

Necessary and sufficient stability conditions: Traffic systems ^{*}

Gerson Portilla ^{*} Alejandro Castaño ^{*} Sabine Mondié ^{*}

^{*} *Departamento de Control Automático, CINVESTAV-IPN, 07360 Mexico D.F., Mexico (e-mail: gportilla,acastano,smondie@ctrl.cinvestav.mx).*

Abstract: A new stability analysis for traffic systems characterized by the presence of pointwise and distributed delays is presented. The stability analysis is carried out via stability tests in a finite number of mathematical operations. In addition, an improved necessary and sufficient condition for retarded type systems is also presented. Some examples allow testing and validating the proposed stability analysis.

Keywords: Traffic systems, Lyapunov-Krasovskii functionals, Lyapunov matrix, stability, retarded type systems, linear system with distributed delays.

1. INTRODUCCION

Recientemente, la evolución y desarrollo de tecnologías de comunicaciones, tales como la conexión Vehículo a Vehículo (V2V) o Vehículo a Infraestructura (V2I), han posibilitado el desarrollo de asistentes de manejo basados en el intercambio de información vehicular dentro del flujo de tráfico (Khan et al., 2022). Estas estructuras forman sistemas de vehículos conectados constituidos por flotillas de vehículos que mantienen una referencia de velocidad y distancia inter-vehicular.

La tecnología de vehículos conectados ha demostrado ser una forma eficiente de administrar los sistemas de transporte (Suthaputchakun et al., 2012); aborda retos relacionados con la congestión vial, consumo de combustible, prevención de accidentes vehiculares y seguridad activa de los conductores en situaciones potenciales de colisión (Sepulcre and Gozalvez, 2012).

Diversas estrategias de control han sido diseñadas y aplicadas en sistemas de vehículos conectados a través de conexiones V2X; por ejemplo el Control de Crucero Conectado (CCC) (Orosz, 2016) o el Control de Crucero Adaptativo (CCA) (Chu et al., 2023). Otras investigaciones se enfocan en el diseño de controladores jerárquicos CCC (Zhang et al., 2017), o en abordar por medio de predictores dinámicos, el problema de estabilización en presencia de retardos en la entrada (Vite et al., 2022). En Ersal et al. (2020) se presenta un estado del arte detallado acerca del control de vehículos inteligentes conectados y el respectivo análisis de estabilidad.

El análisis de estabilidad de los sistemas de tráfico se clasifica en estabilidad de planta (habilidad de la flotilla para alcanzar el estado estable cuando no ocurren perturbaciones) y estabilidad de la cadena (capacidad de la flotilla vehicular de asegurar que las perturbaciones en el vehículo líder no se amplifiquen en los seguidores). El uso de conexiones V2V en controladores de crucero ha generado nuevas problemáticas, al introducir retardos en la comunicación y procesamiento de datos. Esto genera que la sintonización de los controladores requiera de criterios de estabilidad que toman en cuenta retardos en el tiempo así como fenómenos como la memoria del conductor.

En el presente trabajo de investigación, se estudia la estabilidad de sistemas de tráfico con retardos para la sintonización de controladores de crucero. Lo anterior mediante criterios exactos de estabilidad en el enfoque de Lyapunov-Krasovskii basados en las matrices fundamental y de Lyapunov del sistema (Mondié et al., 2022; Castaño et al., 2023). Además, partiendo del esquema de discretización introducido por Alexandrova (2023), se presenta una condición suficiente y necesaria para sistemas de tipo retardado.

Esta contribución se organiza de la siguiente manera. La Sección 2 contiene los preliminares y resultados de estabilidad/inestabilidad en el marco de Lyapunov-Krasovskii. Una condición de estabilidad necesaria y suficiente para sistemas de tipo retardado es presentado en la Sección 3. En la Sección 4, se introducen los modelos matemáticos para sistemas de tráfico en presencia de retardos. Dos ejemplos donde se estudia la estabilidad de sistemas de tráfico con retardos se presentan en la Sección 5. Finalmente, en la Sección 6 se dan algunas conclusiones.

Notación: \mathbb{S}_+^n es el conjunto de matrices positivas definidas en $\mathbb{R}^{n \times n}$. El espacio de funciones continuas

^{*} El trabajo de todos los autores fue apoyado por el proyecto CONACYT A1-S-24796, Mexico.

a pedazos y continuas sobre $[-h, 0]$ se escribe como $\mathcal{H} = \mathcal{PC}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{C}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$, respectivamente. Las funciones $[\cdot]$ y $[\cdot]$ se denotan como la función techo y piso, respectivamente.

2. PRELIMINARES

Considere el sistema lineal con retardos en el tiempo

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^m A_j x(t - h_j) + \int_{-h}^0 G(\theta) x(t + \theta) d\theta, \quad (1)$$

donde $A_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 0, 1, 2, \dots, m$, $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_m = h$ son retardos y la función matricial $G(\theta) \in \mathcal{PC}([-h, 0], \mathbb{R}^{n \times n})$ representa el núcleo del retardo distribuido. Si $G(\theta)$ es igual a cero, el sistema (1) se reduce a un sistema con retardos puntuales. La condición inicial se define como $\varphi \in \mathcal{H}$. La restricción de la solución $x(t, \varphi)$ del sistema (1) en el intervalo $[t - h, t]$ es $x_t(\varphi) : \theta \rightarrow x(t + \theta, \varphi)$, $\theta \in [-h, 0]$.

En esta contribución, el análisis de estabilidad para el sistema (1) es abordado haciendo uso de la funcional de Lyapunov-Krasovskii con derivada prescrita basada en la matriz de Lyapunov para sistemas retardados

$$v_1(\varphi) = v_0(\varphi) + \int_{-h}^0 \varphi^T(\tau) W \varphi(\tau) d\tau, \quad (2)$$

donde

$$\begin{aligned} v_0(\varphi) = & \varphi^T(0)U(0)\varphi(0) + 2\varphi^T(0) \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 U(-\theta - h_j) \\ & \times A_j \varphi(\theta) d\theta + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m \int_{-h_k}^0 \varphi^T(\theta_1) A_k^T \\ & \times \int_{-h_j}^0 U(\theta_1 + h_k - \theta_2 - h_j) A_j \varphi(\theta_2) d\theta_2 d\theta_1 \\ & + 2\varphi^T(0) \int_{-h}^0 \int_{-h}^{\theta} U(\xi - \theta) G(\xi) d\xi \varphi(\theta) d\theta \\ & + 2 \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \int_{-h}^0 \int_{-h}^{\theta_2} \varphi^T(\theta_1) A_j^T \\ & \times U(h_j + \theta_1 - \theta_2 + \xi) G(\xi) \varphi(\theta_2) d\xi d\theta_2 d\theta_1 \\ & + \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta_1) \int_{-h}^0 \int_{-h}^{\theta_1} \int_{-h}^{\theta_2} G^T(\xi_1) \\ & \times U(\theta_1 - \theta_2 - \xi_1 + \xi_2) G(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 \varphi(\theta_2) d\theta_2 d\theta_1. \end{aligned}$$

Aquí, $W \in \mathbb{S}_n^+$, y $U(\tau)$ es la matriz de Lyapunov para sistemas retardados, que es solución de un conjunto de ecuaciones, denominadas propiedad dinámica, algebraica y simétrica (Kharitonov, 2013). La existencia y unicidad de $U(\cdot)$ está determinada por la condición de Lyapunov, la cual establece que el espectro del sistema no debe contener valores propios s_1, s_2 tales que $s_1 + s_2 = 0$. La derivada con respecto al tiempo de $v_1(\varphi)$ a lo largo de las trayectorias del sistema (1) es dada por

$$\left. \frac{dv_1(x_t)}{dt} \right|_{(1)} = -x^T(t - h, \varphi) W x(t - h, \varphi), \quad t \geq 0.$$

2.1 Resultado sobre sistemas con retardo distribuido

En Castaño et al. (2023) se presenta un criterio para el análisis de la estabilidad de sistemas de la forma (1) que depende de la matriz fundamental del sistema y de $U(\cdot)$. Este criterio requiere de un número finito de operaciones matemáticas, y se enuncia a continuación.

Teorema 2.1. (Castaño et al., 2023) El sistema (1) es exponencialmente estable si y solo si la condición de Lyapunov se satisface y

$$\left[U\left(\frac{j-i}{r-1}h\right) - \alpha_0 K^T\left(\frac{j-i}{r-1}h\right) K\left(\frac{j-i}{r-1}h\right) \right]_{i,j=1}^r > 0$$

con

$$r = 1 + \lceil h e^{Lh} (M + L)(\alpha^* + \sqrt{\alpha^*(\alpha^* + 1)}) - Lh \rceil.$$

Aquí, $K(t)$ es la matriz fundamental del sistema (1), L es una constante positiva tal que $\|\dot{K}(t)\| \leq L$ para

$$t \in (0, h), \quad M = \sum_{j=0}^m \|A_j\| + g, \quad \text{con } g = \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|G(\theta)\|$$

y $\alpha^* = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_0}$, $\alpha_0 \in (0, \alpha_0^*)$. Los valores de α_0^* , α_1 y α_2 están determinados por

$$\alpha_0^* = \min \left(-\frac{1}{(m+1)\lambda_{\min}(P_1)}, \frac{1}{\eta h(m+1)\lambda_{\max}(P_2)} \right),$$

$$\alpha_1 = \frac{e^{-2hM} \lambda_{\min}(W)}{4M} \cos^2(b_0),$$

$$\alpha_2 = \max_{\tau \in [0, h]} \|U(\tau)\| \left(1 + \sum_{j=1}^m \|A_j\| h_j + \frac{gh^2}{2} \right)^2 + h \|W\|,$$

con b_0 la única solución en el intervalo $[0, \pi/2]$ de $f(b) = \sin^4(b)((hM)^2 + b^2) - (hM)^2 = 0$, además $\eta > 0$, $A = (A_0, A_1, \dots, A_m) \in \mathbb{R}^{n \times n(m+1)}$, $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{m+1}$, y

$$\begin{aligned} P_1 = & \left[I_{m+1} \otimes W - \frac{1}{\eta} (e_1 \cdot e_1^T) \otimes W \right]^{-1} \\ & \times [e_1 \otimes I_n \cdot A + A^T \cdot e_1 \otimes I_n - h \cdot (e_1 \cdot e_1^T) \otimes I_n] \\ P_2 = & W^{-1} G^T(\theta) G(\theta), \quad \forall \theta \in [-h, 0]. \end{aligned}$$

2.2 Resultados sobre sistemas de tipo retardado

Para la matriz $G(\theta)$ igual a cero y un retardo puntual, el sistema (1) se reduce a un sistema de tipo retardado de la forma

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - h), \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Considere el conjunto de funciones

$$\mathcal{S} = \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^k([-h, 0], \mathbb{R}^n) \mid \|\varphi\|_h = \|\varphi(0)\| = 1, \right. \\ \left. \|\varphi^{(l)}\|_h \leq M^l, \quad l = \overline{1, k} \right\},$$

donde $M = \|A_0\| + \|A_1\|$.

A continuación se recapitulan resultados recientes de estabilidad e inestabilidad, expresados en términos de la funcional (2).

Lema 2.1. (Egorov, 2020) El sistema (3) es exponencialmente estable, si y solo si, existe una constante $\beta_1 > 0$ tal que la funcional (2) admite la cota inferior

$$v_1(\varphi) \geq \beta_1 \|\varphi(0)\|^2, \quad \varphi \in \mathcal{PC}([-h, 0], \mathbb{R}^n).$$

Cabe mencionar que la prueba de necesidad en Egorov (2020) permite calcular β_1 de forma constructiva.

Lema 2.2. (Mondié et al., 2022) Si el sistema (3) es inestable, entonces existe una función $\varphi \in \mathcal{S}$ tal que

$$v_1(\varphi) \leq -a_1 \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\lambda_{\min}(W)}{8Me^{2Mh}}(1 + \cos(b)),$$

donde $b \in (0, \pi)$ es una solución de la ecuación

$$((2Mh)^2 + b^2)(1 - \cos(b))^2 = 4(2Mh)^2.$$

En Alexandrova (2023), se presentó un novedoso criterio de estabilidad en un número finito de operaciones matemáticas para el sistema (3). Este criterio se basa en considerar una aproximación lineal a trozos de la función φ :

$$\begin{aligned} \varphi(s + \theta_j) &= l_N(s + \theta_j) + \eta_N(s + \theta_j), \\ l_N(s + \theta_j) &= \widehat{\varphi}_j \left(1 + \frac{s}{\Delta}\right) - \widehat{\varphi}_{j+1} \frac{s}{\Delta}, \end{aligned} \quad (4)$$

$s \in [-\Delta, 0]$, $j = \overline{0, N-1}$. Aquí, l_N es la aproximación lineal a pedazos de φ , $\eta_N(\theta) = \varphi(\theta) - l_N(\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$, es el error de aproximación y $\widehat{\varphi}_j = \varphi(\theta_j)$, $j = \overline{0, N}$.

La evaluación de l_N en el argumento de $v_0(\varphi)$ resulta en una funcional discretizada de la forma

$$v_0(l_N) \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{\varphi}^T \Lambda_N \widehat{\varphi}. \quad (5)$$

Aquí, los bloques de $\Lambda_N = \{\Lambda^{ij}\}_{i,j=0}^N$ son dados por

$$\begin{aligned} \Lambda^{00} &= U(0) + \mathcal{M}_N + \mathcal{M}_N^T + \mathcal{P}_0, \quad \Lambda^{NN} = \mathcal{P}_0, \\ \Lambda^{0N} &= \mathcal{N}_1 + \mathcal{Q}_{N-1}, \quad \Lambda^{k,k+l} = \Omega_l + \Omega_{-l}^T, \quad l = \overline{0, N-k-1}, \\ \Lambda^{0k} &= \mathcal{M}_{N-k} + \mathcal{N}_{N-k+1} + \Omega_k, \quad \Lambda^{kN} = \Omega_{N-k}, \\ k &= \overline{1, N-1}, \text{ donde } \Omega_j = \mathcal{P}_j + \mathcal{Q}_{j-1}, \quad j = \overline{-N+2, N-1}, \\ \Lambda^{jk} &= \Lambda^{kj^T} \text{ para otros índices, } \widehat{\varphi} = (\widehat{\varphi}_0^T, \widehat{\varphi}_1^T, \dots, \widehat{\varphi}_N^T)^T, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_k &= \int_{-\Delta}^0 U^T(s + k\Delta) \left(1 + \frac{s}{\Delta}\right) ds A_1, \\ \mathcal{N}_k &= \int_{-\Delta}^0 U^T(s + k\Delta) \left(-\frac{s}{\Delta}\right) ds A_1, \\ \mathcal{P}_l &= A_1^T \int_{-\Delta}^0 \int_{-\Delta}^0 \widehat{U}_l(s_1 - s_2) \left(1 + \frac{s_1}{\Delta}\right) \left(1 + \frac{s_2}{\Delta}\right) ds_2 ds_1 A_1, \\ \mathcal{Q}_l &= A_1^T \int_{-\Delta}^0 \int_{-\Delta}^0 \widehat{U}_l(s_1 - s_2) \left(1 + \frac{s_1}{\Delta}\right) \left(-\frac{s_2}{\Delta}\right) ds_2 ds_1 A_1, \end{aligned}$$

para $l = \overline{-(N-1), N-1}$ y $\widehat{U}_l(s_1 - s_2) = U(s_1 - s_2 + l\Delta)$.

Observación 2.1. Las matrices \mathcal{M}_k , \mathcal{N}_k , \mathcal{P}_l , \mathcal{Q}_l pueden ser calculadas a través de un método recursivo usando las propiedades de la matriz de Lyapunov para sistemas con retardo como se presenta en Alexandrova (2023).

La funcional discretizada (5) permitió llegar al siguiente criterio de estabilidad para el sistema (3).

Teorema 2.2. (Alexandrova, 2023) El sistema (3) es exponencialmente estable, si y solo si la condición de Lyapunov se mantiene y la matriz Λ_{N^*} es no negativa definida con

$$N^* = \left\lceil \sqrt{\frac{4cM}{\lambda_{\min}(W)}} \right\rceil, \quad c = \frac{1}{6} M^2 h^3 (M_1 + hM_2),$$

$$M_1 = \max_{\theta \in [0, h]} \|U^T(\theta)A_1\|, \quad M_2 = \max_{\theta \in [-h, h]} \|A_1^T U(\theta)A_1\|.$$

3. CONDICIÓN SUFICIENTE Y NECESARIA PARA SISTEMAS DE TIPO RETARDADO

En esta sección, se presenta una condición suficiente y necesaria para sistemas de tipo retardado en el marco de trabajo de la funcional $v_1(\varphi)$. Repitiendo pasos similares como en Alexandrova (2023), se evalúa la función continua a pedazos l_N en el argumento de la funcional $v_1(\varphi)$, dando como resultado la siguiente funcional discretizada

$$v_1(l_N) \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{\varphi}^T (\Lambda_N + \mathcal{W}_N) \widehat{\varphi}, \quad (6)$$

donde

$$\mathcal{W}_N = \frac{\Delta}{3} \begin{pmatrix} w & \frac{1}{2}w & 0 & \dots & \dots & 0 \\ * & 2w & \frac{1}{2}w & \dots & \dots & 0 \\ 0 & * & 2w & \frac{1}{2}w & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & * & 2w & \frac{1}{2}w & \dots \\ 0 & \dots & 0 & * & \frac{1}{2}w & \dots \end{pmatrix}.$$

Posteriormente, se obtiene un estimado del error de la funcional discretizada de $v_1(\varphi)$

$$|\Upsilon_N| = |v_1(\varphi) - v_1(l_N)| \leq \delta_N = \frac{c_1}{N^2}, \quad (7)$$

donde $c_1 = c + \frac{1}{6} M^2 h^3 \lambda_{\min}(W)$, y la constante c es introducida en el Teorema 2.2.

Con la ayuda de la funcional discretizada (6) y su estimado de error de aproximación (7), se presenta la siguiente condición suficiente y necesaria de estabilidad para sistemas de tipo retardado.

Teorema 3.1. El sistema (3) es exponencialmente estable, si y solo si,

$$\Lambda_{N^*} + \mathcal{W}_{N^*} - \delta_{N^*} \mathcal{I}_{N^*} > 0,$$

con $N^* = \left\lceil \sqrt{\frac{c_1}{\alpha_1}} \right\rceil$. Aquí, $\alpha_1 \in (0, \beta_1)$, β_1 es definido en el Lema 2.1 y \mathcal{I}_{N^*} es de la misma dimensión que $\Lambda_{N^*} + \mathcal{W}_{N^*}$ con el bloque superior izquierdo de dimensión $n \times n$ igual a $\delta_{N^*} I$ y todos los otros bloques igual a cero.

Prueba. Necesidad: Por el Teorema 2.2 y por la definición de matriz positiva definida sobre \mathcal{W}_{N^*} , se tiene que $\Lambda_{N^*} + \mathcal{W}_{N^*} > 0$ para cualquier $\varphi \in \mathcal{H}$, si el sistema es exponencialmente estable.

Ahora, suponga que existe un vector diferente de cero ξ tal que $\xi^T (\Lambda_{N^*} + \mathcal{W}_{N^*} - \delta_{N^*} \mathcal{I}_{N^*}) \xi \leq 0$. Construya una función $\varphi \in \mathcal{PC}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ tal que $\widehat{\varphi} = \xi$, y note que $\widehat{\varphi}^T \mathcal{I}_{N^*} \widehat{\varphi} = \|\varphi(0)\|^2$. Por lo tanto,

$$\xi^T (\Lambda_{N^*} + \mathcal{W}_{N^*} - \delta_{N^*} \mathcal{I}_{N^*}) \xi = v_1(l_{N^*}) - \delta_{N^*} \|l_{N^*}(0)\|^2 \leq 0.$$

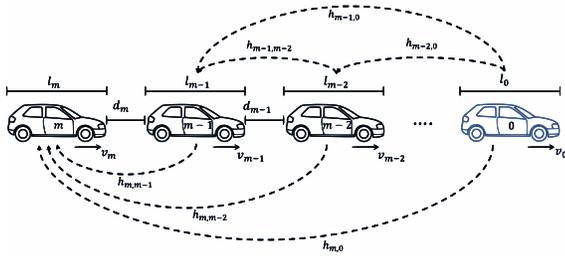


Fig. 1. Sistema de tráfico y estructura de red de comunicación V2V.

Si $\|l_{N^*}(0)\| > 0$, obtenemos

$$v_1(l_{N^*}) \leq \delta_{N^*} \|l_{N^*}(0)\|^2 \leq \alpha_1 \|l_{N^*}(0)\|^2 < \beta_1 \|l_{N^*}(0)\|^2,$$

lo cual contradice el Lema 2.1. Si $\|l_{N^*}(0)\| = 0$, entonces llegamos a que $v_1(l_{N^*}) = \xi^T (\Lambda_{N^*} + \mathcal{W}_{N^*}) \xi \leq 0$, una contradicción con $\Lambda_{N^*} + \mathcal{W}_{N^*} > 0$.

Suficiencia: Suponga que el sistema (3) es inestable, pero $\Lambda_{N^*} + \mathcal{W}_{N^*} - \delta_{N^*} \mathcal{I}_{N^*} > 0$. Por el Lema 2.2, existe una función $\varphi \in \mathcal{S}$ tal que $v_1(\varphi) \leq -a_1$. Por la elección de N^* , se tiene que $\delta_{N^*} \leq a_1$, y por lo tanto

$$\hat{\varphi}^T (\Lambda_{N^*} + \mathcal{W}_{N^*}) \hat{\varphi} = v_1(\varphi) - \Upsilon_{N^*} \leq -a_1 + a_1 = 0,$$

lo cual implica que $\Lambda_{N^*} + \mathcal{W}_{N^*} - \delta_{N^*} \mathcal{I}_{N^*} \leq 0$, siendo esto último una contradicción. \square

4. SISTEMAS DE TRÁFICO CON RETARDOS

A continuación se presenta el modelo matemático de la dinámica longitudinal de un sistema de tráfico con intercambio de información mediante comunicación inalámbrica Vehículo a Vehículo (V2V, ver diagrama de la Figura 1).

Los retardos en el tiempo surgen debido a las intermitencias y descarga de paquetes en los canales de comunicación, así como el procesamiento de datos. Se introducen los conceptos de Control de Crucero Conectado (CCC) (Juárez et al., 2018) y Control de Crucero Adaptativo Cooperativo Asistido (CACCS) (Sipahi et al., 2008; Juárez and Mondié, 2019), como estrategias de control aplicado a cada vehículo del sistema. Los controladores de crucero tiene como objetivo dotar a una flota de vehículos de la capacidad de alcanzar una velocidad referencia $v_0(t)$ establecida por un vehículo líder, manteniendo además, una distancia inter-vehicular deseada.

Con $i = \overline{1, m}$, la distancia entre el vehículo i e $i - 1$, conforme al marco de referencia representado en la Figura 2, está definida por $d_i(t) = s_{i-1}(t) - s_i(t) - l_i$, por lo que la dinámica del i -ésimo vehículo se expresa como

$$\begin{aligned} \dot{d}_i(t) &= v_{i-1}(t) - v_i(t) \\ \dot{v}_i(t) &= u_i(t) \end{aligned} \quad (8)$$

donde $s_i(t)$, $v_i(t)$ y $u_i(t)$ son la posición, velocidad y aceleración (acción de control), del i -ésimo vehículo, respectivamente. La clase de sistema en lazo cerrado depende del protocolo de control de tráfico empleado.

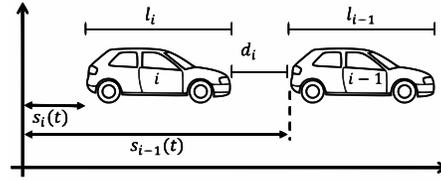


Fig. 2. Vehículos conectados sujetos a un marco de referencia absoluto.

4.1 Control de Crucero Conectado: retardos puntuales

El Control de Crucero Conectado es un problema de consenso, cuyo objetivo es mantener una velocidad dependiente del progreso del vehículo inmediatamente adelante.

De acuerdo al modelo (8), la aceleración del i -ésimo vehículo determinada por la estrategia CCC (Orosz, 2016) está definida por

$$\begin{aligned} u_i(t, h_{i,i-1}) &= \alpha_{i,i-1} (V(d_i(t - h_{i,i-1})) - v_i(t - h_{i,i-1})) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{i-1} \beta_{i,j} (v_j(t - h_{i,j}) - v_i(t - h_{i,j})). \end{aligned}$$

donde $\alpha_{i,i-1}$ es la ganancia de acoplamiento de la velocidad del vehículo i a una velocidad dependiente de la distancia inter-vehicular dada por la norma de avance $V(\cdot)$, y $\beta_{i,j}$ es la ganancia de acoplamiento de la velocidad del vehículo i a la velocidad de los vehículos precedentes, hasta alcanzar la velocidad del vehículo líder. La norma de avance $V(d)$ es una función continua y monótonicamente creciente Juárez et al. (2018), que relaciona la velocidad $v_i(t)$ con la distancia d_i . Definiendo los errores de seguimiento como

$$\tilde{d}_{i,i-1}(t) = d_{i,i-1}(t) - d^*, \quad \tilde{v}_i(t) = v_i(t) - v^*,$$

sus dinámicas son

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{d}}_{i,i-1}(t) &= \tilde{v}_{i-1}(t) - \tilde{v}_i(t) \\ \dot{\tilde{v}}_i(t) &= \alpha_{i,i-1} \left(V_i \left(\tilde{d}_{i,i-1}(t - h_{i,i-1}) + d^* \right) \right. \\ &\quad \left. - (\tilde{v}_i(t - h_{i,i-1}) + v^*) \right) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{i-1} \gamma_{i,j} \beta_{i,j} (\tilde{v}_j(t - h_{i,j}) - \tilde{v}_i(t - h_{i,j})). \end{aligned} \quad (9)$$

donde d^* , v^* son la distancia inter-vehicular y la velocidad deseada, respectivamente. Observe que si los $h_{i,j}$ son iguales, entonces el sistema (9) se reduce a un sistema de tipo retardado con un único retardo (3).

4.2 Control de Crucero Adaptativo Cooperativo Asistido: memoria del conductor a través de retardos distribuidos

El Control de Crucero Adaptativo Cooperativo Asistido (CACCS) (Sipahi et al., 2008; Juárez and Mondié, 2019) es una estrategia que tiene por objetivo ajustar las distancias inter-vehiculares a una referencia definida por

$$\hat{d}_i(t) = \delta_i + p_i v_i(t),$$

donde δ_i es la distancia de frenado, y p_i es el tiempo de avance. Definiendo el error de seguimiento $e(t) = d_i(t) - \hat{d}_i(t)$, el sistema (8) se transforma en

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) &= \dot{d}_i(t) - \dot{\hat{d}}_i(t) = v_{i-1} - v_i(t) - p_i u_i(t) \\ \dot{v}_i(t) &= u_i(t). \end{aligned} \quad (10)$$

En Juárez and Mondié (2019) se propone la siguiente estrategia de control que considera la memoria del conductor compuesta por una acción de control local y una acción de control de red,

$$u_i(t) = u_{li}(t) + u_{wi}(t) \quad (11)$$

donde

$$\begin{aligned} u_{li}(t) &= \frac{1}{p_i} (v_{i-1}(t) - v_i(t)) + \frac{k_i}{p_i} \int_0^\infty f_i(\tau) e_i(t - \tau) d\tau \\ u_{wi}(t) &= \frac{1}{h_i} \sum_{j=1}^m k_{ij} e_j(t - h_{ij}(t)). \end{aligned}$$

El lazo cerrado del sistema (10) con la ley de control (11) es

$$\dot{e}_i(t) = -k_i \int_0^\infty f_i(\tau) e_i(t - \tau) d\tau - \sum_{j=1}^m k_{ij} e_j(t - h_{ij}(t))$$

donde $i = 1, 2, \dots, m$ y k_{ij} representan los pesos de los enlaces de comunicación vehicular. Las ganancias k_i representan la medición de la agresividad del conductor por unidad de masa del vehículo (Sipahi et al., 2008).

La distribución uniforme $f_i(\tau)$ que modela la memoria a corto plazo de los conductores está descrita por

$$f_i(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\xi_i}, & h_i \leq \tau \leq h_i + \xi_i \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

donde h_i representa el lapso de tiempo después del cual la memoria del conductor con tamaño ξ_i se vuelve efectiva, y $\tau = h_i + \frac{\xi}{2}$ es el promedio de la ventana de memoria.

Considerando iguales parámetros de decisión del conductor, esto es, $\xi_i = \xi$, $h_i = h$, y, definiendo el vector de errores $e(t) = [e_1(t), e_2(t), \dots, e_m(t)]^T$, la dinámica de una flotilla de vehículos considerando los efectos de la memoria del conductor está representado por

$$\dot{e}_i(t) = \sum_{j=1}^m \sum_{q=1}^n A_{ij} e_j(t - h_{ij}(t)) + \int_{-\xi}^0 G e(t + \theta - h), \quad (12)$$

donde $G = -\text{diag}\left(\frac{k_1}{\xi}, \frac{k_2}{\xi}, \dots, \frac{k_m}{\xi}\right)$, y $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es

$$[A_{ij}]_{pq} = \begin{cases} -k_{ij} & \text{si } (p, q) = (i, j) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

5. EJEMPLOS: SISTEMAS DE TRÁFICO

En esta sección se presenta la sintonización de los parámetros del controlador de cruce de un sistema de tráfico con retardos constituido por 3 vehículos. Para lograr este objetivo, se realiza el análisis de estabilidad empleando el Teorema 3.1 para sistemas con retardos

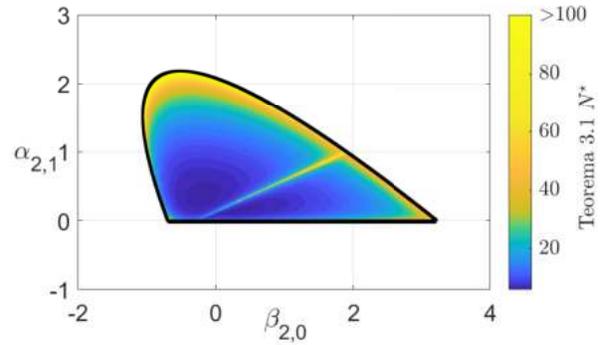


Fig. 3. Ejemplo 1: Valores de N^* requeridos en el Teorema 3.1 con respecto a $(\beta_{2,0}, \alpha_{2,1})$.

puntuales y el Teorema 2.1 para sistemas con retardos distribuidos. Para cada ejemplo, se presenta el mapa de estabilidad en el espacio de parámetros (ganancias del controlador), incluyendo las fronteras de estabilidad/inestabilidad (análisis de \mathcal{D} -Particiones).

Ejemplo 1. Considere el sistema (9) constituido por tres vehículos, descrito por (3) con

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_{1,0}\pi}{2} & \kappa_{1,0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{2,1} & \frac{\alpha_{2,1}\pi}{2} & -(\alpha_{2,1} + \beta_{2,0} + \beta_{2,1}) \end{bmatrix},$$

donde $\kappa_{1,0} = -(\alpha_{1,0} + \beta_{1,0})$, $h = 0.4$, $\alpha_{1,0} = 0.6$ y $\beta_{1,0} = \beta_{2,1} = 0.7$ Juárez et al. (2018). Los parámetros de referencia son $d^* = 20[m]$, y $v^* = 15[m/s]$.

En la Figura 3 se muestran (línea continua) las fronteras de estabilidad e inestabilidad para el sistema (3). La zona sombreada representa los puntos donde la condición de estabilidad del Teorema 3.1 se verifica. La barra de colores lateral indica el orden de aproximación requerido para poder validar la condición suficiente y necesaria.

Ejemplo 2. Considere el siguiente sistema de tráfico que modela las decisiones y memoria del conductor

$$\dot{x}(t) = A_1 x(t-h) + G_1 \int_{-2h}^{-h} x(t+\theta) d\theta + G_2 \int_{-3h}^{-2h} x(t+\theta) d\theta \quad (13)$$

donde $x(t) = [e_1(t), e_2(t)]^T$, con

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2.5 \\ -2.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad G_1 = \begin{bmatrix} -\frac{k_1}{h} & 0 \\ 0 & -\frac{k_2}{2h} \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_2}{2h} \end{bmatrix}.$$

En la Figura 4 se muestra en mapa de estabilidad en el espacio de parámetros (k_1, k_2) obtenido mediante el Teorema 2.1. La construcción de la matriz fundamental $K(t)$ del sistema se obtuvo mediante el método paso a paso y el cálculo de la matriz $U(\tau)$ se obtuvo mediante el método semianalítico descrito en Aliseyko (2019) y el algoritmo desarrollado en Cuvas-Castillo et al. (2019).

Los ejemplos presentados evidencian la importancia de las condiciones de estabilidad para sistemas con retardos

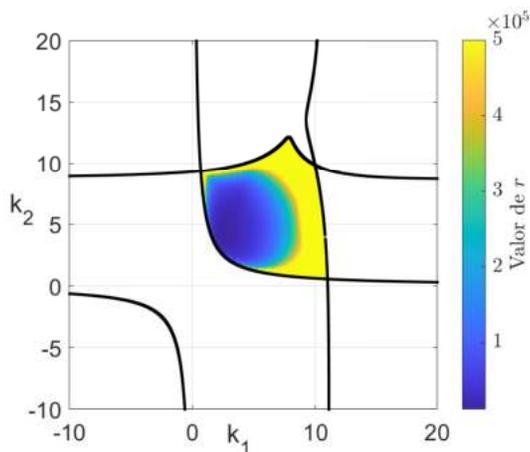


Fig. 4. Ejemplo 2: Valores de r requeridos en el Teorema 2.1 con respecto a (k_1, k_2) .

que modelan el comportamiento de flotillas de vehículos con control de cruceo conectado. Estos criterios permiten determinar las zonas de estabilidad en el espacio de las ganancias de los controladores, y con ello su implementación exitosa. Por tanto se garantiza la estabilidad de la planta.

6. CONCLUSIONES

En esta contribución se determina la zona de sintonización estabilizantes de los parámetros de dos estrategias de control de cruceo de flotas de vehículos. Se validan condiciones necesarias y suficientes de estabilidad existentes y se presenta un nuevo criterio verificable en un número finito de operaciones para el caso de retardos puntuales. Dos ejemplos permiten verificar la validez de los métodos propuestos.

REFERENCES

Alexandrova, I.V. (2023). A finite Lyapunov matrix-based stability criterion for linear delay systems via piecewise linear approximation. *Submitted to Systems & Control Letters*.

Aliseyko, A.N. (2019). Lyapunov matrices for a class of time-delay systems with piecewise-constant kernel. *International Journal of Control*, 92(6), 1298–1305.

Castaño, A., Cuvas, C., Egorov, A., and Mondié, S. (2023). Finite necessary and sufficient stability conditions for linear system with pointwise and distributed delays. *Submitted to TAC 2023*.

Chu, L., Li, H., Xu, Y., Zhao, D., and Sun, C. (2023). Research on longitudinal control algorithm of adaptive cruise control system for pure electric vehicles. *World Electric Vehicle Journal*, 14(2), 32.

Cuvas-Castillo, C., Castaño-Hernández, A., and Ordaz-Oliver, J.P. (2019). An efficient algorithm for the construction of a block matrix depending on the delay lyapunov matrix for testing stability of time-delay systems. In *2019 16th International Conference on Elec-*

trical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE), 1–5. IEEE.

Egorov, A. (2020). An improved lyapunov stability test for linear time-delay systems. In *2020 59th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 2489–2494. IEEE.

Ersal, T., Kolmanovsky, I., Masoud, N., Ozay, N., Scruggs, J., Vasudevan, R., and Orosz, G. (2020). Connected and automated road vehicles: state of the art and future challenges. *Vehicle system dynamics*, 58(5), 672–704.

Juárez, L. and Mondié, S. (2019). Assisted cooperative adaptive cruise control with human memory effects. In *2019 6th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT)*, 1167–1172. IEEE.

Juárez, L., Mondié, S., and Cuvas, C. (2018). Connected cruise control of a car platoon: A time-domain stability analysis. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 232(6), 672–682.

Khan, A.R., Jamlos, M.F., Osman, N., Ishak, M.I., Dzaharudin, F., Yeow, Y.K., and Khairi, K.A. (2022). Dsrc technology in vehicle-to-vehicle (v2v) and vehicle-to-infrastructure (v2i) iot system for intelligent transportation system (its): a review. *Recent Trends in Mechatronics Towards Industry 4.0: Selected Articles from iM3F 2020, Malaysia*, 97–106.

Kharitonov, V.L. (2013). *Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices*. Birkhäuser, Basel, Switzerland.

Mondié, S., Egorov, A., and Gomez, M.A. (2022). Lyapunov stability tests for linear time-delay systems. *Annual Reviews in Control*.

Orosz, G. (2016). Connected cruise control: modelling, delay effects, and nonlinear behaviour. *Vehicle System Dynamics*, 54(8), 1147–1176.

Sepulcre, M. and Gozalvez, J. (2012). Experimental evaluation of cooperative active safety applications based on v2v communications. In *Proceedings of the ninth ACM international workshop on Vehicular inter-networking, systems, and applications*, 13–20. ACM.

Sipahi, R., Atay, F.M., and Niculescu, S.I. (2008). Stability of traffic flow behavior with distributed delays modeling the memory effects of the drivers. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 68(3), 738–759.

Suthaputchakun, C., Sun, Z., and Dianati, M. (2012). Applications of vehicular communications for reducing fuel consumption and co 2 emission: The state of the art and research challenges. *IEEE Communications Magazine*, 50(12), 108–115.

Vite, L., Juárez, L., Gomez, M.A., and Mondié, S. (2022). Dynamic predictor-based adaptive cruise control. *Journal of the Franklin Institute*, 359(12), 6123–6141.

Zhang, L., Sun, J., and Orosz, G. (2017). Hierarchical design of connected cruise control in the presence of information delays and uncertain vehicle dynamics. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 26(1), 139–150.