Memorias del 2023 Congreso Nacional de Control Automático
25-27 de Octubre, 2023. Acapulco, Guerrero, México.

A Linear Interval Observer for a Class of Linear Systems of Dimension 2n with n Measurements of the State

Fernando López-Caamal * **Jesús David Avilés** **

* *Departamento de Ingeniería Química, Universidad de Guanajuato, Noria Alta, C.P. 36050, Guanajuato, México*
** *Facultad de Ciencias de la Ingeniería, Administrativas y Sociales, Universidad Autónoma de Baja California, Blvd. Universidad No. 1, San Fernando, C.P. 21460 ,Tecate B.C., México*

Resumen In this paper an interval observer is designed for a continuous-time plant with an even number of states. We assume that the measured output corresponds to half of the states of the plant. The observer is designed in such a way that the estimation error is a linear cooperative system, whose state matrix can be assigned arbitrarily. The observer's performance is exemplified by numerical simulations of a mechanical system.

Keywords: Observer, Interval Observer, Linear System

1. INTRODUCCIÓN

En las dos últimas décadas, los observadores intervalo han representado un tema de interés creciente en la comunidad científica del control automático porque proporcionan una solución robusta alterna para hacer frente a las variaciones en los parámetros y perturbaciones que, generalmente, están presentes en los sistemas físicos (Gouzé et al., 2006; Avilés and Moreno, 2009; Mazenc et al., 2013; Efimov et al., 2013b; Avilés and Moreno, 2014). Los observadores intervalo están constituidos por un par de observadores que preservan el ordenamiento parcial: uno superior y otro inferior, los cuales a su vez proporcionan estimaciones que acotan dinámicamente a la trayectoria real del estado, por encima y debajo de ella, formando un intervalo entre tales estimaciones si se establece una inicialización adecuada (Avilés and Moreno, 2014; Avilés and Moreno, 2018). Basados en las propiedades de los sistemas monótonos, especialmente de la subclase de sistemas cooperativos (Angeli and Sontag, 2003; Hirsch and Smith, 2004), esta clase de observadores fueron originalmente diseñados por Gouze et al. (2000), para un bioreactor altamente incierto, y posteriormente implementados experimentalmente en (Alcaraz-Gonzalez et al., 2002).

Los primeros trabajos reportados de los observadores intervalo aseguraron que sus estimaciones superior e inferior acotaban a la trayectoria del estado real, pero no garantizaban la propiedad de estabilidad. Tales estimaciones podrían diverger de sus valores reales, como fue presentado en (Bernard and Gouze, 2004; Moisan et al., 2009) en los así llamados *Bonche de observadores intervalo* (o en el idioma inglés como bundle observers), donde varios observadores intervalo fueron ejecutados simultáneamente, considerando la mejor estimación en cada instante de tiempo. El diseño de observadores intervalo para la clase de Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (SLIT) en presencia de incertidumbres está caracterizado por la condición de una matriz Metzler y Hurwitz (Gouze et al., 2000; Mazenc and Bernard, 2011; Khan et al., 2021), incluso tal condición puede ser relajada mediante una transformación de estados lineal debido a que la propiedad de Cooperatividad depende de los cambios de coordenadas (Mazenc and Bernard, 2010). Adicionalmente, en (Efimov et al., 2013a) se presentó el diseño de observadores intervalo para aproximaciones de linealización de algunos sistemas no-lineales, requiriendo obtener la ganancia del observador y una matriz de transformación mediante la solución de la ecuación de Sylvester. Asimismo, el método ha sido extendido en Thabet et al. (2014) para diseñar observadores intervalo para Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo (SLVT) considerando una transformación de coordenadas variante en el tiempo. En (Avilés and Moreno, 2014) se presenta un método de diseño de observadores intervalo para una clase de sistemas no lineales tomando en cuenta las condiciones de disipatividad y cooperatividad de forma combinada, requiriendo de cuatro ganancias a partir de la solución de dos desigualdades matriciales lineales (Linear matrix Inequalities, por su significado en el idioma inglés).

En este artículo, se propone el diseño de observadores intervalo para una familia de sistemas lineales de dimensión $2n$ usando n mediciones del estado. Considerando un observador de estados tipo Luenberger, se garantiza la estabilidad práctica del observador intervalo en los sistemas de errores de observación usando el concepto de estabilidad entrada-estado, mientras que la condición del ordenamiento parcial entre trayectorias del estado y estimaciones se asegura si los sistemas de errores de observación son cooperativos. Nuestra estrategia permite la elección de la matriz de estado del error de observación; lo que permite seleccionarla como una matriz Metzler y Hurwitz. Esto ayuda a que el error de observación sea estable, cooperativo y robusto ante las incertidumbres generadas por el desconocimiento entradas.

La organización de las siguientes secciones está dada como sigue. Los antecedentes teóricos se presentan en la Sección 2, mientras que el diseño del observador intervalo se expone en la Sección 3. Algunas simulaciones numéricas son presentadas en la Sección 4. Finalmente, se proporciona las conclusiones de los hallazgos en la Sección 5.

2. ANTECEDENTE TEÓRICOS

Notaciones: El símbolo $\succeq$ representa el ordenamiento parcial para un par de vectores $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, si $x_i \geq z_i$, $\forall i = 1, ..., n$ entonces $\mathbf{x} \succeq \mathbf{z}$. Asimismo, es válido para el caso matricial, $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$, si $A_{ij} \geq B_{ij}$ entonces $\mathbf{A} \succeq \mathbf{B}$. En particular, si las componentes de un vector son completamente mayores o iguales que cero, i.e. $x_i \geq 0$, $\forall\, i = 1, ..., n$, el vector $\mathbf{x}$ es dicho ser no-negativo, y se denota como $\mathbf{x} \succeq \mathbf{0}$. Esta denotación es equivalente cuando el vector $\mathbf{x}$ permanece al espacio dimensional $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$. Una matriz no–negativa $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es expresada como $\mathbf{A} \succeq \mathbf{0}$, si $A_{ij} \geq 0$ con $1 \leq \{i, j\} \leq n$. Cabe mencionar que el símbolo anterior ($\succeq$) no debe ser confundido con el de una matriz definida positiva $\mathbf{P}$ (resp. semi-definida positiva), el cual está dado por $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\top > 0$ (resp. $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\top \geq 0$). Además, $\mathbf{M} = \text{máx}\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ es la matriz donde cada entrada está dada por $m_{ij} = \text{máx}\{a_{ij}, b_{ij}\}$. Definimos $\mathbf{N}^+ = \text{máx}\{\mathbf{N}, 0_{p\times m}\}$ y $\mathbf{N}^- = \mathbf{N}^+ - \mathbf{N}$. El valor absoluto está dado como $|\mathbf{N}| = \mathbf{N}^+ + \mathbf{N}^-$. Asimismo, $\mathbf{J} \overset{m}{\succeq} \mathbf{0}$ denota que $\mathbf{J}$ es una matriz Metzler, cuyos elementos fuera de la diagonal son mayores o iguales que cero, es decir, $J_{ij} \geq 0, \forall i \neq j, i, j = 1, ..., n$. Finalmente, el producto matricial $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} := [a_{ij}\mathbf{B}]$ es el producto de Kronecker.

2.1 Sistemas cooperativos

La clase de los sistemas cooperativos forma parte de la familia de sistemas monótonos (Angeli and Sontag, 2003; Hirsch and Smith, 2004). Tales sistemas cooperativos definen el ordenamiento parcial entre las trayectorias del estado y de la salida a partir del ordenamiento parcial en las entradas y en las condiciones iniciales.

A continuación se presenta la definición y caracterización de los sistemas lineales cooperativos.

Definición 1. Considérese el sistema lineal descrito por las siguientes ecuaciones,

$$\Sigma_L : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \end{cases} \tag{1}$$

donde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entrada, y $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ es el vector de salida. Σ_L en (1) es dicho ser un *Sistema Cooperativo* si existe el ordenamiento parcial en las entradas y condiciones iniciales, es decir, $\mathbf{x}_0^1 \succeq \mathbf{x}_0^2$, $\mathbf{u}^1(t) \succeq \mathbf{u}^2(t)$, $\forall t \geq t_0$, entonces las trayectorias del estado y de la salida preservan el ordenamiento parcial para todo tiempo futuro $t \geq t_0$, es decir,

$$\mathbf{x}\left(t, t_0, \mathbf{x}_0^1, \mathbf{u}^1(t)\right) \succeq \mathbf{x}\left(t, t_0, \mathbf{x}_0^2, \mathbf{u}^2(t)\right),$$
$$\mathbf{y}\left(t, t_0, \mathbf{x}_0^1, \mathbf{u}^1(t)\right) \succeq \mathbf{y}\left(t, t_0, \mathbf{x}_0^2, \mathbf{u}^2(t)\right).$$

Proposición 2. (Angeli and Sontag (2003)). Dadas las matrices conocidas $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ con dimensiones apropiadas, Σ_L es un Sistemas Cooperativo si y sólo si las siguientes condiciones permanecen,

$$(\mathbf{a}).\ \ \mathbf{A} \overset{m}{\succeq} \mathbf{0}, \qquad (\mathbf{b}).\ \ \mathbf{B} \succeq \mathbf{0}, \qquad (\mathbf{c}).\ \ \mathbf{C} \succeq \mathbf{0}.$$

Nota 3. Los sistemas positivos también son una subclase de los sistemas monótonos. La propiedad de positividad establece que si los vectores de entrada y condiciones iniciales son no-negativos, $\mathbf{x}_0 \succeq \mathbf{0}$ y $\mathbf{u}(t) \succeq \mathbf{0}$, entonces las trayectorias del estado y salida también son no-negativas, es decir, $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}(t)) \succeq \mathbf{0}$ y $\mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}(t)) \succeq \mathbf{0}$. Las condiciones necesarias y suficientes para los sistemas lineales positivos coinciden exactamente con la descritas para sistemas cooperativos, proporcionadas en la *Proposición 2.*

2.2 Observadores intervalo

Debido a que el objetivo del presente artículo consiste en diseñar observadores intervalo, introducimos una definición general de esta clase de observadores (Avilés and Moreno, 2020).

Definición 4. Considérese el sistema no-lineal, dado por las ecuaciones siguientes,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \boldsymbol{\mathcal{F}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y} &= \boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \end{aligned} \tag{2}$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el estado, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ es la entrada de control, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^l$ es el término incierto o de perturbación que actúa en el sistema, y $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ representa las mediciones. $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ y $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ son funciones no-lineales. Suponga que conocemos: (i) las cotas de las incertidumbres/perturbaciones $\mathbf{v}$, dadas por $\mathbf{v}^+$ y $\mathbf{v}^-$ tal que permanece la siguiente desigualdad por intervalos,

$$\mathbf{v}^+(t) \succeq \mathbf{v}(t) \succeq \mathbf{v}^-(t), \ \ \forall\, t \in \mathbb{R} \tag{3}$$

y (ii) las cotas de las condiciones iniciales $t_0 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, tal que se satisface la desigualdad subsecuente

$$\mathbf{x}_0^+ \succeq \mathbf{x}_0 \succeq \mathbf{x}_0^-. \tag{4}$$

Entonces, el observador de estados, descrito por la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) &= \boldsymbol{\mathcal{G}}\left(t, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{u}, \mathbf{v}^-, \mathbf{v}^+\right), \quad \boldsymbol{\xi}(0) = \boldsymbol{\xi}_0, \\ \widehat{\mathbf{x}}(t) &= \boldsymbol{\mathcal{E}}\left(t, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{u}, \mathbf{v}^-, \mathbf{v}^+\right), \end{aligned} \tag{5}$$

donde $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{n_o}$ es el estado estimado y $\boldsymbol{\xi}_0 = \mathbf{g}(0, \mathbf{x}_0^-, \mathbf{x}_0^+)$ es la condición inicial, es un *Observador que Preserva el Orden Parcial Superior (Inferior)* para el sistema (2) si

(i). para alguna solución $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ de (2-5) con $\mathbf{v}^- = \mathbf{v} = \mathbf{v}^+$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$ se tiene que $\lim_{t\to\infty} ||\widehat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)|| = 0$.

(ii). para los vectores $\mathbf{x}_0,\ \mathbf{x}_0^-,\ \mathbf{x}_0^+ \in \mathbb{R}^n$, y alguna perturbación $\mathbf{v}$, las soluciones satisfacen la desigualdad $t \geq t_0$

$$\widehat{\mathbf{x}}(t) \succeq \mathbf{x}(t) \quad (\mathbf{x}(t) \succeq \widehat{\mathbf{x}}(t)).$$

Además, si el observador (5) es ejecutado un par de veces simultáneamente, y sus ecuaciones de salida son expresadas como

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{x}}^+(t) &= \boldsymbol{\mathcal{E}}^+\left(t, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{u}, \mathbf{v}^-, \mathbf{v}^+\right), \\ \widehat{\mathbf{x}}^-(t) &= \boldsymbol{\mathcal{E}}^-\left(t, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{u}, \mathbf{v}^-, \mathbf{v}^+\right), \end{aligned} \tag{6}$$

y satisfacen que

1. Alguna solución $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ de (2-5) con $\mathbf{v}^- = \mathbf{v} = \mathbf{v}^+$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{t\to\infty} ||\widehat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)|| = 0$.
2. Para los vectores $\mathbf{x}_0,\ \mathbf{x}_0^-,\ \mathbf{x}_0^+ \in \mathbb{R}^n$ y alguna perturbación $\mathbf{v}$, las soluciones satisfacen para todo $t \geq t_0$ con la siguiente desigualdad
$$\widehat{\mathbf{x}}^+(t) \succeq \mathbf{x}(t) \succeq \widehat{\mathbf{x}}^-(t), \tag{7}$$
entonces, son llamados un *Observador Intervalo* para el sistema (2).

Nota 5. Es claro que podemos construir un observador intervalo para sistemas con incertidumbre/perturbaciones $(\mathbf{v}^+(t) \neq \mathbf{v}(t) \neq \mathbf{v}^-(t) \neq \mathbf{0})$, usando dos observadores: un observador que preserva el orden parcial superior e inferior, que satisface la desigualdad (7), y además sus estimaciones convergen de forma práctica a sus valores verdaderos, es decir

$$\lim_{t\to\infty} \left|\left|\widehat{\mathbf{x}}^+(t) - \widehat{\mathbf{x}}^-(t)\right|\right| < c, \quad c \in \mathbb{R}_+.$$

3. OBSERVADOR INTERVALO PARA SISTEMAS LINEALES DE DIMENSIÓN $2n$

En esta sección, se presenta el diseño de un observador intervalo para la familia de sistemas lineales de dimensión $2n$, considerando las primeras mediciones del sistema lineal con la dimensión n.

3.1 Sistema de dimensión $2n$

Sea el sistema lineal de dimensión $2n$, descrito por las ecuaciones siguientes,

$$\Sigma_{\mathrm{S}}: \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x_1}(t) = \mathbf{x}_2(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{A_2}\mathbf{x_1}(t) + \mathbf{A_4}\mathbf{x_2}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}\mathbf{v}(t), \\ \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}_1(t), \end{cases} \tag{8}$$

donde $\mathbf{x}_i(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n,\ i = 1, 2$ son los estados del sistema Σ_{S} en (8), $\mathbf{u}(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^p_{\geq 0}$ es la entrada de control y $\mathbf{v}(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^q_{\geq 0}$ representa a las entradas desconocidas, como perturbaciones o incertidumbres, que están presentes en Σ_{S}. Además $\mathbf{x}_1(t)$ representa las mediciones del sistema acoplado Σ_{S}. $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_4}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ son matrices de dimensiones apropiadas.

Consideramos las siguientes suposiciones para el sistema Σ_{S} en (8).

Suposición 1. Las condiciones iniciales $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2$ están acotadas por intervalos, dada por la forma,

$$\mathbf{x}_i^+(0) \succeq \mathbf{x}_i(0) \succeq \mathbf{x}_i^-(0), \tag{9}$$

donde $\mathbf{x}_i^+(0)$ y $\mathbf{x}_i^-(0)$ son las cotas conocidas de las condiciones iniciales de Σ_{S}.

Suposición 2. La entrada de control $\mathbf{u}(t)$, también está acotada por intervalos,

$$\mathbf{u}^+(t) \succeq \mathbf{u}(t) \succeq \mathbf{u}^-(t), \tag{10}$$

donde $\mathbf{u}^+(t)$ y $\mathbf{u}^-(t)$ son funciones continuas conocidas de $u(t)$. Además, el término de incertidumbre/perturbación, dado por $\mathbf{v}(t)$ está acotada por la siguiente desigualdad,

$$\mathbf{v}^+(t) \succeq \mathbf{v}(t) \succeq \mathbf{v}^-(t), \tag{11}$$

donde $\mathbf{v}^+(t)$ y $\mathbf{v}^-(t)$ son las funciones conocidas de $\mathbf{v}(t)$.

3.2 Diseño del observador intervalo

Nuestro objetivo está enfocado diseñar un observador intervalo para la clase de sistemas Σ_{S} en (8), cuyas estimaciones sean convergentes, y simultáneamente preserven el ordenamiento parcial con respecto a las trayectorias de los estados, a partir de una inicialización adecuada en las condiciones iniciales y entradas.

Consideramos un par de observadores de estados, uno superior y otro inferior, para el sistema lineal Σ_{S} en (8), dados por las siguientes ecuaciones,

$$\Sigma_{\mathrm{O}^+}: \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\mathbf{w}_1^+ \\ \mathbf{w}_2^+\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\mathbf{L}_1 & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{L}_2 & \mathbf{A}_4 - \mathbf{H}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{w}_1^+ \\ \mathbf{w}_2^+\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathbf{0} \\ \mathbf{B}\end{pmatrix}\mathbf{u}^+ \\ \quad + \begin{pmatrix}\mathbf{0} \\ \mathbf{D}\end{pmatrix}\mathbf{v}^+ + \begin{pmatrix}\mathbf{H} + \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{A}_2 + (\mathbf{A}_4 - \mathbf{H})\,\mathbf{H} + \mathbf{L}_2\end{pmatrix}\mathbf{x}_1, \\ \quad \begin{pmatrix}\widehat{\mathbf{x}}_1^+ \\ \widehat{\mathbf{x}}_2^+\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{w}_1^+ \\ \mathbf{w}_2^+\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathbf{0} \\ \mathbf{H}\end{pmatrix}\mathbf{x}_1, \end{cases} \tag{12}$$

$$\Sigma_{\mathrm{O}^-}: \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\mathbf{w}_1^- \\ \mathbf{w}_2^-\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\mathbf{L}_1 & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{L}_2 & \mathbf{A}_4 - \mathbf{H}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{w}_1^- \\ \mathbf{w}_2^-\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathbf{0} \\ \mathbf{B}\end{pmatrix}\mathbf{u}^- \\ \quad + \begin{pmatrix}\mathbf{0} \\ \mathbf{D}\end{pmatrix}\mathbf{v}^- + \begin{pmatrix}\mathbf{H} + \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{A}_2 + (\mathbf{A}_4 - \mathbf{H})\,\mathbf{H} + \mathbf{L}_2\end{pmatrix}\mathbf{x}_1, \\ \quad \begin{pmatrix}\widehat{\mathbf{x}}_1^- \\ \widehat{\mathbf{x}}_2^-\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{w}_1^- \\ \mathbf{w}_2^-\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathbf{0} \\ \mathbf{H}\end{pmatrix}\mathbf{x}_1, \end{cases} \tag{13}$$

donde $\mathbf{w}_i^{\pm}$, $i = 1, 2$ son los estados del observadores $(\Sigma_{\mathrm{O}^+}, \Sigma_{\mathrm{O}^-})$ y $\widehat{\mathbf{x}}_i^{\pm}$, $i = 1, 2$ son las estimaciones de los estados de la planta Σ_{S} en (8). Las ganancias de los observadores son $\mathbf{L}_i, i = 1, 2$, $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

En el siguiente Teorema se presentan las condiciones de diseño de un observador intervalo para el sistema Σ_{S}.

Teorema 1. Suponga que las siguientes condiciones son satisfechas,

$$\ell_i \geq 0 \tag{14a}$$
$$\ell_1\ell_4 > \ell_2 \tag{14b}$$
$$\mathbf{L}_1 = \ell_1\mathbf{I} \tag{14c}$$
$$\mathbf{L}_2 = -\ell_2\mathbf{I} \tag{14d}$$
$$\mathbf{H} = \mathbf{A}_4 + \ell_4\mathbf{I}, \tag{14e}$$
$$\mathbf{B} \succeq 0,\ \mathbf{D} \succeq 0 \tag{14f}$$

Entonces, los observadores $(\Sigma_{\mathrm{O}^+}, \Sigma_{\mathrm{O}^-})$ componen un *Observador Intervalo* para el sistema lineal de dimensión $2n$ en Σ_{S} en (8).

Demostración 1. Esta prueba analiza el caso del observador superior Σ_{O}^+. Considere el sistema dinámico

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\widehat{\mathbf{x}}_1^+\\ \widehat{\mathbf{x}}_2^+\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I}_n\\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1\\ \hat{\mathbf{x}}_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}\mathbf{u}^+ + \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{D}\end{pmatrix}\mathbf{v}^+ - \begin{pmatrix}\mathbf{L}_1\\ \mathbf{L}_2\end{pmatrix}\left(\widehat{\mathbf{x}}_1^+ - \mathbf{x_1}\right) - \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix}\left(\hat{\mathbf{x}}_2^+ - \mathbf{x_2}\right). \tag{15}$$

Utilizamos $\mathbf{x}_2(t)$ para construir el error de estimación definido como $\mathbf{e}_i^+ := \widehat{\mathbf{x}}_i^+ - \mathbf{x}_i$. Entonces las dinámicas de los errores de estimación son expresadas como,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1^+\\ \mathbf{e}_2^+\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\mathbf{L}_1 & \mathbf{I}_n\\ -\mathbf{L}_2 & \mathbf{A}_4 - \mathbf{H}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1^+\\ \mathbf{e}_2^+\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}\overline{\mathbf{u}} + \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{D}\end{pmatrix}\overline{\mathbf{v}}. \tag{16}$$

donde $\overline{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}, \overline{\mathbf{v}} = \mathbf{v}^+ - \mathbf{v}$, (para el caso del observador inferior, considerar $\underline{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^-$, y $\underline{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}^-$). Tomando en cuenta las condiciones (14c–14e), la expresión anterior se reduce a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1^+\\ \mathbf{e}_2^+\end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix}-\ell_1 & 1\\ \ell_2 & -\ell_4\end{pmatrix}\otimes\mathbf{I}\right]\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1^+\\ \mathbf{e}_2^+\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}\overline{\mathbf{u}} + \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{D}\end{pmatrix}\overline{\mathbf{v}},$$

donde la matriz de estado es Hurwitz y Metzler cuando se satisface (14b). Además, estas dinámicas del error de estimación superior satisfacen las condiciones de un sistema cooperativo (ver *Proposición 2*) cuando se cumple (14f). De aquí que las trayectorias de los errores de estimación están acotados por abajo cuando $\mathbf{e}(0) \succeq \mathbf{0}$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1^+\\ \mathbf{e}_2^+\end{pmatrix} \succeq \underbrace{\left[\begin{pmatrix}-\ell_1 & 1\\ \ell_2 & -\ell_4\end{pmatrix}\otimes\mathbf{I}_n\right]}_{=:\mathbf{F}\overset{m}{\succeq}0}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1^+(0)\\ \mathbf{e}_2^+(0)\end{pmatrix}.$$

Para garantizar la estabilidad del error de observación, consideramos la función candidata de Lyapunov,

$$V = \mathbf{e}^\top\mathbf{P}\mathbf{e},$$

donde $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\top > 0$ es definida positiva, $\mathbf{e} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]^\top$. Su derivada de V a lo largo del tiempo es

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V = &\begin{pmatrix}\mathbf{e}\\ \overline{\mathbf{u}}\\ \overline{\mathbf{v}}\end{pmatrix}^\top\begin{pmatrix}\mathbf{F}^\top\mathbf{P}+\mathbf{P}\mathbf{F} & \mathbf{P}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix} & \mathbf{P}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{D}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}^\top\mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{D}\end{pmatrix}^\top\mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{e}\\ \overline{\mathbf{u}}\\ \overline{\mathbf{v}}\end{pmatrix}\\ \leq &-\mathbf{e}^\top\mathbf{Q}\mathbf{e}\\ &+2\lambda_{\text{máx}}(\mathbf{P})\,||\mathbf{e}||_2\left(||\mathbf{B}||_2\,||\overline{\mathbf{u}}||_2 + ||\mathbf{D}||_2\,||\overline{\mathbf{v}}||_2\right)\\ \leq &-\lambda_{\text{mín}}(\mathbf{Q})\,||\mathbf{e}||_2^2\\ &+2\lambda_{\text{máx}}(\mathbf{P})\,||\mathbf{e}||_2\left(||\mathbf{B}||_2\,||\overline{\mathbf{u}}||_2 + ||\mathbf{D}||_2\,||\overline{\mathbf{v}}||_2\right),\end{aligned}$$

donde $\lambda_{\text{máx}}(\mathbf{P})$ y $\lambda_{\text{mín}}(\mathbf{P})$ denotan el mayor y menor eigenvalor de $\mathbf{P}$, respectivamente. Aquí $\mathbf{Q} = -\left(\mathbf{F}^\top\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{F}\right)$ es una matriz definida positiva, cuya existencia se garantiza dado que la matriz $\mathbf{F}$ es Hurwitz. Adicionalmente, $\frac{\mathrm{d}}{dt}V$ es negativa cuando

$$||\mathbf{e}||_2 \geq 2\frac{\lambda_{\text{máx}}(\mathbf{P})}{\lambda_{\text{mín}}(\mathbf{Q})}\left(||\mathbf{B}||_2\,||\overline{\mathbf{u}}||_2 + ||\mathbf{D}||_2\,||\overline{\mathbf{v}}||_2\right).$$

Primeramente, se había considerado $\mathbf{x}_2(t)$ en (16), el cual es desconocido para el observador Σ_{O^+}. Sin embargo, conociendo que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2,$$

en Σ_{S}, podemos sustituir este término en (15), obteniendo las siguientes expresiones

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\widehat{\mathbf{x}}_1^+\\ \widehat{\mathbf{x}}_2^+ - \mathbf{H}\mathbf{x}_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I}_n\\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1\\ \hat{\mathbf{x}}_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}\mathbf{u}^+ + \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{D}\end{pmatrix}\mathbf{v}^+ - \begin{pmatrix}\mathbf{L}_1\\ \mathbf{L}_2\end{pmatrix}\left(\widehat{\mathbf{x}}_1^+ - \mathbf{x}_1\right) - \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix}\widehat{\mathbf{x}}_2^+.$$

La prueba concluye al considerar la ecuación de salida del observador Σ_{O^+} en (12), y reorganizar la expresión anterior en términos de $\mathbf{w}_i^+(t)$.

4. SIMULACIONES NUMÉRICAS

En esta sección consideramos el siguiente modelo

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\\ z_4\end{pmatrix} = &\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -\dfrac{k}{m_1} & \dfrac{k}{m_1} & -\dfrac{c}{m_1} & \dfrac{c}{m_1}\\ \dfrac{k}{m_2} & -\dfrac{k}{m_2} & \dfrac{c}{m_2} & -\dfrac{c}{m_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\\ z_4\end{pmatrix}\\ &+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \dfrac{1}{m_1}\\ 0\end{pmatrix}(u(t)+v(t))\\ \mathbf{y} = &\begin{pmatrix}z_1 & z_2\end{pmatrix}^\top.\end{aligned} \tag{17}$$

Este modelo ha sido estudiado, entre otros, en (Zhang et al., 2016) donde se diseña un observador lineal en el caso de que los parámetros de la planta son desconocidos. En contraste, nuestro método requiere el conocimiento de los parámetros de la planta, así como las cotas de la

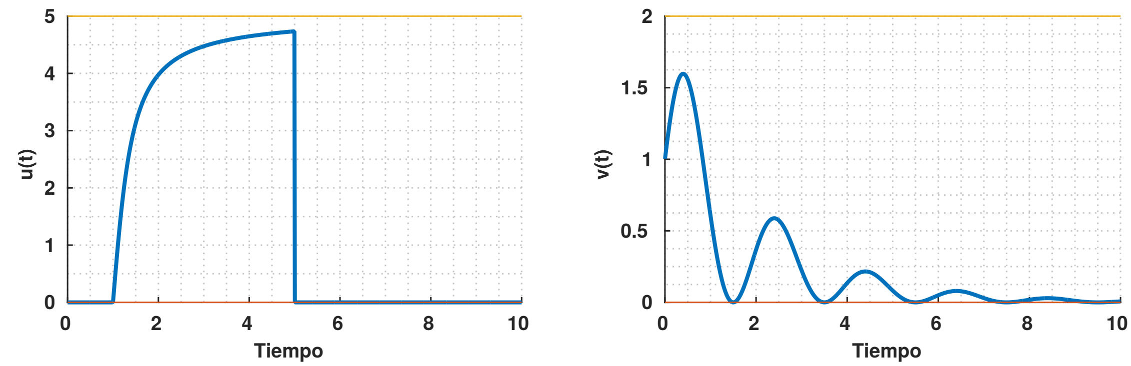

Figura 1. Entrada $u(t)$ y perturbación $v(t)$ consideradas para la simualción.

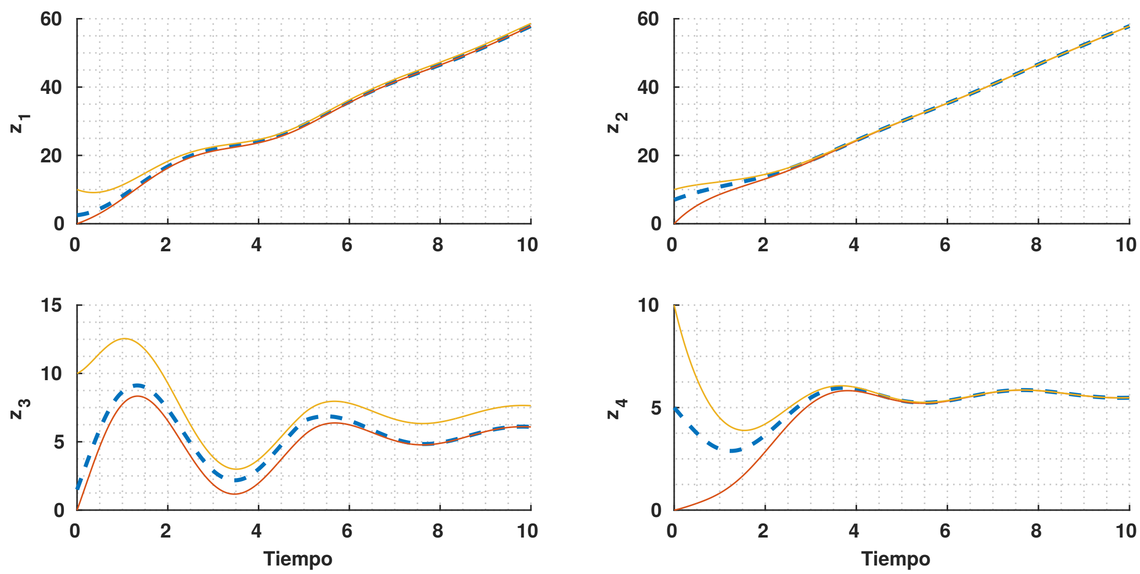

Figura 2. Comparción de los estados reales con los estimados superiores e inferiores.

entrada $u(t)$ y de la perturbación $v(t)$. Los parámetros que consideramos son los siguientes:

$$m_1 = 3,\ m_2 = 10,\ k = 5,\ c = 1.$$

Además, la entrada y la perturbación que consideramos se muestra en la Figura 1, donde se puede observar que ambas están acotadas en los intervalos $[0, 5]$ y $[0, 2]$, respectivamente.

Para los observadores $(\Sigma_{O^+}, \Sigma_{O^-})$ en (12)-(13) seleccionamos las siguientes ganancias:

$$\ell_1 = 2,\ \ell_2 = 1,\ \ell_4 = 2, \mathbf{H} = \begin{pmatrix} -\dfrac{c}{m_1} & \dfrac{c}{m_1} \\ \dfrac{c}{m_2} & -\dfrac{c}{m_2} \end{pmatrix} + \ell_4 \mathbf{I}_2.$$

Con esta elección de los parámetros, la Figura 2 muestra los estados estimados y reales. En color amarillo, se encuentra la estimación superior de los estados, mientras que en color rojo, el inferior. La línea discontinua muestra el estado real. Esta es una característica de los observadores intervalo dada por

$$\widehat{\mathbf{z}}^+(t)\ \succeq\ \mathbf{z}(t) \succeq \widehat{\mathbf{z}}^-(t),\ \forall t \geq 0.$$

Es importante destacar que las condiciones iniciales de los observadores y la planta satisfacen

$$\mathbf{z}_0^+\ \succeq\ \mathbf{z}_0\ \succeq\ \mathbf{z}_0^-.$$

Además, se observa fácilmente el comportamiento de la estabilidad práctica de las estimaciones del observador intervalo. A su vez, la Figura 3 presenta los errores de observación. Cabe destacar que en todos los casos, el error de observación preserva el signo del error de observación inicial.

5. CONCLUSIONES

En este artículo se presentó el diseño para un Observador Intervalo para la familia de sistemas lineales de dimensión $2n$. Con este observador tiene un sistema de error de estimación, cuya matriz de estados puede ser escogida arbitrariamente; lo que permite asignar la dinámica del error de observación como un sistema cooperativo, con

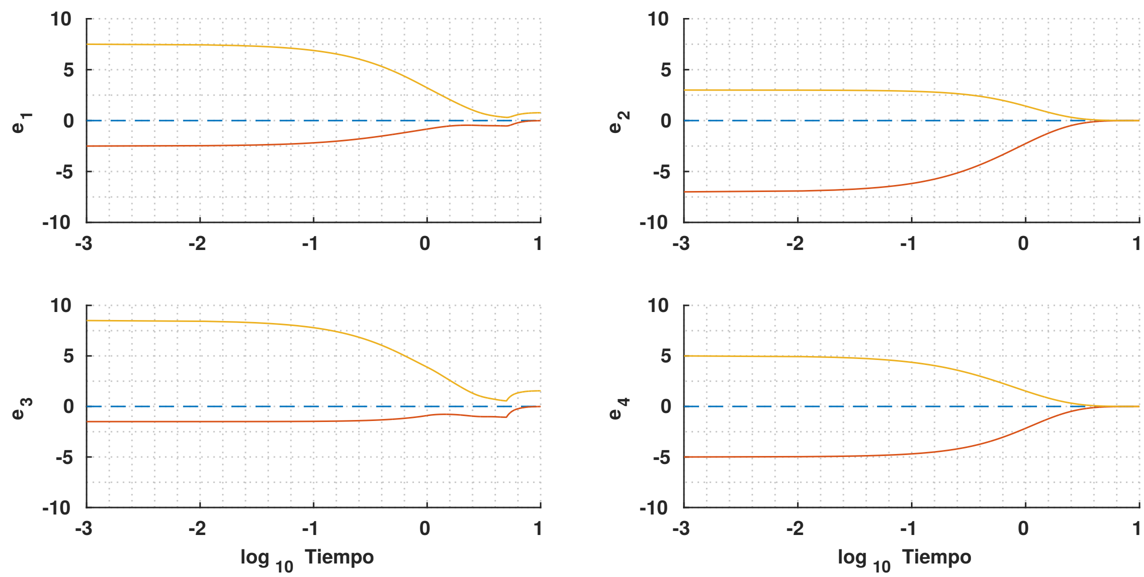

Figura 3. Errores de observación.

estabilidad práctica debido a las entradas acotadas que actúan en la planta.

REFERENCIAS

Alcaraz-Gonzalez, V., Harmand, J., Rapaport, A., Steyer, J., Gonzalez-Alvarez, V., and Pelayo-Ortiz, C. (2002). Software sensors for highly uncertain wwtps: a new approach based on interval observers. *Water Res*, 36(2515).

Angeli, D. and Sontag, D. (2003). Monotone control systems. *IEEE Transactions Automatic*, 48(10), 1684–1698.

Avilés, J.D. and Moreno, J.A. (2014). Preserving order observers for nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 24(16), 2153–2178.

Avilés, J.D. and Moreno, J.A. (2018). Dissipative observers for discrete-time nonlinear systems. *Journal of the Franklin Institute*, 355(13), 5759–5770.

Avilés, J.D. and Moreno, J.A. (2020). Dissipative interval observer design for discrete-time nonlinear systems. *Asian Journal of Control*, 22(4), 1422–1436.

Avilés, J. and Moreno, J. (2009). Cooperative observers for nonlinear systems. *Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference, Shanghai, China*, 6125–6130.

Bernard, O. and Gouze, J. (2004). Closed loop observers bundle for uncertain biotechnological models. *Journal of Process Control*, 14(3), 765–774.

Efimov, D., Perruquetti, W., Raïssi, T., and Zolghadri, A. (2013a). Interval observers for time-varying discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(12), 3218–3224.

Efimov, D., Raïssi, T., Chebotarev, S., and Zolghadri, A. (2013b). Interval state observer for nonlinear time varying systems. *Automatica*, 49(1), 200–205.

Gouze, J.L., Rapaport, A., and Hadj-Sadok, M.Z. (2000). Interval observers for uncertain biological systems. *Ecol Modelling*, 133(1-2), 45–56.

Gouzé, J.L., Moisan, M., and Bernard, O. (2006). A simple improvement of interval asymptotic observers for biotechnological processes. In *Proceedings of the ROCOND 2006 conference", Toulouse, France.*

Hirsch, M. and Smith, H. (2004). *Monotone Dynamical Systems.* Handbook of differential equations: ordinary differential equations. Vol. II, Elsevier B. V., Amsterdam 239-357.

Khan, A., Xie, W., Zhang, B., and Liu, L.W. (2021). A survey of interval observers design methods and implementation for uncertain systems. *Journal of the Franklin Institute*, 358(6), 3077–3126.

Mazenc, F. and Bernard, O. (2010). Asymptotically stable interval observers for planar systems with complex poles. *IEEE Trans. on Aut. Control*, 55, 523–527.

Mazenc, F., Dinh, T., and Niculescu, S. (2013). Robust interval observers for discrete time systems of luenberger type. *ACC, Washington USA*, 2484–2489.

Mazenc, F. and Bernard, O. (2011). Interval observers for linear time-invariant systems with disturbances. *Automatica*, 47(1), 140–147.

Moisan, M., Bernard, O., and Gouze, J. (2009). Near optimal interval observers bundle for uncertain bioreactors. *Automatica*, 45, 291–295.

Thabet, R.E.H., Raïssi, T., Combastel, C., Efimov, D., and Zolghadri, A. (2014). An effective method to interval observer design for time-varying systems. *Automatica*, 50(10), 2677–2684.

Zhang, H., Zhao, S., and Gao, Z. (2016). An active disturbance rejection control solution for the two-mass-spring benchmark problem. In *2016 American Control Conference (ACC)*, 1566–1571. IEEE.