

Model based predictive control (MPC) with constraints applied to a multi-predictor scheme for linear delayed systems with an unstable pole.

A. Urquiza Casto,* L. A. Barragan Bonilla,*
J. F. Márquez Rubio,* B. del Muro Cuéllar*

* *Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Unidad
Culhuacán, Instituto Politécnico Nacional, México D.F., 04430,
México.*

Abstract: In the present work, a model based predictive control (MPC) strategy using a multi-predictor scheme for unstable high-order linear systems with delay is proposed. The stability analysis of this type of systems is difficult due to two main reasons, the appearance of an infinite number of poles when the feedback of the controller is considered and the second reason, is the delay size considered. In this work the use of a digital multi-predictor scheme is proposed, this device allows to estimate the internal variables of the process, which will be used for the design of the MPC to stabilize the plant. The present proposal considers an MPC with constraints in the control and output variables, which it is one of the most attractive features of this strategy. Numerical simulations are presented to illustrate how the efficiency of the system is increased due to the proposed control approach.

Keywords: Predictive control, linear systems, linear system observers, systems with time delays.

1. INTRODUCCIÓN.

El control predictivo basado en modelo (por sus siglas en inglés MPC) se describe como una estrategia de optimización que hace uso de un modelo de predicción para calcular una trayectoria futura de la salida del proceso. Esto lo hace a través de un horizonte de predicción que dicta qué tan lejos se desea estimar las variables del futuro. Este modelo también predice la trayectoria de la variable manipulada (control) sobre un horizonte de control (Bequette, 2002).

El control predictivo desde sus inicios ha sido objeto de gran atención debido a que proporciona una forma diferente de obtener soluciones a procesos con comportamiento dinámico complejo y ante distintos problemas de control. Por tal razón, en los últimos años su aplicación se ha extendido hacia diversos campos de la ingeniería como es el control de accionamientos eléctricos (Linder and Kennel, 2005), control de vuelo (Kale and Chipperfield, 2005), control de un reactor continuo de tanque agitado (CSTR) (Santos and Normey-Rico, 2023) entre otros.

El MPC presenta grandes ventajas con respecto a los controladores tradicionales y a otras técnicas de control moderno. Entre sus principales ventajas se puede citar la gran naturalidad para tratar con sistemas multivariables

y con la capacidad de trabajar en un entorno con restricciones. Por otra parte, la desventaja más considerable es la complejidad del algoritmo lo cual requiere un costo computacional elevado y es por ello por lo que desde sus inicios esta estrategia se ha utilizado en procesos con dinámica lenta.

Por otra parte, un caso particular de los sistemas dinámicos son los sistemas con retardo de tiempo, estos sistemas aparecen frecuentemente en aplicaciones prácticas de ingeniería de control (Bequette (2002), Smith (2003)). Uno de los problemas que surge al tratar de controlar este tipo de sistemas es la magnitud del retardo. Cuando el tamaño del retardo es lo suficientemente pequeño en comparación con la constante de tiempo dominante del sistema, el retardo puede despreciarse para fines del diseño del controlador. En el caso contrario, se dificulta el análisis y se requieren otros enfoques para poder diseñar controladores que estabilicen al sistema. Una de las estrategias comúnmente utilizadas para tratar con sistemas con retardo es el clásico predictor de Smith (PS) (Smith, 1957), el cual permite compensar el efecto del retardo mediante una estimación futura de la salida, es decir, la estimación de la señal antes de ser retardada. Una limitante de esta estrategia es que está restringida para controlar sistemas estables. Por tal motivo en la literatura se han reportado diferentes modificaciones al

PS para tratar con sistemas inestables (Cruz-Díaz et al. (2022), Albertos and García (2009), Rosas and Hernández (2012), Barragan-Bonilla et al. (2022)).

En los trabajos de Hernández-Pérez et al. (2020) y Najafi et al. (2013) proponen un esquema multi-predictor en tiempo continuo para tratar con sistemas de alto orden con retardo, este trabajo ofrece la posibilidad de compensar retardos de tiempo largos y utiliza únicamente la señal estimada antes de ser retardada para diseñar un controlador que estabilice al sistema libre de retardo. En Urquiza-Castro et al. (2021), se propone un esquema multi-predictor digital con algunas consideraciones de su contraparte, la versión continua. La novedad de este trabajo es que hace uso de las señales intermedias estimadas para el diseño de un MPC.

La propuesta del presente trabajo se enfoca en la estabilidad de sistemas lineales inestables con retardo de tiempo usando la versión digital del multi-predictor presentado en (Urquiza-Castro et al., 2021) controlado por un MPC considerando restricciones en la señal de control y en la señal de salida. De esta manera, una de las principales aportaciones de este trabajo es diseñar un controlador predictivo con restricciones para las variables de control y salida, lo que permite mejorar la eficiencia del comportamiento del sistema. El diseño de este tipo de controladores permite responder a las limitaciones prácticas de los actuadores, así como de la planta. Para el diseño y sintonización del controlador MPC se va a hacer uso de las señales intermedias proporcionadas por el multi-predictor digital.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera, en la Sección 2 se describe la formulación del MPC con restricciones. En la sección 3 se muestran los resultados principales que consisten en desarrollar el multi-predictor digital. En la Sección 4, se presentan los resultados en simulación que ilustran el funcionamiento de la estrategia propuesta y finalmente en la Sección 5 se presentan las conclusiones.

2. CONTROL PREDICTIVO BASADO EN MODELO (MPC) CON RESTRICCIONES.

Considere un sistema SISO en tiempo discreto de la forma,

$$\begin{aligned} x_m(k+1) &= A_m x_m(k) + B_m u(k), \\ y(k) &= C_m x_m(k). \end{aligned} \quad (1)$$

El sistema dado por (1) se puede modificar y representar en una forma aumentada (Wang, 2009), para lograr que el sistema en lazo cerrado siga referencias y rechace perturbaciones, esta forma aumentada se puede representar como,

$$\begin{aligned} \alpha(k+1) &= A\alpha(k) + B\Delta u(k), \\ y(k) &= C\alpha(k). \end{aligned} \quad (2)$$

donde $\alpha(k) = [\Delta x_m \ y(k)]^T$ y $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$. De esta manera el sistema aumentado en variables de estado está dado por,

$$\begin{aligned} \begin{matrix} \alpha(k+1) \\ \left[\begin{matrix} \Delta x_m(k) \\ y_m(k) \end{matrix} \right] \end{matrix} &= \begin{matrix} A \\ \left[\begin{matrix} A_m & O_m^T \\ C_m A_m & 1 \end{matrix} \right] \end{matrix} \begin{matrix} \alpha(k) \\ \left[\begin{matrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{matrix} \right] \end{matrix} + \begin{matrix} B \\ \left[\begin{matrix} B_m \\ C_m B_m \end{matrix} \right] \end{matrix} \Delta u(k) \quad (3) \\ y(k) &= \underbrace{\begin{bmatrix} O_m & 1 \end{bmatrix}}_C \alpha(k). \end{aligned}$$

donde A , B y C son las matrices aumentadas del sistema (2) y $O_m = [0 \cdots 0]$ es una matriz de ceros con tamaño igual al orden del sistema. A partir del modelo de espacio de estados (3), las variables de estado futuras se calculan secuencialmente con,

$$\begin{aligned} \alpha(k+N_p) &= A^{N_p} \alpha(k) + A^{N_p-1} B \Delta u(k) + A^{N_p-2} B \Delta u(k+1) + \\ &\quad \cdots + A^{N_p-N_c} B \Delta u(k+N_c-1). \end{aligned} \quad (4)$$

A partir de las variables de estado futuras, las variables de salida futuras son, por sustitución,

$$\begin{aligned} y(k+N_p) &= C A^{N_p} \alpha(k) + C A^{N_p-1} B \Delta u(k) + C A^{N_p-2} B \Delta u(k+1) \\ &\quad + \cdots + C A^{N_p-N_c} B \Delta u(k+N_c-1). \end{aligned} \quad (5)$$

Donde N_c y N_p son los horizontes de control y predicción respectivamente. Nótese que todas las variables futuras se formulan en términos de la información de la variable del estado actual $\alpha(k)$ y el movimiento del control futuro $\Delta u(k+j)$, donde $j = 0, 1, \dots, N_c - 1$. Con (4) y (5) se pueden representar en una forma matricial como,

$$Y = F\alpha(k) + G\Delta U, \quad (6)$$

donde,

$$F = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \\ CA^{N_p} \end{bmatrix}; G = \begin{bmatrix} CB & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & \cdots & 0 \\ CA^2 B & CAB & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{N_p-1} B & CA^{N_p-2} B & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

2.1 Función de costo.

Para abordar el problema de optimización se considera la siguiente función de costo,

$$J = (R - Y)^T (R - Y) + \Delta U^T \lambda \Delta U. \quad (8)$$

Donde J se define como una función de costo cuadrática y simétrica. Esta función se encarga de medir la señal de error entre la salida futura Y y la señal de referencia R teniendo en consideración los incrementos de la señal de control ΔU y el valor escalar λ es un parámetro de sintonía que le da peso a ΔU . El objetivo es encontrar el vector ΔU que minimice la función de costo (8). Para el caso donde se consideren restricciones en algunas variables del esquema de control, la función de costo (8) se puede minimizar usando una forma de programación cuadrática (por sus siglas en inglés QP) (Wang, 2009), esto es,

$$\begin{aligned} \min_{\Delta U} J &= \frac{1}{2} \Delta U^T E \Delta U + F_0^T \Delta U, \\ \text{s.a.} &: M \Delta U \leq \gamma. \end{aligned} \quad (9)$$

donde M y γ son las variables de decisión y restricción respectivamente, se requiere que E sea simétrica y definida positiva. La nueva función de costo J representada en la forma (9) es,

$$J = \frac{1}{2} \Delta U^T (G^T G + \lambda) \Delta U + (F\alpha(k) - R)^T G \Delta U. \quad (10)$$

Con $E = G^T G + \lambda$ y $F_o = (F\alpha(k) - R)^T G$. Para minimizar la función de costo (10) es necesario calcular en cada iteración (k) un nuevo ΔU utilizando un algoritmo de optimización (QP), para este trabajo se utiliza el algoritmo propuesto por Hildreth presentado en (Wang, 2009). Este algoritmo se basa en la búsqueda del vector ΔU para cada iteración ($k + 1$). El algoritmo se expresa como,

$$\Delta U_s^{k+1} = \max(0, w_s^{k+1}),$$

$$w_s^{k+1} = -\frac{1}{e_{ss}} \left[f_{os} + \sum_{i=1}^{s-1} e_{si} \Delta U_i^{k+1} + \sum_{i=s+1}^N e_{si} \Delta U_i^k \right].$$

Donde $s = 1, 2, \dots, N$; N es el número total de restricciones. Los detalles del algoritmo de Hildreth se pueden encontrar en (Wang, 2009).

2.2 Ley de control.

Se considera que en cada instante de muestreo discreto, $k = 0, 1, 2, 3, \dots, N_p$; el MPC calcula un conjunto de incrementos de control futuros, es decir,

$$\Delta U = [\Delta u(k) \ \Delta u(k+1) \ \dots \ \Delta u(k+N_c-1)]^T,$$

Los incrementos están definidos como,

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1), \quad (11)$$

Despejando $u(k)$ de (11) se tiene,

$$u(k) = \Delta u(k) + u(k-1). \quad (12)$$

Con esto se obtiene la forma analítica de la ecuación de la ley de control (12). La Fig. 1, muestra la implementación del control predictivo MPC en presencia de restricciones.

2.3 Implementación de las restricciones.

Para el caso en el que se impongan restricciones, el método del MPC calcula las acciones de control a partir de un modelo dinámico y un vector de errores predichos para optimizar un índice de comportamiento, de manera que todas las variables controladas y manipuladas se encuentren dentro de los límites establecidos. Tradicionalmente para implementar todas las restricciones, el análisis se debe centrar en los incrementos de control ΔU que comúnmente se denomina variable de decisión. El análisis sobre la variable decisión (ΔU) se presenta a continuación.

Restricciones en la etapa de control $u(k)$: Las restricciones se pueden representar en dos partes para reflejar los límites inferior y superior, es decir,

$$U_{min} \leq u(k) \leq U_{max}, \quad (13)$$

La variable manipulada $u(k)$ está definida en (12), y se puede reescribir como,

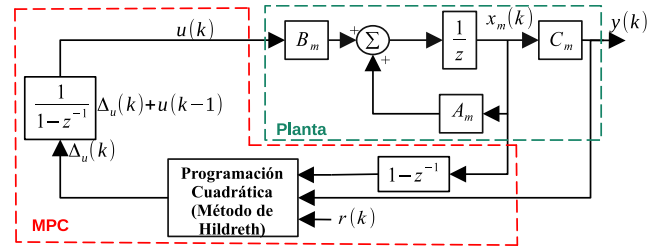


Fig. 1. Esquema del MPC con restricciones.

$$\begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ \vdots \\ u(k+N_c-1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix}}_{C_1} u(k-1) + \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & \dots & 0 \\ I & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ I & I & \dots & I \end{bmatrix}}_{C_2} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N_c-1) \end{bmatrix},$$

Reescribiendo (13), se puede expresar en dos desigualdades como,

$$\begin{aligned} -[C_1 u(k-1) + C_2 \Delta U] &\leq -U_{min}, \\ [C_1 u(k-1) + C_2 \Delta U] &\leq U_{max}. \end{aligned} \quad (14)$$

Restricciones en la señal de salida $y(k)$: De manera similar para implementar las restricciones en la señal de salida se tiene,

$$Y_{min} \leq y(k) \leq Y_{max}, \quad (15)$$

donde la señal de salida $y(k)$ está definida en (6). Reescribiendo (15) se puede expresar en dos desigualdades,

$$\begin{aligned} -[F\alpha(k) + G\Delta U] &\leq -Y_{min}, \\ [F\alpha(k) + G\Delta U] &\leq Y_{max}, \end{aligned} \quad (16)$$

Por simplicidad de la expresión, agrupamos (14) y (16) en,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}}_M \Delta U \leq \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}}_\gamma. \quad (17)$$

donde $M_1 = [-C_2 \ C_2]^T$, $N_1 = [-U_{min} + C_1 u(k-1) \ U_{max} - C_1 u(k-1)]^T$, $M_2 = [-G \ G]^T$ y $N_2 = [-Y_{min} + F\alpha(k) \ Y_{max} - F\alpha(k)]^T$.

3. RESULTADOS PRINCIPALES.

La predicción del comportamiento futuro de la planta depende de la disponibilidad de la información de las variables de estado $x_m(k)$ en el momento k . En general, $x_m(k)$ no es medible. Un enfoque que se utiliza para estimar las variables de estado desconocidas $x_m(k)$ a partir de la medición de la salida del proceso; en un contexto de ingeniería de control, se denomina observador.

3.1 Esquema multi-predictor digital.

A continuación se presenta la clase de sistemas que se desea estabilizar en el presente trabajo. Considere el sistema dado por,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_{est}(s)G_{ine}(s)e^{-\tau s}. \quad (18)$$

donde $G_{est}(s) = \frac{b}{\prod_{i=1}^p (s+b_i)}$, $G_{ine}(s) = \frac{1}{s-a}$, $\tau > 0$ es el retardo de tiempo que se supone conocido, $a > 0$ es la posición del polo inestable, $b_i > 0$ para $i = 1, 2, \dots, p$ son los parámetros asociados a las posiciones de los polos estables y $b > 0$ es la ganancia del sistema. A continuación se presenta el multi-predicador digital que se muestra en la Fig. 2 el cual permite medir las señales intermedias $x_m(k)$, dichas señales se ocupan para el diseño del controlador predictivo MPC.

Considere una representación en espacio de estado discreta del sistema (18), utilizando un retenedor de orden cero y un tiempo de muestreo $T = \frac{\tau}{n}$,

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) &= Cx(k - nT), \end{aligned} \quad (19)$$

donde n es el número de particiones del multi-predicador. El control de regulación propuesto esta dado por las señales intermedias estimadas $\hat{x}_n(k)$ que se calculan mediante el esquema multi-predicador digital y una retroalimentación con una ganancia constante K . El primer sub-predicador para el sistema (19) se define como,

$$\hat{x}_1(k+1) = \overbrace{A\hat{x}_1(k) + Bu(k - (n-1))}^{\text{modelo}} - \overbrace{KBC(e_1(k-1))}^{\text{corrección}}. \quad (20)$$

El primer término es el modelo original, y el segundo es el término de corrección basado en el error de estimación ($e_1(k)$) entre la salida medida y la salida predicha usando la estimación $\hat{x}_1(k)$. Los demás sub-predicadores subsecuentes para el sistema (19) se puede definir como,

$$\begin{aligned} \hat{x}_2(k+1) &= A\hat{x}_2(k) + Bu(k - (n-2)) + KBC(e_1(k-1) + e_2(k)), \\ \hat{x}_3(k+1) &= A\hat{x}_3(k) + Bu(k - (n-3)) + KBC(e_2(k) + e_3(k)), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (21)$$

$$\hat{x}_i(k+1) = A\hat{x}_i(k) + Bu(k - (n-i)) + KBC(e_{i-1}(k) + e_i(k)).$$

Por lo tanto, las ecuaciones (20)-(21) son el conjunto de sub-predicadores para el sistema original (19). Los errores de estimación se definen como:

$$\begin{aligned} e_1(k) &= x(k) - \hat{x}_1(k), \\ e_2(k) &= \hat{x}_1(k) - \hat{x}_2(k-1), \\ e_3(k) &= \hat{x}_2(k) - \hat{x}_3(k-1), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (22)$$

$$e_j(k) = x_{j-1}(k) - \hat{x}_j(k-1).$$

Los errores dinámicos se definen como,

$$\begin{aligned} e_1(k+1) &= x(k+1) - \hat{x}_1(k+1), \\ e_2(k+1) &= \hat{x}_1(k+1) - \hat{x}_2(k), \\ e_3(k+1) &= \hat{x}_2(k+1) - \hat{x}_3(k), \\ &\vdots \\ e_j(k+1) &= x_{j-1}(k+1) - \hat{x}_j(k). \end{aligned} \quad (23)$$

para $j = 2, \dots, n$. Sustituyendo (21) en (23) da como resultado,

$$\begin{aligned} e_1(k+1) &= Ae_1(k) - KBC[e_1(k-1)], \\ e_2(k+1) &= Ae_2(k) + KBC[e_1(k-1) - e_1(k-2) - e_2(k-1)], \\ e_3(k+1) &= Ae_3(k) + KBC[e_1(k-1) + e_2(k) - \dots \\ &\quad \dots - e_2(k-1) - e_3(k-1)], \\ &\vdots \\ e_f(k+1) &= Ae_f(k) + KBC[e_{f-1}(k) + e_{f-2}(k) - e_f(k-1) - \dots \\ &\quad \dots - e_{f-1}(k-1)]. \end{aligned} \quad (24)$$

para $f = 4, \dots, n$. Esto se puede escribir en una forma matricial como,

$$\begin{aligned} e(k+1) &= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & KBC & A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & KBC & KBC & A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & KBC & KBC & A \end{bmatrix} e(k) - \dots \\ \dots - \begin{bmatrix} KC & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -KBC & KBC & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -KBC & KBC & KBC & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & KBC & KBC & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & KBC & KBC \end{bmatrix} e(k-1) - \dots \\ \dots - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ KBC & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} e(k-2). \end{aligned} \quad (25)$$

Con $e(k) = [e_1(k), \dots, e_n(k)]^T$. La convergencia del

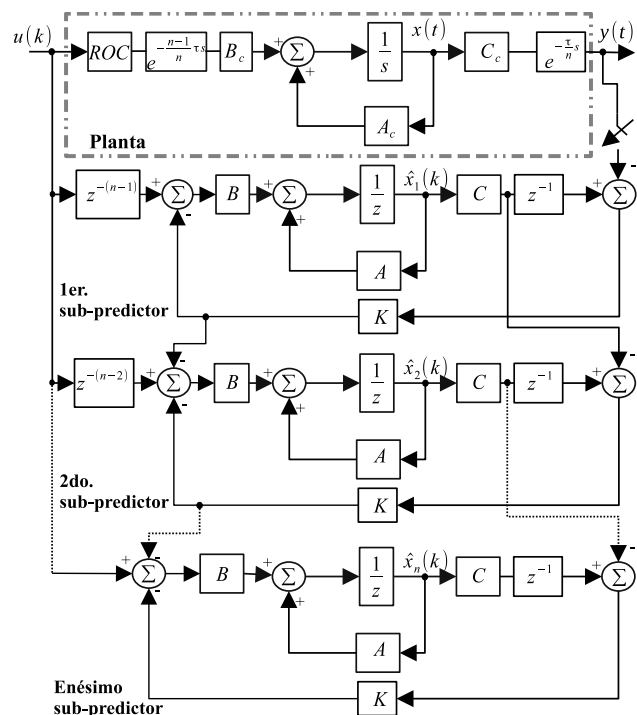


Fig. 2. Esquema multi-predicador digital.

multi – predictor digital se puede asegurar seleccionando los valores de K tal que el sistema (25) sea estable. Esto se puede lograr calculando el valor de K de tal manera que $\det(zI - A + KBCz^{-1}) = 0$ tenga sus polos dentro del círculo unitario. Con esto se puede probar la convergencia del sub–predictor 1 – planta, sub–predictor 2 – sub–predictor 1, sub–predictor 3 – sub–predictor 2 y así sucesivamente. La Fig. 3 muestra el esquema propuesto para implementar el MPC con restricciones a un multi-predictor digital. Cabe mencionar que la ley de control dada en (12) está representada por: $u(k) = \Delta_u(k) + u(k-1)$, donde $\Delta_u(k)$ depende del vector $\alpha(k)$, es decir,

$$\alpha(k) = \begin{bmatrix} \hat{x}_n(k) - \hat{x}_n(k-1) \\ \hat{x}_{n-1}(k) - \hat{x}_{n-1}(k-1) \\ \hat{x}_{n-2}(k) - \hat{x}_{n-2}(k-1) \\ \vdots \\ \hat{x}_1(k) - \hat{x}_1(k-1) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

Este vector depende de las señales intermedias estimadas tomadas por el multi-predictor digital ($\hat{x}_n(k)$) y la señal de salida del sistema $y(t)$.

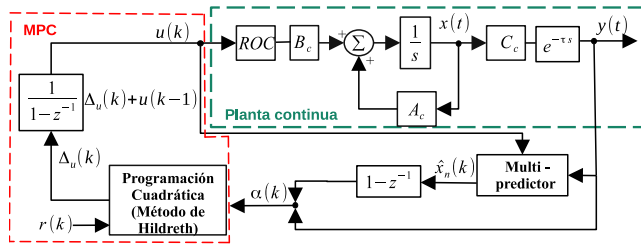


Fig. 3. Esquema propuesto para implementar el MPC a un multi-predictor digital.

4. RESULTADOS EN SIMULACIÓN.

Considere el siguiente sistema en lazo abierto inestable con retardo de tiempo,

$$G(s) = \frac{1}{(s-1)(s+5)} e^{-2s}, \quad (26)$$

El esquema multi-predictor se diseña con diez etapas, es decir, $n = 10$, por lo tanto, $T = 0.2$. Discretizando el sistema (26) con un retenedor de orden cero y un periodo de muestreo $T = 0.2$ se obtiene,

$$G(z) = \frac{0.0158(z + 0.7682)}{(z - 1.221)(z - 0.367)} z^{-10}, \quad (27)$$

El sistema (27) en lazo cerrado tiene 10 polos en el origen debido al retardo considerado, el polo inestable se encuentra en $z = 1.221$ y el estable en $z = 0.367$; el lugar geométrico de las raíces indica que el polo estable y el polo inestable del sistema tienen un punto de ruptura dentro del círculo unitario, por lo que, existe una región de estabilidad para cada sub-predictor de $5 < K < 14.5$, para este ejemplo se selecciona una ganancia $K = 6$. Para diseñar el MPC se selecciona un horizonte de predicción y de control igual a $N_p = 20$, $N_c = 2$, respectivamente. Para este ejemplo se va a considerar las siguientes restricciones,

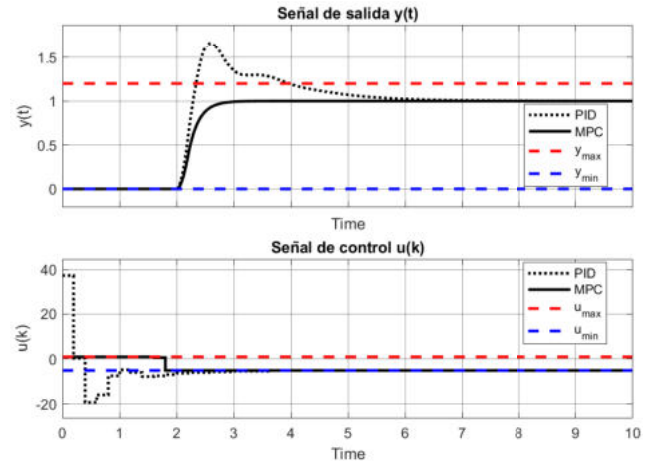


Fig. 4. Respuesta del sistema considerando condiciones iniciales nulas en el proceso.

$$-5 \leq u(k) \leq 1; 0 \leq y(k) \leq 1.2. \quad (28)$$

Para la simulación, se considera una entrada de tipo escalón $r(k)$ de amplitud 1. Para fines comparativos en la simulación, también se realiza una simulación considerando un controlador discreto PID con las siguientes ganancias $k_p = 19.6875$, $k_i = 0.9375$, $k_d = 16.875$; esto es, con el fin de comparar la eficiencia del controlador MPC con restricciones ante un controlador convencional tipo PID. La Fig. 4 muestra la respuesta de la señal de salida y la señal de control, respectivamente, considerando condiciones iniciales nulas, se puede observar que el MPC cumple con las restricciones impuestas en (28) sobre ambas variables. La Fig. 5 muestra la respuesta de la señal de salida y la señal de control respectivamente ante condiciones iniciales en los estados de la planta igual a 0.01, se observa que el esquema propuesto en este trabajo mejora el tiempo para alcanzar el estado estacionario respetando la restricción impuesta sobre la salida de la planta además de tener un mayor ahorro energético en la etapa de control, cumplido con la restricción impuesta sobre el controlador. Por último en la Fig. 6 se muestra el comportamiento del error de estimación para cada sub-predictor, y vemos que el error de estimación tiende a cero, esto ilustra una adecuada estimación de las señales intermedias del multi-predictor digital.

5. CONCLUSIÓN.

Se propone un algoritmo MPC aplicado a un multi-predictor digital para controlar/estabilizar sistemas inestables con retardo de tiempo. La principal ventaja de este esquema es la compensación de los efectos de los retrasos de tiempo largos, es decir, que no hay límite con respecto a la magnitud de retardo que pueda tener el sistema. Merece la pena destacar las fortalezas del MPC las cuales residen en la posibilidad de introducir distintos tipos de restricciones. Esto es muy útil en la práctica debido a que los actuadores tienen un rango de acción limitado y una velocidad de cambio determinada,

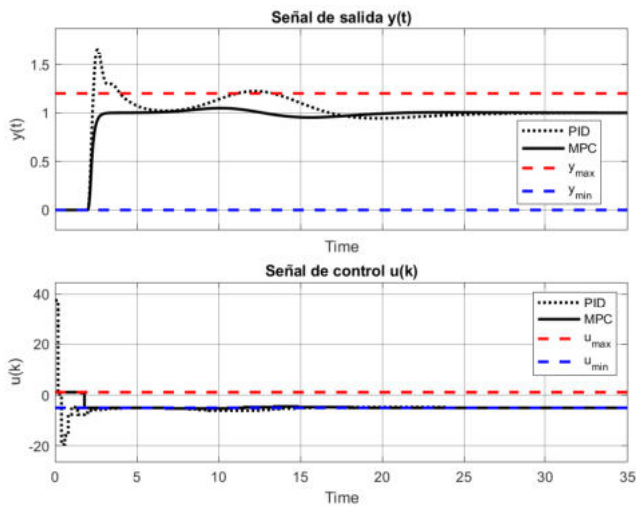


Fig. 5. Respuesta del sistema considerando condiciones iniciales.

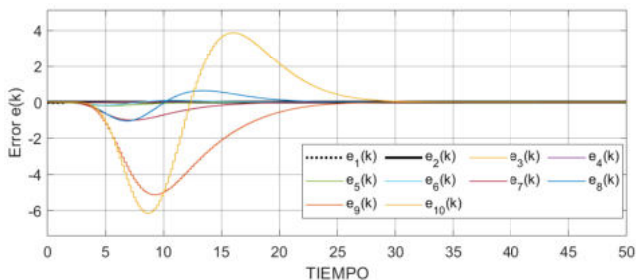


Fig. 6. Convergencia de las señales de error de cada sub-predictor.

estos se pueden dar por las limitantes en los sensores que miden las variables del proceso tales como niveles en tanques, caudales en tuberías o temperaturas y presiones máximas. Debido a esto, al introducir restricciones es posible considerar estos límites en la acción de control $u(k)$, así como en la señal de la salida $y(t)$; esto otorga al control predictivo una gran ventaja sobre los controles convencionales como se pudo mostrar en el ejemplo.

REFERENCIAS

Albertos, P. and García, P. (2009). Robust control design for long time-delay systems. *Journal of Process Control*, 19(10), 1640–1648. doi:10.1016/j.jprocont.2009.05.006.

Barragan-Bonilla, L.A., Márquez-Rubio, J.F., Cuéllar, B.D.M., Vázquez-Guerra, R.J., and Martínez, C. (2022). Observer-based control for high order delayed systems with an unstable pole and a pole at the origin. *Asian Journal of Control*, 25(3), 1759–1774. doi:10.1002/asjc.2914.

Bequette, B.W.B.W. (2002). *Process Control: Modeling, Design and Simulation*.

Cruz-Díaz, C., del Muro-Cuéllar, B., Duchén-Sánchez, G., Márquez-Rubio, J.F., and Velasco-Villa, M. (2022). Observer-Based PID Control Strategy for the Stabi-

lization of Delayed High Order Systems with up to Three Unstable Poles. *Mathematics*, 10(9), 1399. doi:https://doi.org/10.3390/math10091399.

Hernández-Pérez, M., Fragoso-Rubio, V., Velasco-Villa, M., del Muro-Cuéllar, B., Márquez-Rubio, J., and Puebla, H. (2020). Prediction-based control for a class of unstable time-delayed processes by using a modified sequential predictor. *Journal of Process Control*, 92, 98–107. doi:10.1016/j.jprocont.2020.05.014.

Kale, M.M. and Chipperfield, A.J. (2005). Stabilized MPC formulations for robust reconfigurable flight control. *Control Engineering Practice*, 13(6), 771–788. doi:10.1016/j.conengprac.2004.09.001.

Linder, A. and Kennel, R. (2005). Model Predictive Control for Electrical Drives. doi:10.1109/pesc.2005.1581874.

Najafi, M., Hosseinnia, S., Sheikholeslam, F., and Karimadani, M. (2013). Closed-loop control of dead time systems via sequential predictors. *International Journal of Control*, 86(4), 599–609. doi:10.1080/00207179.2012.751627.

Rosas, C.D.V. and Hernández, J.R. (2012). Control por computadora para sistemas inestables con grandes retardos empleando un esquema observador. *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático*.

Santos, T.L.M. and Normey-Rico, J.E. (2023). A Generalised Dynamic Matrix Control for unstable processes based on filtered predictions. *ISA Transactions*, 136, 297–307. doi:https://doi.org/10.1016/j.isatra.2022.11.010.

Smith, C.A. (2003). *Automated Continuous Process Control*.

Smith, O.J.M. (1957). Closer control of loops with deadtime. *Chem. Eng.*

Urquiza-Castro, A., Marquez-Rubio, J.F., and del Muro-Cuellar, B. (2021). Model based predictive control (MPC) applied to a multi-predictor for high order delayed systems with an unstable pole. *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático*.

Wang, L. (2009). *Model Predictive Control System Design and Implementation Using MATLAB*. Springer London. doi:10.1007/978-1-84882-331-0.