

Proportional-derivative plus integral controller tuning for Led lighting based on the mathematical model ^{*}

Edgar Estrada Cruz ^{*}, Ismael Barrera González,
Braulio Lozano Hernández

^{*} *Tecnológico Nacional de México/ITS del Occidente del Estado de Hidalgo, Mixquiahuala de Juárez, Hidalgo, CP. 42700, (e-mail: eestrada@itsoeh.edu.mx).*

Abstract: The depletion of energy resources have made saving energy a challenge in recent decades. One of the main components of energy consumption is lighting, it represents up to 20% of total energy consumption in the world; the largest amount consumed in residential and commercial buildings. Led technology, due to its characteristics of long life, high efficiency, low consumption and dimming capacity, has become an alternative to illuminate spaces. This work proposes a control scheme for LED lamp lighting with a double control loop, proportional-derivative in the internal loop and integral in the external one, based on the mathematical model in the absence of external lighting. In addition, the tuning strategy for the controller gains is proposed based on the design parameters of the standard second-order system. Through simulation it is shown that the tuning of the control strategy is adequate.

Keywords: Climate change, Energy systems, Linear systems, Modeling, Time-invariant systems.

1. INTRODUCCIÓN

El crecimiento acelerado de la población a nivel mundial, el agotamiento de los recursos energéticos y el impacto ambiental que conlleva han convertido el ahorro de energía en un desafío importante. El consumo de energía en residencias y comercios representa una parte considerable del consumo de energía. De acuerdo a las estadísticas publicadas por el Programa de las Naciones Unidas para el Medio Ambiente (UNEP), entre el 30 % y el 40 % de la energía mundial se consume en los edificios (Santamouris, 2019).

Uno de los principales componentes en el consumo de energía es la iluminación. De hecho, los sistemas de iluminación representan hasta el 20 % del consumo total de energía en el mundo de acuerdo a Pompei et al. (2022) y la mayor parte proviene de edificios comerciales y residenciales. En México reporta Sener (2016) que el 18 % de la energía eléctrica generada se consume en iluminación. De ahí la importancia en desarrollar nuevas estrategias para lograr ahorro energético en la iluminación, al integrar nuevas tecnologías y estrategias de control.

Se ha demostrado que la ausencia o exceso de iluminación daña la agudeza visual, modifica la sensibilidad al contraste e incluso algunas funciones oculares se ven afectadas; en el primer escenario se generan ambientes visuales poco inspiradores y oscuros, mientras que en el segundo el exceso de luz puede provocar deslumbramientos. Una buena iluminación no solo disminuye los costos en el consumo de energía, además, brinda comodidad visual y permite que el personal de trabajo realice sus actividades sin el desgaste innecesario que ocasiona la mala iluminación en sus espacios. Algunos estudios demuestran que trabajar en condiciones adecuadas y con sensación de bienestar eleva el nivel de productividad (Konstantzovs et al., 2020).

La tecnología Led es una fuente de luz atractiva ya que proporciona tiempos de vida prolongados, alta eficiencia energética y luminosa, capacidad de regulación en el diseño de un sistema de iluminación a un bajo costo.

Algunos estudios (Chincherro and Alonso, 2020; Al-Ghaili et al., 2020) han demostrado que la energía consumida por la iluminación se puede reducir mediante el diseño de un sistema de control de iluminación interior con capacidad de atenuación. En Chen et al. (2012) desarrollaron un controlador difuso para mantener el nivel de iluminación adecuado; mientras que Wen and Agogino (2008), proponen el control de iluminación como un problema de programación lineal para minimizar el uso de energía y

^{*} Este trabajo cuenta con el apoyo de PRODEP bajo el proyecto M00/184/2021 de la convocatoria Apoyo Fortalecimiento de Cuerpos Académicos.

satisfacer las preferencias de iluminación de los ocupantes al mismo tiempo. Se presentaron algunas estrategias para el control integrado de luz diurna y luz artificial basadas en modelos computacionales en Kurian et al. (2008) y en Pandharipande and Caicedo (2013), introducen una estrategia de representación de iluminación adaptativa junto con dos métodos de control de iluminación para lograr ahorros de energía y comodidad del usuario al mismo tiempo. En Görgülü and Ekren (2013), se estableció un control de iluminación artificial de lógica difusa para mantener el valor de iluminación en un nivel cómodo constante mientras se considera la contribución de la luz del día.

Los trabajos mencionados en el párrafo anterior no disponen del conocimiento del modelo de la lámpara Led que mapea la relación entre la iluminación y las señales de atenuación. Lobato-Ríos et al. (2016), para mejorar el rendimiento del sistema de control de iluminación Led, proponen un modelo lineal que considera la influencia de la luminaria en su vecindario y tiene en cuenta el confort visual y el consumo de energía, demuestran que un optimizador lineal aplicado al modelo lineal propuesto tiene un mejor rendimiento, pero no dispone del modelo matemático para la lámpara.

Este trabajo propone un esquema de control de iluminación para lámpara Led de doble lazo de control, proporcional-derivativo en el lazo interno e integral en el externo basado en el modelo matemático de la lámpara. Además, se propone la estrategia de sintonización para las ganancias del controlador con base a los parámetros de diseño del sistema de segundo orden estándar. También, se considera que la lámpara está aislada de cualquier estímulo de iluminación externa ya sea natural o artificial, por lo tanto, solo se enfoca en el control de iluminación de la lámpara.

El trabajo está organizado como sigue: en la Sección II, se presenta el modelo matemático de la lámpara Led como un sistema estático. En la Sección III, se introduce el esquema de control proporcional-derivativo más integral y se presenta la regla de sintonización para el controlador. Se presentan resultados numéricos y simulación del esquema en la Sección IV. El trabajo termina con algunas conclusiones.

2. MODELO MATEMÁTICO DE LA LÁMPARA LED

A continuación, se presenta la definición para un sistema estático.

Definición 1. (Sistema estático). Se dice que un sistema es estático o sin memoria si su salida en cualquier instante de tiempo depende de entradas en ese mismo instante de tiempo.

Si el sistema no es estático, se denomina dinámico, esto es, un sistema dinámico es aquel cuya salida en un instante de tiempo dado, depende de las entradas en otros instantes de tiempo y de entradas en ese mismo instante de tiempo.



Fig. 1. Lámpara Led regulable.

Como ejemplo de sistema estático, se tiene la relación voltaje-corriente en un resistor, conocida como “*Ley de Ohm*”. La ecuación que describe el comportamiento eléctrico del resistor es la siguiente

$$v(t) = R \cdot i(t) \quad (1)$$

La ecuación (1), establece que el valor del voltaje $v(t)$ en el instante de tiempo t , depende de la corriente en ese mismo instante, multiplicado por el valor de resistencia. A diferencia de un sistema dinámico, el valor de salida actual solo depende del estado actual y no de estado previos.

Con la finalidad de modelar el comportamiento de la lámpara, se realizaron mediciones de su iluminación bajo las siguientes condiciones:

- (1) La lámpara regulable de la marca TecnoLite mostrada en la Fig. 1, se encontraba totalmente aislada de iluminación externa (natural o artificial).
- (2) Se usó la tarjeta de desarrollo arduino MEGA2560 para la adquisición de las señales del sensor de iluminación.
- (3) El sensor de luz ambiental BH1750 para interfaz de bus I^2C con amplia gama de resolución (1-65535 lux), se eligió para tomar las mediciones de iluminación.
- (4) La distancia entre el sensor de luz ambiental BH1750 y la lámpara Led regulable fue de 60 cm. en trayectoria directa vertical.
- (5) Se realizaron mediciones de iluminación aplicando un voltaje entre 30.4 y 122.9 V a la lámpara Led regulable.

Los resultados obtenidos del experimento se pueden observar en la tabla 1.

El comportamiento de una lámpara Led regulable aislada de iluminación externa se puede caracterizar mediante un modelo estático como el descrito en la Definición 1, esto es

$$y(t) = ku(t) \quad (2)$$

donde $y(t)$ es la salida de iluminación de la lámpara en lux, $u(t)$ es la entrada de voltaje en volts y k es una constante positiva de proporcionalidad, propia de la naturaleza física de la lámpara.

Tabla 1. Medición de iluminación con sensor BH1750 de lámpara Led.

No	Voltaje (V)	BH1750 (Lux)
1	129.9	1204.6
2	122.2	1154.0
3	116.3	1058.7
4	101.8	784.9
5	85.1	572.2
6	61.5	326.2
7	30.4	81.1

Se realiza la regresión lineal con los datos de la columna 3 de la tabla 1 en el software Matlab y tomando como base el modelo de la ecuación (2), se obtuvo una ganancia de valor $k = 8.568$.

Este trabajo se enfoca en el control de iluminación de la lámpara sin perturbación externa.

3. ESQUEMA DE CONTROL PROPORCIONAL DERIVATIVO MÁS INTEGRAL

Sea el esquema de control proporcional-derivativo más integral mostrado en la Fig. 2 para una lámpara Led.

La estrategia de control presentada muestra doble lazo de control, el lazo de control interno o primario es un control proporcional-derivativo (PD) y el lazo de control externo o secundario es un control integral (I). Se asume que las ganancias del controlador k_p , k_d y k_I son positivas.

La función de transferencia en lazo cerrado, está dada como

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k_D k_I s + k_P k_I}{k_D s^2 + (1 + k_P + k_D k_I) s + k_P k_I} \quad (3)$$

donde $k_P = k k_p$ y $k_D = k k_d$. Analizando la función de transferencia de la ecuación (3) para una entrada escalón unitario el valor de la respuesta en estado estacionario es

$$\begin{aligned} y_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k_D k_I s + k_P k_I}{k_D s^2 + (1 + k_P + k_D k_I) s + k_P k_I} = 1 \end{aligned}$$

El error se define como $E(s) = R(s) - Y(s)$, por lo tanto, el error en estado estacionario es como sigue

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(1 - \frac{k_D k_I s + k_P k_I}{k_D s^2 + (1 + k_P + k_D k_I) s + k_P k_I} \right) = 0 \end{aligned}$$

De los resultados previos, es evidente que la estrategia de control funciona al alcanzar un error en estado estacionario de cero. A continuación, se presenta la regla para sintonizar el controlador del esquema presentado en la Fig. 2.

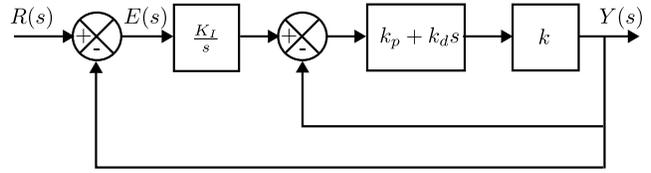


Fig. 2. Esquema de control Proporcional-derivativo más integral.

3.1 Sintonización del controlador proporcional-derivativo más integral

Se establece la siguiente proposición para determinar las ganancias proporcional, integral y derivativa del controlador.

Proposición 2. Sea el sistema estático de la ecuación (2)

$$y(t) = k u(t)$$

con esquema de control de doble lazo, control proporcional-derivativo en el lazo interno e integral en el lazo externo. Se asume que las ganancias de control k_p , k_d y k_I son positivas. Si ω_n y ζ satisfacen las condiciones, $[\omega_n \zeta] > 0$ y

$$[\omega_n \zeta] \begin{bmatrix} a^2 & a/2 \\ a/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_n \\ \zeta \end{bmatrix} > 1 \quad (4)$$

para una $a > 0$, las ganancias de control están dadas como

$$k_p = \frac{1}{k(\zeta \omega_n a - a^2 \omega_n^2 - 1)} \quad (5)$$

$$k_d = \frac{a}{k(\zeta \omega_n a - a^2 \omega_n^2 - 1)} \quad (6)$$

$$k_I = a \omega_n^2 \quad (7)$$

Prueba 3. La función de transferencia en lazo cerrado, está dada como

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k_D k_I s + k_P k_I}{k_D s^2 + (1 + k_P + k_D k_I) s + k_P k_I}$$

donde se define $k_P = k k_p$ y $k_D = k k_d$. De la función de transferencia dada, su ecuación característica es

$$p_1(s) = s^2 + \frac{1 + k_P + k_D k_I}{k_D} s + \frac{k_P k_I}{k_D} \quad (8)$$

El comportamiento y la estabilidad de un sistema lineal esta determinada por la ubicación de las raíces de su ecuación característica en el plano complejo- s . La ecuación característica de un sistema de segundo orden estándar es

$$p_2(s) = s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2 \quad (9)$$

Igualando la ecuación característica (8) con la ecuación (9), resulta en

$$s^2 + \frac{1 + k_P + k_D k_I}{k_D} s + \frac{k_P k_I}{k_D} = s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2 \quad (10)$$

Se establece que la ganancia derivativa como $k_D = a k_p$. Igualando términos y después de un manejo algebraico resulta en la siguiente ecuación

$$1 + k_P + a k_P k_I = 2a \zeta \omega_n k_P \quad (11)$$

y en

$$k_I = a\omega_n^2 \quad (12)$$

Se sustituye k_I de la ecuación (12) en la ecuación (11) y después de un manejo algebraico se llega a la siguiente expresión para la ganancia k_P

$$k_P = \frac{1}{2\zeta\omega_n a - a^2\omega_n^2 - 1} \quad (13)$$

Se asume que las ganancias del controlador son positivas, entonces el denominador de la ecuación (13) debe de satisfacer la siguiente condición

$$2\zeta\omega_n a - a^2\omega_n^2 - 1 > 0 \quad (14)$$

La cual puede ser escrita en forma matricial como sigue

$$[\omega_n \ \zeta] \begin{bmatrix} a^2 & a/2 \\ a/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_n \\ \zeta \end{bmatrix} > 1 \quad (15)$$

Asumiendo que $[\omega_n \ \zeta] > 0$.

Si la condición de la ecuación (15) se satisface entonces la ganancia proporcional está dada como

$$k_P = \frac{1}{2\zeta\omega_n a - a^2\omega_n^2 - 1}$$

Previamente se definió a la ganancia derivativa como $k_D = ak_P$, por lo tanto

$$k_D = \frac{a}{2\zeta\omega_n a - a^2\omega_n^2 - 1}$$

mientras que la ganancia integral está dada como $k_I = a\omega_n^2$. Recordar que $k_P = k/k_p$ y $k_D = k/k_d$, entonces las ganancias son

$$k_p = \frac{1}{k(\zeta\omega_n a - a^2\omega_n^2 - 1)}$$

$$k_d = \frac{a}{h(\zeta\omega_n a - a^2\omega_n^2 - 1)}$$

$$k_I = a\omega_n^2$$

3.2 Estabilidad del controlador proporcional-derivativo más integral

Se debe de garantizar la estabilidad del esquema de control PD+I que se ha presentado. Para demostrar que el sistema es estable, se hace uso de la técnica de Routh-Hurwitz (Nise, 2019). Sea la ecuación característica de la función de transferencia en lazo cerrado del esquema de control mostrado en la Fig. 2.

$$p(s) = k_D s^2 + (1 + k_P + k_D k_I) s + k_P k_I = 0$$

Entonces el arreglo de Routh-Hurwitz está dado como

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & k_D & k_P k_I \\ s^1 & 1 + k_P + k_D k_I & \\ s^0 & k_P k_I & \end{array}$$

El criterio de Routh-Hurwitz, establece que si no hay cambios de signo en la primera columna de coeficientes, el sistema es estable. Del arreglo de Routh-Hurwitz, surgen las siguientes condiciones que deben satisfacerse para garantizar estabilidad

$$\begin{aligned} k_D &> 0 \\ 1 + k_P + k_D k_I &> 0 \\ k_I &> 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Se asume que todas las ganancias son positivas, entonces, es claro que las condiciones de (16) se satisfacen y se garantiza que el esquema de control es estable.

4. RESULTADOS NUMÉRICOS Y SIMULACIÓN

Los valores de ω_n y ζ se determinan al resolver la condición de la ecuación (4) mediante Matlab para los valores de $a = 0.1, 0.5, 0.9$, los resultados obtenidos se observan en la tabla 2.

A partir de las ecuaciones (5), (6) y (7), se sintonizan las ganancias de control k_p, k_d y k_I , respectivamente y con valores de ω_n y ζ previamente determinados, los datos se pueden observar en la tabla 2.

Tabla 2. Valores de k_p, k_d y k_I para las condiciones de sintonización.

No	a	k	ω_n	ζ	k_p	k_i	k_d
1	0.1	8.568	4.99	5.59	0.073	2.49	0.007
2	0.5	8.568	1.23	2.39	1.15	0.75	0.57
3	0.9	8.568	0.75	2.60	0.36	0.51	0.33

En la Fig. 3 se muestra el comportamiento en simulación del esquema de control propuesto para una entrada escalón unitario llevada a cabo en Matlab/Simulink, se puede observar que el objetivo de control es alcanzado para los diferentes valores de a .

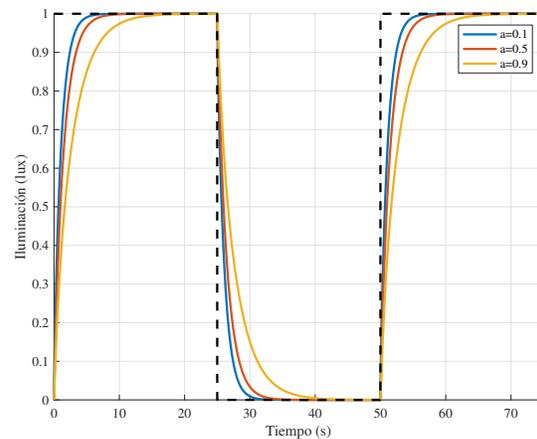


Fig. 3. Simulación para diferentes valores de a para una entrada escalón unitario.

De la Fig. 3, es fácil observar que la respuesta que mejor desempeño presenta es para un valor de $a = 0.1$, mientras que el peor caso es para $a = 0.9$. En la tabla 3 podemos observar el tiempo de establecimiento para cada respuesta, tomando el criterio del 2 %, es decir una vez que la respuesta alcanza el 98 % de su valor final.

Tabla 3. Tiempo de establecimiento para valores de $a = 0.1, 0.5, 0.9$.

No	a	t_s (seg)
1	0.1	4.17
2	0.5	5.8
3	0.9	10.74

Se destaca que un valor de $a = 0.1$ presenta el mejor tiempo de respuesta, al alcanzar el 98 % de su valor final en 4.17 seg. siendo el más rápido, en contraste con $a = 0.9$ que toma un tiempo de 10.74 seg. para alcanzar el mismo valor y por lo tanto la respuesta más lenta, como se puede observar en la Fig. 4.

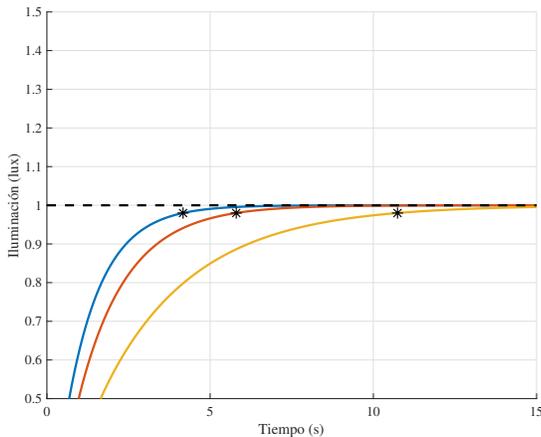


Fig. 4. Tiempos de establecimiento para diferentes valores de a para una entrada escalón unitario.

5. CONCLUSIÓN

El trabajo desarrollado se basa en el modelo matemático de la lámpara Led aislada de la luz exterior (natural o artificial). Los resultados obtenidos permiten concluir que el esquema de control de doble lazo, proporcional-derivativo en el lazo interno e integral en el externo y la regla de sintonización para las ganancias del controlador permiten un buen desempeño del sistema, como se observó la mejor respuesta se alcanza para valores pequeños de a , esto es, una ganancia derivativa pequeña en comparación con la ganancia proporcional. Se nota que la respuesta no presenta sobre-amortiguamiento y tiene un comportamiento suave, esto implica que no generará deslumbramientos.

REFERENCIAS

Al-Ghaili, A.M., Kasim, H., Al-Hada, N.M., Othman, M., and Saleh, M.A. (2020). A review: Buildings energy savings - lighting systems performance. *IEEE Access*, 8, 76108–76119.

Chen, S.Y., Zhang, J., Zhang, H., Kwok, N.M., and Li, Y.F. (2012). Intelligent lighting control for vision-based robotic manipulation. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 59(8), 3254–3263.

Chincheró, H.F. and Alonso, J.M. (2020). A review on energy management methodologies for led lighting systems in smart buildings. In *2020 IEEE International Conference on Environment and Electrical Engineering and 2020 IEEE Industrial and Commercial Power Systems Europe (EEEIC / I&CPS Europe)*, 1–6.

Görgülü, S. and Ekren, N. (2013). Energy saving in lighting system with fuzzy logic controller which uses light-pipe and dimmable ballast. *Energy and Buildings*, 61, 172–176.

Konstantzos, I., Sadeghi, S.A., Kim, M., Xiong, J., and Tzempelikos, A. (2020). The effect of lighting environment on task performance in buildings – a review. *Energy and Buildings*, 226, 110394.

Kurian, C., Aithal, R., Bhat, J., and George, V. (2008). Robust control and optimisation of energy consumption in daylight—artificial light integrated schemes. *Lighting Research & Technology*, 40(1), 7–24.

Lobato-Ríos, V., del Rocío Hernández-Castañón, V., Carrasco-Ochoa, J.A., and Martínez-Trinidad, J.F. (2016). Linear model optimizer vs neural networks: A comparison for improving the quality and saving of led-lighting control systems. In *2016 23rd International Conference on Pattern Recognition (ICPR)*, 2664–2669.

Nise, N.N. (2019). *Control Systems Engineering*.

Pandharipande, A. and Caicedo, D. (2013). Adaptive illumination rendering in led lighting systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 43(5), 1052–1062.

Pompei, L., Blaso, L., Fumagalli, S., and Bisegna, F. (2022). The impact of key parameters on the energy requirements for artificial lighting in italian buildings based on standard en 15193-1:2017. *Energy and Buildings*, 263, 112025.

Santamouris, M. (2019). *Minimizing Energy Consumption, Energy Poverty and Global and Local Climate Change in the Built Environment: Innovating to Zero*. UK.

Sener (2016). Balance nacional de energía. Technical report.

Wen, Y.J. and Agogino, A.M. (2008). Wireless networked lighting systems for optimizing energy savings and user satisfaction. In *2008 IEEE Wireless Hive Networks Conference*, 1–7.