

# Estimation of Faults in Fractional Nonlinear Systems via Fractional Observers

Arturo Govea-Vargas\* Rafael Martínez-Guerra\*\*

\* *Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Av Instituto Politécnico Nacional 2508, México*

(*e-mail: arturo.govea@cinvestav.mx*)

\*\* (*e-mail: rguerra@ctrl.cinvestav.mx*)

---

**Abstract:** In this work three fractional observers are implemented in order to estimate faults of a fractional nonlinear system and a Bergman model which gives us a real application model, the faults considered are additive faults. In this work observer-based diagnosis is implemented and we compare the fractional observers with a criterion of a performance index function. Based on this performance index, the fractional observers are compared, and it is verified which one gives the best performance. We characterized three fractional observers, selecting the observer gains in order to give the best performance of each observer.

*Keywords:* Fractional Observers, Fault Diagnosis.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años, el cálculo fraccional ha atraído el interés de la comunidad de control en relación con aquellos fenómenos físicos que han sido modelados como dinámicas de orden fraccional. Por ejemplo, se construye un modelo de impedancia de orden fraccional para un manipulador de robot Yixiao Ding (2022). Los sistemas con retardo de tiempo también se analizan en Zhe Zhang (2022). Se propone un esquema de sincronización fraccional para sistemas de orden fraccional no lineal en Rafael Martínez-Guerra (2014). Los sistemas fraccionales lineales invariantes en el tiempo, los sistemas fraccionales no lineales y los sistemas caóticos de orden fraccional se pueden encontrar en Petras (2011).

En Yong Deng (2023) un observador fraccional por modos deslizantes es propuesto, para el diagnóstico de fallas en un circuito análogo. En (Fateme Pourdadashi Komachali, 2019) un observador fraccional proporcional integral es propuesto, para el diagnóstico de fallas en sistemas fraccionales singulares. En (Shulan Kong, 2018) observadores fraccionales tipo Luenberger son propuestos, para el diagnóstico de fallas en baterías de litio. Estos observadores representan el estado del arte del presente trabajo, el diagnóstico de fallas de este trabajo toma en cuenta tres observadores fraccionales, uno de orden reducido, otro por modos deslizantes y finalmente uno proporcional integral, los trabajos mencionados lo aplican a distintos sistemas, en este trabajo se seleccionó un sistema no lineal fraccional y un modelo Bergman. El diagnóstico fraccional se ha estudiado durante muchos años y ha sido un tema importante para la supervisión del sistema, el control

de rechazo activo de perturbaciones y control tolerante a fallas Feng Zhao (2005), aún ahora sigue siendo un tema de gran importancia. El diagnóstico basado en el observador es uno de los enfoques principales para el diagnóstico fraccional. En este trabajo se utilizan tres observadores fraccionales para estimar las fallas de un sistema no lineal fraccional y un modelo de Bergman, el desempeño de dichos observadores se compara con una función índice de desempeño, las fallas a estimar son fallas aditivas en el sistema.

Las principales contribuciones de este trabajo se resumen en la siguiente lista:

- Se implementan tres observadores fraccionales para estimar las fallas de un sistema fraccional no lineal y un modelo Bergman.
- Se aplica una función de índice de rendimiento a los tres observadores para comparar cuál da el mejor rendimiento.
- Se caracterizan e implementan tres observadores fraccionales, seleccionamos las ganancias de dichos observadores y determinamos el mejor resultado de cada uno.
- Se realizan simulaciones numéricas para la estimación de fallas en un sistema no lineal fraccional.

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera, en la sección 2 se dan algunos preliminares sobre el cálculo fraccional, en la sección 3 presentamos los observadores fraccionales, en la sección 4 se dan algunas simulaciones numéricas sobre un sistema no lineal fraccional y un modelo de Bergman, finalmente en la sección 5 se dan las conclusiones de este trabajo.

## 2. CÁLCULO FRACCIONAL

### 2.1 Derivada Fraccional de Caputo

La derivada fraccional de Caputo de orden  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  de una función  $x$  se define como:

$$x(t)^{(\alpha)} = {}_{t_0}\mathcal{D}_t^{(\alpha)} x(t) = \frac{1}{\Gamma(n+\alpha)} \int_0^t \frac{d^n x(\tau)}{d\tau^n} (t-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau$$

donde  $n-1 \leq \alpha < n$ ,  $\frac{d^n x(\tau)}{d\tau^n}$  es la  $n$ -ésima derivada de  $x$  en el sentido usual,  $n \in \mathbb{N}$  y  $\Gamma$  es la función gama definida como

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

que converge en la mitad derecha del plano complejo  $\Re(z) > 0$ .

### 2.2 Problema de Diagnóstico

Se introduce el problema de Diagnóstico Fraccional. Un Sistema No Lineal Fraccional con fallas se describe mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x^{(\alpha)} &= F(x, \bar{u}) \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m, f_1, f_2, \dots, f_\mu) \in \mathbb{R}^{m-\mu} \times \mathbb{R}^\mu$   $u$  es un vector de entrada conocido y  $f$  es un vector de falla desconocido,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$  es la medición de la salida.

**Definición 1.** (OAF Observabilidad Algebraica Fraccional) Una variable de estado  $x_i \in \mathbb{R}$  satisface la propiedad OAF, si es una función de las primeras  $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$  derivadas secuenciales fraccionales de la salida disponible  $y$  y el vector de entrada conocido  $u$ .

$$x_i = \phi_{x_i}(y, y^{(\alpha)}, \dots, y^{(r_1\alpha)}, u, u^{(\alpha)}, \dots, u^{(r_2\alpha)}).$$

**Definición 2.** (DAF Diagnóstico Algebraico Fraccional) Un Sistema No Lineal Fraccional descrito por la ecuación (1) es un sistema fraccional diagnosticable, si  $f_i$  cumple la definición 1 con respecto a  $y$ ,  $u$  y las  $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$  derivadas secuenciales, i.e.,  $f_i$  puede ser escrito como

$$f_i = \phi_{f_i}(y, y^{(\alpha)}, \dots, y^{(r_1\alpha)}, u, u^{(\alpha)}, \dots, u^{(r_2\alpha)}).$$

## 3. OBSERVADORES FRACCIONALES

### 3.1 Observador Fraccional de Orden Reducido

Considere el sistema (1), el vector de falla desconocido  $f$  puede interpretarse como un estado con dinámica fraccional incierta. Para estimar  $f$ , el vector de estado se extiende para tratar con el vector desconocido. El nuevo sistema extendido está dado por

$$\begin{aligned} x^{(\alpha)} &= F(x, \bar{u}) \\ f^{(\alpha)} &= \Omega(x, \bar{u}) \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

donde  $\Omega(\cdot)$  es una función incierta acotada.

**Lema 1.** Si las siguientes hipótesis son satisfechas:

- $H_1$ :  $\Omega_i(x, \bar{u})$  es acotada, i.e.  $\|\Omega_i(x, \bar{u})\| \leq M_i$ ,  $M_i \in \mathbb{R}^+$ ,  $0 < i \leq \mu$ .
- $H_2$ :  $f_i(t)$  satisface la condición DAF
- $H_3$ :  $K_{\hat{f}_i} \in \mathbb{R}^+$

entonces, el sistema

$$\hat{f}_i^{(\alpha)} = K_{\hat{f}_i} (f_i - \hat{f}_i) \quad 0 < i \leq \mu, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (2)$$

es un observador fraccional de orden reducido que alcanza el diagnóstico de la falla  $f_i$ , donde  $\hat{f}_i$  denota la falla estimada, y  $K_{\hat{f}_i}$  determina la tasa deseada de convergencia del observador fraccional.

**Corolario 1.** Si la señal de falla  $f_i$  con  $1 \leq i \leq \mu$  satisface la condición DAF, y la falla puede ser escrita como

$$f_i = \sigma_i y^{(\alpha)} + \psi_i(y, u)$$

con  $\sigma_i = (\sigma_{i1}, \dots, \sigma_{ip}) \in \mathbb{R}^p$  un vector constante,  $y(t)$  y  $\psi_i(y, u)$  funciones acotadas, entonces, el observador fraccional de orden reducido (2) puede ser escrito como sigue:

$$\begin{aligned} \gamma_{f_i}^{(\alpha)} &= -K_{\hat{f}_i} (\gamma_{f_i} - \psi_i(y, u)) - K_{\hat{f}_i}^2 \sigma_i y_i, \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ \hat{f}_i &= \gamma_{f_i} + K_{\hat{f}_i} \sigma_i y_i \end{aligned}$$

donde  $\gamma_{f_i}(0) = \gamma_{f_{i0}}$

Una prueba del Lema (1) y Corolario (1) puede ser consultada en Rafael Martínez-Guerra (2021) Capítulo 6.

### 3.2 Observador Fraccional de Modos Deslizantes

Si las hipótesis del Lema (1) son satisfechas entonces el sistema

$$\hat{f}_i^{(\alpha)} = \rho \text{sign}(f_i - \hat{f}_i) \quad 0 < i \leq \mu, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

es un observador de modos deslizantes para la falla  $f_i$ , con  $\rho > 0$ .

### 3.3 Observador Fraccional Proporcional Integral

Si las hipótesis del Lema (1) son satisfechas entonces el sistema

$$\begin{aligned} \hat{f}_i^{(\alpha)} &= K_i (f_i - \hat{f}_i) + \zeta_i \quad 0 < i \leq \mu, \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ \zeta_i^{(\alpha)} &= k_i (f_i - \hat{f}_i) \end{aligned}$$

es un observador fraccional proporcional integral para la falla  $f_i$ , con  $K_i, k_i > 0$  Lorenz Josue Oliva-Gonzalez (2023).

## 4. SIMULACIONES NUMÉRICAS

Considere el siguiente Sistema No Lineal Fraccional, el cual requiere un diagnóstico de fallas simultáneo Rafael Martínez-Guerra (2021), este sistema representa un ejemplo académico para el diagnóstico de fallas:

$$\begin{aligned}
 x_1^{(\alpha)} &= -x_1 + f_1 x_2^3 + f_2 x_2 x_3 + u(t) \\
 x_2^{(\alpha)} &= x_3 + f_1 \\
 x_3^{(\alpha)} &= -x_2^3 + f_2 \\
 y_1 &= x_2 \\
 y_2 &= x_3
 \end{aligned} \tag{3}$$

donde  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$  es el vector de estado,  $f = (f_1, f_2)^T$  es el vector de falla,  $y = (y_1, y_2)^T$  es el vector de salida y  $u(t)$  es una entrada conocida.

La condición DAF para las fallas  $f_1$  y  $f_2$  pueden obtenerse considerando las ecuaciones dinámicas de  $x_2$  y  $x_3$  del sistema (3), i.e, las señales desconocidas (o fallas) pueden ser escritas en términos de las salida y sus derivadas fraccionales.

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \phi_{f_1}(y, y^{(\alpha)}) = y_1^{(\alpha)} - y_2 \\
 f_2 &= \phi_{f_2}(y, y^{(\alpha)}) = y_2^{(\alpha)} + y_1^3
 \end{aligned}$$

Los observadores fraccionales de orden reducido para  $f_1$  y  $f_2$  son descritos como sigue:

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_1^{(\alpha)} &= K_{\hat{f}_1}(y_1^{(\alpha)} - y_2 - \hat{f}_1) \\
 \hat{f}_2^{(\alpha)} &= K_{\hat{f}_2}(y_2^{(\alpha)} + y_1^3 - \hat{f}_2)
 \end{aligned}$$

Se pueden definir las siguientes dos variables artificiales para evitar la necesidad de estimar cualquier derivada fraccional.

$$\begin{aligned}
 \gamma_{f_1} &\triangleq \hat{f}_1 - K_{\hat{f}_1} y_1 \\
 \gamma_{f_2} &\triangleq \hat{f}_2 - K_{\hat{f}_2} y_2
 \end{aligned} \tag{4}$$

Finalmente, tomando la derivada fraccional de(4), los observadores fraccionales de orden reducido pueden ser escritos como:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{f_1}^{(\alpha)} &= -K_{\hat{f}_1}(\gamma_{f_1} + y_2) - K_{\hat{f}_1}^2 y_1, \quad \gamma_{f_1}(0) = \gamma_{f_10} \\
 \hat{f}_1 &= \gamma_{f_1} + K_{\hat{f}_1} y_1 \\
 \gamma_{f_2}^{(\alpha)} &= -K_{\hat{f}_2}(\gamma_{f_2} - y_1^3) - K_{\hat{f}_2}^2 y_2, \quad \gamma_{f_2}(0) = \gamma_{f_20} \\
 \hat{f}_2 &= \gamma_{f_2} + K_{\hat{f}_2} y_2
 \end{aligned}$$

Los observadores fraccionales por modos deslizantes para  $f_1$  y  $f_2$  son descritos como sigue:

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_1^{(\alpha)} &= \rho_1 \text{sign}(f_1 - \hat{f}_1) \\
 \hat{f}_2^{(\alpha)} &= \rho_2 \text{sign}(f_2 - \hat{f}_2)
 \end{aligned}$$

Los observadores fraccionales proporcionales integrales para  $f_1$  y  $f_2$  son descritos como sigue:

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_1^{(\alpha)} &= k_1(f_1 - \hat{f}_1) - \zeta_1 \\
 \zeta_1^{(\alpha)} &= k_2(f_1 - \hat{f}_1) \\
 \hat{f}_2^{(\alpha)} &= k_3(f_2 - \hat{f}_2) - \zeta_2 \\
 \zeta_2^{(\alpha)} &= k_4(f_2 - \hat{f}_2)
 \end{aligned}$$

La simulación numérica para el sistema(3) se lleva a cabo considerando la dinámica de las fallas  $f_1$  y  $f_2$ , descritas por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= 1 + 5 \sin(x_1) e^{-10t} \\
 f_2 &= 5e^{-5(t-0.3)} \mathcal{U}(t-0.3) + e^{-5(t-1)} \mathcal{U}(t-1)
 \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{U}(t)$  es la función escalón unitario.

Las siguientes simulaciones numéricas fueron realizadas en Matlab Simulink y utilizando la herramienta FOM-CON. Los resultados de la simulación se obtienen considerando las condiciones iniciales  $\gamma_{10} = \gamma_{20} = 0$  y los parámetros  $K_{\hat{f}_1} = K_{\hat{f}_2} = 40, \alpha = 0.935$  y  $u(t) = 5\mathcal{U}(t)$ . Los resultados se muestran en las Figuras 1,2. Se puede notar que las fallas estimadas siguen su valor verdadero correspondiente, aunque en la figura 2 la falla tiene dos picos, lo que corresponde a la falla misma, en estos picos el observador se comporta mal debido a la naturaleza de la falla, que tiene dos picos abruptos. Este observador de orden reducido tiene un gran error de falla al principio, debido a las condiciones iniciales.

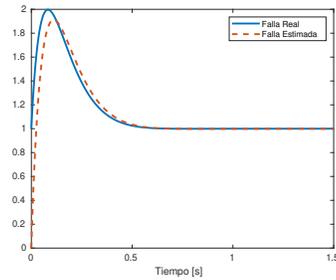


Fig. 1. Observador Fraccional de Orden Reducido Falla 1.

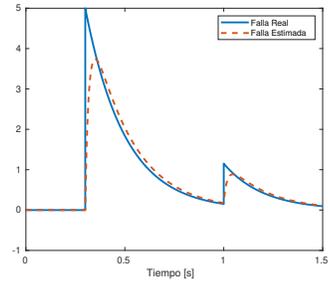


Fig. 2. Observador Fraccional de Orden Reducido Falla 2.

Los resultados de la simulación para los segundos observadores de modos deslizantes fraccionales se obtienen considerando los parámetros  $\rho_1 = \rho_2 = 350$ , este valor de ganancia fue probado con distintos valores y se fijó en 350, debido a que este valor arroja resultados aceptables. Los resultados se muestran en Figuras 3 y 4. Se puede notar que las fallas estimadas siguen su valor verdadero correspondiente de una manera muy precisa, con este observador se estiman mejor los picos de la falla 2 que con el observador de orden reducido, aunque estos picos se estiman mejor, no son perfectos, los dos picos de la falla corresponden a una función no suave, que es difícil de seguir.

Los resultados de la simulación para los observadores integrales proporcionales fraccionales se obtienen considerando los parámetros  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 50$ , estos valores para las ganancias fueron probados con distintos

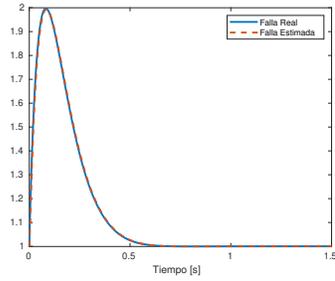


Fig. 3. Observador Fraccional por Modos Deslizantes Falla 1.

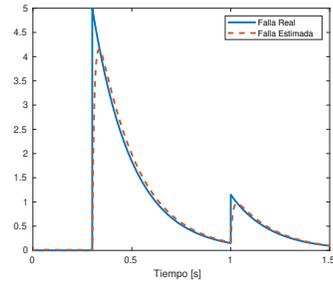


Fig. 6. Observador Fraccional Proporcional Integral Falla 2.

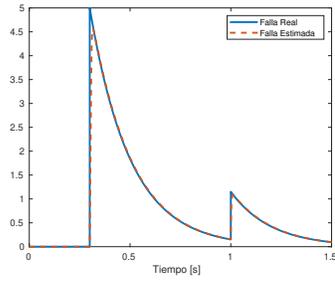


Fig. 4. Observador Fraccional por Modos Deslizantes Falla 2.

valores, se fijó en 40, porque con este valor se obtienen resultados aceptables. Los resultados se muestran en Figuras 5 y 6. Se puede notar que las fallas estimadas siguen su correspondiente valor verdadero, aunque en la Figura 6 podemos notar que la falla estimada no sigue perfectamente a la falla real, esto se debe a que la falla 2 no es una función suave.

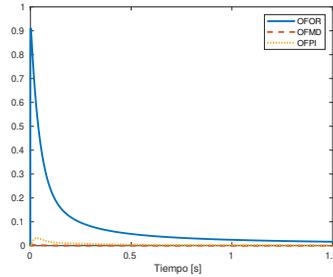


Fig. 7. Función de Costo Falla 1.

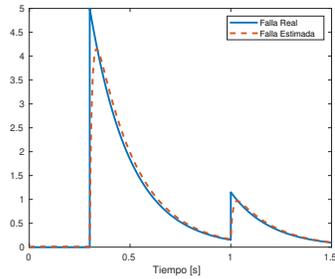


Fig. 5. Observador Fraccional Proporcional Integral Falla 1.

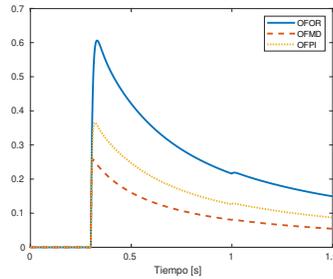


Fig. 8. Función de Costo Falla 2.

Suma de la función de costo			
Función de Costo	Valor	ISE	ITSE
$J_1$ de OFOR	1137.3	245.9393	7.2623
$J_1$ de OFMD	4.7861	1.1368	0.0569
$J_1$ de OFPI	80.2740	23.9891	2.5924
$J_2$ de OFOR	3391.2	2252.9	776.5110
$J_2$ de OFMD	1290.7	828.1255	258.9542
$J_2$ de OFPI	1993.6	1320.3	450.0149

Table 1. Función de Costo

Se aplicó el siguiente índice de rendimiento a los observadores fraccionales:

$$J_t = \frac{1}{t + \epsilon} \int_0^t \|\tilde{f}\|^2 dt$$

donde  $\epsilon = 0.0001$  y  $\tilde{f} = f - \hat{f}$ . Y también las funciones de costo convencionales ISE e ITSE.

$$ISE = \int_0^t \tilde{f}^2 dt \quad ITSE = \int_0^t t \tilde{f}^2 dt$$

Se seleccionaron las ganancias para el observador de orden reducido de acuerdo a las Tablas 2 y 3, como se puede observar la ganancia  $K_{f_1} = K_{f_2} = 40$  da los mejores resultados para las funciones de costo propuestas. Un análisis parecido se realizó para el observador fraccional por modos deslizantes y el observador fraccional proporcional integral.

El modelo mínimo generalizado de Bergman para glucosa-insulina es un modelo que se aproxima a la respuesta

Ganancias OFOR			
$K_{\hat{f}_1} = K_{\hat{f}_2}$	$J_1$	ISE	ITSE
30	928040	2084500	2127600
40	1137.3	245.9393	7.2623
50	925900	2082500	2127200

Table 2. Ganancias vs Función de Costo OFOR falla 1

Ganancias OFOR			
$K_{\hat{f}_1} = K_{\hat{f}_2}$	$J_2$	ISE	ITSE
30	218290	818160	990580
40	3391.2	245.9393	7.2623
50	205220	809390	989670

Table 3. Ganancias vs Función de Costo OFOR falla 2

dinámica de la concentración de glucosa en sangre de un paciente diabético a la inyección de insulina. Consideremos el modelo de Orden Fraccional que monitorea la dinámica temporal de la concentración de glucosa en sangre Rafael Martínez-Guerra (2021) y N'Doye (2012):

$$\begin{aligned}
 x_1^{(\alpha)} &= -p_1(x_1 - G_b) - x_1x_2 + f(t) \\
 x_2^{(\alpha)} &= -p_2x_2 + p_3(x_3 - I_b) \quad 0 < \alpha \leq 1 \\
 x_3^{(\alpha)} &= -n(x_3 - I_b) + u \\
 y &= x_1
 \end{aligned} \quad (5)$$

donde  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  son la concentración de glucosa en plasma sanguíneo (mg/dl), la concentración de glucosa en sangre se considera como la salida  $y$ .  $G_b$  representa el nivel basal de glucosa previo a la inyección,  $I_b$  es el nivel basal de insulina antes de la inyección y  $u$  actúa como la variable de control. La regulación normal de insulina no existe en pacientes diabéticos, esta absorción de glucosa es considerada como una falla  $f(t)$  para el sistema 5. La falla puede ser modelada por  $A \sin(\omega t)$ , representando ritmos circadianos (ciclos endocrinos) con periodo de 8 h y amplitud alrededor de 10 mg/dl.

$$f(t) = A|\sin(\omega t)|$$

con  $A = 10 \text{ mg/dl}$ ,  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  y  $T = 8 \text{ hr}$ .

Para este ejemplo, el componente de falla está dado por

$$f = \phi(y, y^{(\alpha)}, x_2) = y^{(\alpha)} + p_1(y - G_b) + yx_2 \quad (6)$$

Se puede notar que  $f$  no cumple con la definición de DAF debido a la dependencia de  $x_2$ , para resolver este problema podemos definir las variables de estado  $x_2 = \beta$  y  $x_3 = \xi$  y describir el sistema 5 como

$$\begin{aligned}
 x_1^{(\alpha)} &= -p_1(x_1 - G_b) - \beta x_1 + f(t) \quad 0 < \alpha \leq 1 \\
 y &= x_1
 \end{aligned}$$

donde,  $\beta$  y  $\xi$  tienen las dinámicas descritas por

$$\begin{aligned}
 \beta^{(\alpha)} &= -p_3(\xi - I_b) - p_2\beta \\
 \xi^{(\alpha)} &= nI_b + u - n\xi
 \end{aligned}$$

Con 6 y las soluciones de  $\beta$  and  $\xi$ , se obtiene la siguiente ecuación fraccional

$$\hat{f}^{(\alpha)} = K_{\hat{f}}(y^{(\alpha)} + p_1(x_1 - G_b) + y\beta - \hat{f})$$

Se usa el Corolario 1 y seleccionando la variable  $\gamma_f \triangleq \hat{f} - K_{\hat{f}}y$  el observador fraccional de orden reducido para  $f$  en el sistema 5 es definido como

$$\begin{aligned}
 \gamma_f^{(\alpha)} &= -K_{\hat{f}}(\gamma_f - p_1(x_1 - G_b) - y\beta) - K_{\hat{f}}^2\gamma_f \\
 \hat{f} &= \gamma_f + K_{\hat{f}}y
 \end{aligned}$$

Las siguientes simulaciones numéricas fueron realizadas en Matlab Simulink y utilizando la herramienta FOM-CON. Los resultados numéricos se obtienen con constantes conocidas  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = 0.02$ ,  $p_3 = 5.3 \times 10^{-6}$ ,  $n = 0.3$ ,  $G_b = 70$ ,  $I_b = 7$  y las condiciones iniciales  $x_{10} = 220$ ,  $x_{20} = 0$  y  $x_{30} = 50$ . La ganancia fraccional del observador  $K_{\hat{f}}$  y la condición inicial son escogidas como  $K_{\hat{f}} = 10$ ,  $\gamma_{f0} = -2200$ . La simulación se realizó durante 30 h y un orden fraccional de  $\alpha = 0.935$  las Figuras 9,10 y 11 muestran cómo se logra el diagnóstico de la falla. En la Figura 9 que corresponde al observador de orden reducido fraccional, podemos notar que existe un pequeño error entre la falla estimada y la falla real.

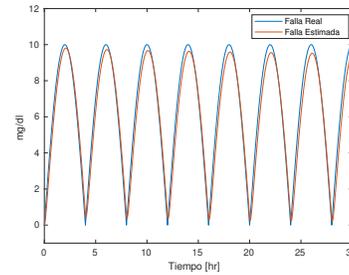


Fig. 9. Observador Fraccional de Orden Reducido del Modelo Bergman

Los resultados de la simulación para los observadores de modos deslizantes fraccionales se obtienen considerando el parámetro  $\rho = 100$ . Los resultados se muestran en la Figura 10. La ganancia del observador  $\rho$  se selecciona para lograr el mejor rendimiento, podemos notar que la falla estimada y la falla real tienen un error muy pequeño entre ellas.

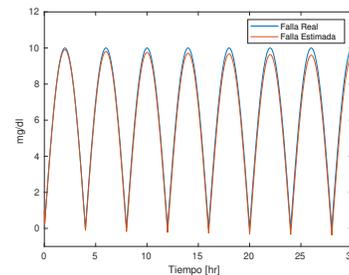


Fig. 10. Observador Fraccional por Modos Deslizantes del Modelo Bergman.

Los resultados de la simulación para los observadores integrales proporcionales fraccionales se obtienen considerando los parámetros  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 100$ . Los

resultados se muestran en la Figura 11. Las ganancias del observador  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4$  se seleccionan para lograr el mejor rendimiento, estas ganancias no pueden ser tan grandes como queremos, hay un límite en el que estas ganancias no da un mejor resultado, seleccionamos este valor en 100, que da el mejor resultado.

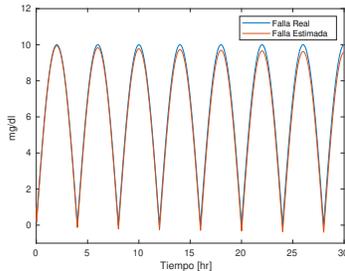


Fig. 11. Observador Fraccional Proporcional Integral del Modelo Bergman.

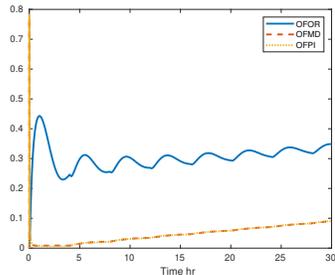


Fig. 12. Función de Costo de los Observadores Fraccionales del Modelo Bergman.

Suma de la función de costo			
Función de Costo	Valor	ISE	ITSE
J de OFOR	94574	104610	1740500
J de OFMD	8685.3	13645	248000
J de OFPI	8757.6	13789	251600

Table 4. Función de Costo Modelo Bergman

Desempeño de los Observadores		
Observador	Ventajas	Desventajas
OFOR	No es necesario calcular derivadas fraccionales	Necesidad de calcular la función gamma adicional
OFMD	Excelente desempeño del observador	Se utiliza una función discontinua
OFPI	Buen desempeño del observador	Necesidad de calcular el término integral

Table 5. Ventajas y Desventajas

## 5. CONCLUSIONES

A partir de las simulaciones numéricas y el índice de rendimiento resumido en la Tabla 1, se puede notar que el mejor rendimiento se logra con el observador de modos deslizantes fraccionales. Los tres observadores fraccionales implementados estiman las fallas del sistema

fraccional no lineal, aunque el observador fraccional de modos deslizantes da un mejor resultado, lo cual se puede corroborar en las Figuras 7 y 8, y en la Tabla 1. Para el modelo de Bergman se puede notar en la Figura 12 y la Tabla 4 que el observador fraccional por modos deslizantes da un mejor desempeño que los demás. En este trabajo se realizó un estudio de comparación, se implementaron los observadores en un Sistema No Lineal Fraccional y un modelo de Bergman para validar los observadores, se compararon tres observadores fraccionales y verificamos cuál tiene mejor desempeño. Como trabajo futuro se propone utilizar otros observadores fraccionales, tales como el tipo Luenberger y Alta Ganancia.

## REFERENCES

- Fateme Pourdadashi Komachali, Masoud Shafiee, M.D. (2019). Design of unknown input fractional order proportional-integral observer for fractional order singular systems with application to actuator fault diagnosis. *IET Control Theory and Applications*.
- Feng Zhao, X., K.H.R.H.J.C.P. (2005). Monitoring and fault diagnosis of hybrid systems. *IEEE Trans. Syst. Cybern.* 35.
- Lorenz Josue Oliva-Gonzalez, Rafael Martínez-Guerra, J.P.F.F. (2023). A fractional pi observer for incommensurate fractional order systems under parametric uncertainties. *ISA Transactions*.
- N'Doye, I., V.H.D.M.S.J.K.N. (2012). An unknown input fractional-order observer design for fractional-order glucose-insulin system. *Conference on Biomedical Engineering and Sciences, Langkawi*.
- Petras, I. (2011). *Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation*. Springer Berlin.
- Rafael Martínez-Guerra, Fidel Meléndez-Vázquez, I.T.Z. (2021). *Control and Diagnosis for Integer and Fractional-order Systems. Fundamentals of Fractional Calculus and Differential Algebra with Real-Time Applications*. Studies in Systems, Decision and Control.
- Rafael Martínez-Guerra, J.L.M.M. (2014). Fractional generalized synchronization in a class of nonlinear fractional order systems. *Nonlinear Dyn.*
- Shulan Kong, Mehrdad Saif, G.C. (2018). Estimation and fault diagnosis of lithium-ion batteries: A fractional-order system approach. *Mathematical Problems in Engineering*.
- Yixiao Ding, Y.L. (2022). Dynamic feedforward based fractional order impedance control for robot manipulator. *International Conference on Mechanical and Electronics Engineering (ICMEE)*.
- Yong Deng, Xian Zeng, D.Z.T.C. (2023). Analog circuit fault diagnosis based on the fractional sliding model observer. *Circuits, Systems, and Signal Processing*.
- Zhe Zhang, Yaonan Wang, J.Z.X.X. (2022). Dynamic analysis for a novel fractional-order malware propagation model system with time delay. *China Automation Congress (CAC)*.