores presentado en la Figura 2 y las ecuaciones dinámicas (13) y (14):

$$\dot{e}_y = \dot{y} + V_x(\dot{\psi} - \dot{\psi}_{ref}) \quad (13)$$

$$\dot{e}_\psi = (\dot{\psi} - \dot{\psi}_{ref}) \quad (14)$$

donde  $\dot{e}_y$  y  $\dot{e}_\psi$  son las derivadas de la posición lateral y orientación lateral respectivamente. Las ecuaciones que describen  $e_y$  y  $e_\psi$  se pueden deducir de la Figura 2 como:

$$e_y = (y - y_{ref}) \cos \psi - (x - x_{ref}) \sin \psi \quad (15)$$

$$e_\psi = (\psi - \psi_{ref}) \quad (16)$$

donde  $x_{ref}$  y  $y_{ref}$  son las coordenadas, y  $\psi_{ref}$  es la orientación de la trayectoria de referencia. Aplicando la

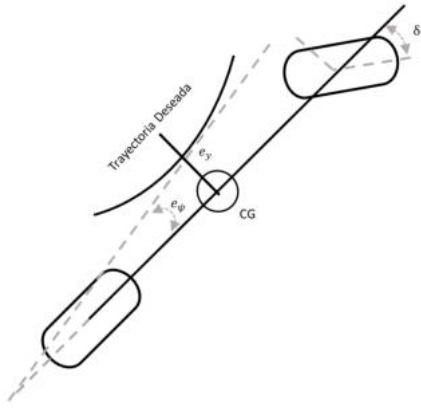


Figura 2. Modelo bicicleta en términos de errores dinámicos, Rajamani (2012).

formulación del espacio de estados, se obtiene la siguiente representación:

$$\dot{e} = A_m e + B_m \delta \quad (17)$$

A partir de las ecuaciones (13), (14), (15) y (16) se obtiene el siguiente modelo dinámico de errores en representación de espacio de estados:

$$\dot{e} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2C_{af}+2C_{ar}}{mV_x} & \frac{2C_{af}+2C_{ar}}{m} & -\frac{2C_{af}l_f+2C_{ar}l_r}{mV_x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2C_{af}l_f-2C_{ar}l_r}{I_zV_x} & \frac{2C_{af}l_f-2C_{ar}l_r}{I_z} & -\frac{2C_{af}l_f^2+2C_{ar}l_r^2}{I_zV_x} \end{bmatrix}}_{A_m} e + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2C_{af}}{m} \\ 0 \\ \frac{2C_{af}l_f}{I_z} \end{bmatrix}}_{B_m} \delta \quad (18)$$

donde  $e = [e_y \quad \dot{e}_y \quad e_\psi \quad \dot{e}_\psi]^T$  son las variables de estado y  $\delta$  la entrada del sistema.

### 3.1 Trayectoria

En la literatura se pueden encontrar múltiples trayectorias utilizadas como referencia para probar el desempeño de un controlador. Sin embargo, la trayectoria propuesta por los autores Falcone et al. (2007) se usará como referencia ya que es una de las más utilizadas en la literatura. La trayectoria simula que el vehículo se encuentra en una situación donde está evadiendo un objeto y es representada por las siguientes ecuaciones:

$$Y_{ref}(X) = \frac{d_{y1}}{2}(1 + \tanh z_1) - \frac{d_{y2}}{2}(1 + \tanh z_2) \quad (19)$$

$$\psi_{ref}(X) = \arctan \left( d_{y1} \left( \frac{1}{\cosh(z_1)} \right)^2 \left( \frac{1,2}{d_{x1}} \right) - d_{y2} \left( \frac{1}{\cosh(z_2)} \right)^2 \left( \frac{1,2}{d_{x2}} \right) \right) \quad (20)$$

donde  $z_1 = \frac{2,4}{(X-27,19)}(X - 27,19) - 1,2$ ,  $z_2 = \frac{2,4}{21,95}(X - 56,45) - 1,2$ ,  $d_{x1} = 25$ ,  $d_{x2} = 21,95$ ,  $d_{y1} = 4,05$  y  $d_{y2} = 5,7$ .

### 3.2 Retroalimentación de estados

El controlador por retroalimentación de estado se define como un control de lazo cerrado que compensa los errores por medio de ganancias (comúnmente definidos como  $K$ 's). El objetivo del controlador es asegurar que el sistema llegue a la referencia deseada. La representación de bloques es mostrada en la Figura 3.

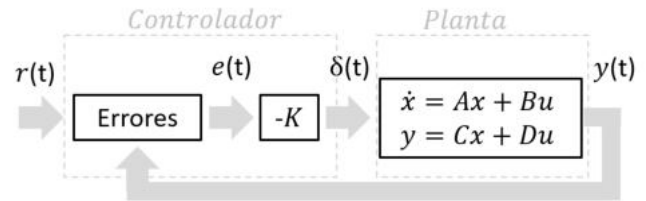


Figura 3. Representación de bloques: controlador por retroalimentación de estados Lekkas (2014).

El sistema completo consiste en una planta que integra la dinámica del vehículo, el controlador con sus ganancias  $K$ 's, la referencia de entrada definida como  $r(t)$  y las salidas del sistema  $\dot{e}$  Lekkas (2014). Por lo tanto, la entrada del sistema  $\delta$  se puede definir como:

$$\delta = -Ke \quad (21)$$

donde  $e$  representa el modelo de errores presentado en la ecuación como espacio de estados (18).

Una propiedad del controlador por retroalimentación de estados es que los polos del sistema pueden ser colocados de múltiples formas para obtener una salida deseada (más rápido, más lento). Es decir, la colocación de polos influirá directamente en la respuesta del sistema.

Tabla 1. Parámetros del vehículo

Símbolo	Parámetro	Valor
$m$	Masa del vehículo	1,346 (kg)
$I_z$	Inercia del vehículo	3,000 (kgm <sup>2</sup> )
$l_f$	Distancia del frente al CG	1.578 (m)
$l_r$	Distancia de atrás al CG	1 (m)
$C_{af}$	Coficiente de rigidez delantero	105,700 (N/rad)
$C_{ar}$	Coficiente de rigidez trasero	75,000 (N/rad)

### 3.3 Parámetros del vehículo

Los parámetros del vehículo utilizados en este documento son basados en un vehículo convencional sedan y se muestran en la Tabla 1.

#### 4. METODOLOGÍA

En esta sección se describe la metodología propuesta para obtener los valores de la matriz de ganancia  $K$  del controlador por retroalimentación de estados. Como se mencionó en las secciones anteriores, el modelo dinámico de errores cuenta con cuatro estados: error de orientación y posición lateral, y sus derivadas. Por lo tanto, el controlador por retroalimentación debe compensar los cuatro errores por medio de cuatro ganancias  $K$ . La metodología para obtener las ganancias se muestra en la Figura 4.



Figura 4. Representación de bloques: metodología para obtener los valores de ganancia  $K$ .

El primer paso, es definir la velocidad del vehículo. La velocidad será constante durante toda la simulación. Una vez obtenida la simulación, se sacaron los valores propios del equipo. Los valores propios serán el punto de partida del posicionamiento de los polos. Diferentes polos serán probados con el objetivo de obtener las ganancias óptimas que minimicen los errores. Cabe mencionar que la entrada  $\delta$  no debe exceder los  $15^\circ$  para no sobrepasar los límites del modelo bicicleta. Todas las simulaciones y la obtención de datos se realizaron utilizando el software *MatLab – Simulink*.

##### 4.1 Velocidad $V_x$

Las velocidades definidas para obtener las ganancias comienzan 10 km/h hasta los 50 km/h. Esto debido a que Rajamani (2012) afirma que el modelo bicicleta es funcional y controlable a bajas velocidades. Por lo tanto, las simulaciones se limitarán a una velocidad máxima de 50 km/h. En cada simulación la velocidad será tomada como una constante.

##### 4.2 Valores propios del sistema

El objetivo de obtener los valores propios del sistema es saber si el sistema es controlable y estable. En este punto, es claro que el modelo bicicleta es controlable a bajas velocidades. Sin embargo, saber los valores propios a las diferentes velocidades previamente definidas puede servir como guía para colocar los polos del sistema.

Por lo tanto, los valores propios de 10 km/h hasta 50 km/h subiendo 10 km/h en cada iteración, es mostrada en la siguiente Tabla 2. Analizando los valores propios correspondientes a los cuatro estados, dos valores conservan el numero cero en todas las iteraciones. Estos ceros muestran que el sistema puede ser estable o inestable. Además, mientras la velocidad va incrementando, los valores propios se acercan a cero, lo cual indica que el sistema es más susceptible a perturbaciones que pueden

provocar su inestabilidad. Por lo tanto, se confirma que el sistema funciona mejor a bajas velocidades, como fue mencionado anteriormente. Los valores propios obtenidos son una referencia para colocar los polos del sistema.

Tabla 2. Valores propios del modelo bicicleta en la Velocidad del vehículo

Velocidad km/h	Valores Propios			
10	-97.1096	-69.7396	0	0
20	-48.0759	-35.3488	0	0
30	-31.4568	-24.1596	0	0
40	-22.8052	-18.9071	0	0
50	-16.6849 + 0.777i	-16.6849 - 0.777i	0	0

##### 4.3 Posicionamiento de polos

Para encontrar los polos que mejor disminuyan el error, es necesario simular el sistema en lazo cerrado. Para esto, se tomarán como base los valores propios previamente calculados para cada velocidad y a partir de ellos, se proponen los polos. Luego, los polos serán ligeramente ajustados (disminuyendo o incrementando) para obtener valores de las ganancias incrementadas o disminuidas.

Tabla 3. Posicionamiento de polos propuesto para las diferentes velocidades

Num	Posicionamiento de polos
10 km/h	
1	[-60 -50 -3 -2]
2	[-80 -70 -3 -2]
* 3	[-90 -80 -3 -2]
4	[-100 -90 -3 -2]
5	[-110 -100 -3 -2]
20 km/h	
1	[-20 -15 -3.9 -4]
2	[-40 -35 -4 -3.9]
* 3	[-50 -45 -4 -3.9]
4	[-70 -65 -3.9 -4]
5	[-100 -95 -3.9 -4]
30 km/h	
1	[-10 -5 -11 -9]
2	[-20 -15 -11 -10]
* 3	[-40 -35 -11 -10]
4	[-100 -145 -11 -10]
5	[-150 -145 -11 -10]
40 km/h	
1	[-5 -3 -16 -11]
2	[-10 -7 -16 -11]
3	[-15.5 -8 -16 -11]
*4	[-20 -17 -16 -11]
5	[-100 -95 -7-8*i -7+8*i]
50 km/h	
1	[-10 -5 -7-8*i -7+8*i]
* 2	[-20 -15 -7-8*i -7+8*i]
3	[-25 -20 -7-8*i -7+8*i]
4	[-30 -25 -7-8*i -7+8*i]
5	[-35 -30 -7-8*i -7+8*i]

Por último, se analizarán los valores de entrada ( $\delta$ ) y de las salidas ( $e$ ) obtenidos a partir de los valores de ganancia generados por los polos. Este análisis se realizó para todas las velocidades mostradas en la Tabla 2.

Los polos propuestos se muestran en la Tabla 3. El primer posicionamiento de los polos propuestos (marcado con una \*) toma como referencia los valores de propios del sistema, donde los primeros valores corresponden y los otros dos valores, son tomados aleatoriamente (valores  $< 20$ ). El comportamiento del controlador en los últimos dos polos no cambia considerablemente. Sin embargo, es recomendable que el tercer valor sea mayor o igual al cuarto. A partir de este primer posicionamiento, los polos son sometidos a diferentes valores: incrementando y decrementando principalmente los primeros dos polos. Esto, con el objetivo de ver el comportamiento del sistema.

#### 4.4 Obtención de datos

El último paso de la metodología es recopilar la información de las ganancias, de la entrada y la salida del sistema para analizar el comportamiento con los polos propuestos. Para esto, primero se obtienen los valores de las ganancias  $K$  para cada uno de los polos. Los valores de ganancia obtenidos se muestran en la Tabla 4. Luego, las ganancias son aplicadas al sistema para obtener los valores de entrada del sistema ( $\delta$ ) y los valores de salida ( $e_y, \dot{e}_y, e_\psi, \dot{e}_\psi$ ). Dichos valores máximos están enlistados en la Tabla 4 con el objetivo de analizar cuales iteraciones tienen mayor error de orientación  $e_\psi$  y de posición lateral  $e_y$ .

Debido a que el objetivo de esta simulación es el seguimiento de una trayectoria, los polos que tengan un menor error de posición  $e_y$  y de orientación  $e_\psi$  lateral son los más adecuados para el sistema. Por lo tanto, los polos que cumplen con este requerimiento están marcados con \* en la Tabla 4.

#### 4.5 Discusión

Algunos de los polos propuestos llevaron al sistema a la inestabilidad y algunos otros polos superaron los valores de entrada límite ( $\delta > 15$ ). La mayoría de los polos que fueron inestables tuvieron una respuesta lenta (valores bajos de entrada  $\delta$ ) que no alcanzó a minimizar los errores. Sin embargo, también hubo un polo inestable con la respuesta más rápida del sistema. Por lo tanto, la inestabilidad se puede presentar en ambos escenarios: valores de entrada bajos y altos. Además, los valores de ganancias ideales para cada velocidad (que fueron marcados con una \* en 4, varían dependiendo la velocidad. Por lo tanto, en escenarios de la vida real donde los VA están sometidos a diferentes velocidades, el aplicar una ganancia fija no sería lo adecuado porque pondría el VA en estados de inestabilidad o no seguiría adecuadamente la trayectoria. Por lo tanto, lo ideal es aplicar valores de ganancia  $K$  que varíen en tiempo real.

## 5. CONCLUSIONES

El este artículo, se presentó una metodología para obtener las ganancias del controlador por retroalimentación de

estados para los VA. El modelo dinámico utilizado como la planta del sistema fue el modelo de bicicleta. El sistema se sometió a un seguimiento de trayectoria para la obtención de los datos. La metodología propuesta partió de la velocidad del vehículo, diferentes velocidades fueron analizadas con una velocidad máxima de 50 km/h. Luego, los valores propios del sistema fueron obtenidos para cada velocidad, ya que varían. A continuación, varios posicionamientos de polos fueron propuestos tomando como punto de partida, los valores propios del sistema. Por último, los valores de entrada y salida máximos fueron analizados con el objetivo de seleccionar los polos que mejor minimizaron los errores para el seguimiento de una trayectoria. Al final, se presentó una discusión donde se concluye que el sistema puede llegar a inestabilidad en valores bajos y altos de entrada. Además, los valores de las ganancias no pueden ser fijos para diferentes velocidades, como se pudo observar en la información obtenida. Por lo tanto, un futuro trabajo debe proponer ganancias variables para controlar un VA en tiempo real.

## REFERENCIAS

Boudali, M., Orjuela, R., and Basset, M. (2017). A Comparison of Two Guidance Strategies for Autonomous Vehicles. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1), 12539–12544.

Tabla 4. Obtención de datos: matriz de ganancias  $K$ , entrada del sistema  $\delta$  y salidas del sistema  $e$

Num	Matriz $K$	$\delta$	$e_y$	$\dot{e}_y$	$e_\psi$	$\dot{e}_\psi$
10 km/h						
1	0.88 -0.39 1.84 0.14				Inestable	
2	1.65 -0.09 1.60 0.03	3.5	0.01	0.27	2.39	2.39
*3	2.13 0.00 1.70 0.10	3.8	0.00	0.28	2.42	2.42
4	2.66 0.06 1.95 0.26	3.9	0.01	0.29	2.44	2.44
5	3.26 0.07 2.35 0.05	4.6	0.01	0.32	2.44	4.33
20 km/h						
1	0.23 -0.33 2.28 0.16				Inestable	
*2	1.07 -0.01 1.75 0.03	3.6	0.01	0.89	2.27	2.27
3	1.73 0.05 2.26 0.16	4.0	0.03	0.96	2.39	2.39
4	3.50 0.01 4.82 0.81	4.3	0.00	0.92	2.31	2.31
5	7.32 -0.48 12.55 2.77				Inestable	
30 km/h						
1	0.24 -0.14 1.85 0.032				Inestable	
*2	1.63 0.00 1.61 0.00	3.8	0.00	1.93	2.13	2.13
3	7.60 0.23 1.54 0.05	5.4	0.07	2.25	2.48	13.36
4	78.78 0.68 6.40 1.45	19	0.02	2.26	2.16	13.39
5	118.17 0.59 9.91 2.36	27	0.01	2.30	2.15	13.56
40 km/h						
1	0.13 -0.03 1.20 -0.01				Inestable	
*2	0.60 0.00 1.70 0.03	4.3	0.04	3.72	2.14	17.39
3	1.07 0.03 2.05 0.05	4.8	0.13	4.05	3.29	18.92
4	2.95 0.11 2.62 0.05	5.8	0.18	4.52	3.86	21.10
5	53.02 0.77 11.90 0.76	15	0.13	4.21	3.26	19.64
50 km/h						
1	0.27 -0.02 1.60 0.00				Inestable	
2	1.67 0.08 1.72 0.02	6.8	0.46	8.39	6.64	32.43
3	2.79 0.14 1.88 0.04	7.6	0.47	8.89	6.87	34.35
4	4.18 0.19 2.10 0.06	8.3	0.45	9.15	6.76	35.39
*5	5.86 0.25 2.38 0.08	9.0	0.40	9.21	6.45	35.60

- doi:10.1016/j.ifacol.2017.08.2192. URL <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2017.08.2192>.
- Boudali, M., Orjuela, R., Basset, M., and Attia, R. (2018). Emergency Autonomous Vehicle Guidance under Steering Loss. *IEEE Intelligent Vehicles Symposium, Proceedings*, 2018-June(Iv), 2078–2083. doi:10.1109/IVS.2018.8500539.
- Falcone, P., Borrelli, F., Asgari, J., Tseng, H.E., and Hrovat, D. (2007). Predictive active steering control for autonomous vehicle systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1–14.
- Hijar, M., Arredondo, A., Carrillo, C., and Solórzano, L. (2004). Road traffic injuries in an urban area in Mexico: An epidemiological and cost analysis. *Accident Analysis and Prevention*, 36(1).
- Izquierdo-Reyes, J., Curiel-Ramirez, L.A., Bustamante-Bello, R., and Ramirez-Mendoza, R.A. (2018). Perspective of autonomous driving in Mexico. doi:10.1109/ICMEAE.2018.00034.
- Kapania, N. and Gerdes, J. (2015). Design of a feedback-feedforward steering controller for accurate path tracking and stability at the limits of handling. *Vehicle System Dynamics*, 53, 1–18. doi:10.1080/00423114.2015.1055279.
- Kritayakirana, K. and Gerdes, J.C. (2012). Using the centre of percussion to design a steering controller for an autonomous race car. *Vehicle System Dynamics*, 50(sup1), 33–51. doi:10.1080/00423114.2012.672842. URL <https://doi.org/10.1080/00423114.2012.672842>.
- Laghmara, H., Boudali, M.T., Laurain, T., Ledy, J., Orjuela, R., Lauffenburger, J.P., and Basset, M. (2019). Obstacle avoidance, path planning and control for autonomous vehicles. *IEEE Intelligent Vehicles Symposium, Proceedings*, 2019-June(Iv), 529–534. doi:10.1109/IVS.2019.8814173.
- Lekkas, A. (2014). *Guidance and Path-Planning Systems for Autonomous Vehicles*. Ph.D. thesis.
- Li, X., Sun, Z., Cao, D., Liu, D., and He, H. (2017). Development of a new integrated local trajectory planning and tracking control framework for autonomous ground vehicles. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 87, 118–137. doi:<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2015.10.021>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327015004811>. Signal Processing and Control challenges for Smart Vehicles.
- Li, Y., Ni, J., Hu, J., and Pan, B. (2018). The design of driverless vehicle trajectory tracking control strategy. *IFAC-PapersOnLine*, 51(31), 738–745. doi:<https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.10.137>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896318326016>. 5th IFAC Conference on Engine and Powertrain Control, Simulation and Modeling E-COSM 2018.
- Martinez, D., Sánchez-Aguirre, D., and Demmler, M. (2018). Accidentes viales en México y su relación con el horario de verano road accidents in Mexico and its relationship with daylight saving time. doi:10.13140/
- RG.2.2.13733.81127.
- Nadafianshahamabadi, R., Tayarani, M., and Rowan-gould, G. (2021). A closer look at urban development under the emergence of autonomous vehicles: Traffic, land use and air quality impacts. *Journal of Transport Geography*.
- Rajamani, R. (2012). *Vehicle Dynamics and Control*. Mechanical Engineering Series, Springer US, second edition.