

Leader-Follower Formation of Unicycle Mobile Robots Using Quasi-Sliding Modes ^{*}

Yoshua Díaz ^{*} Jorge Dávila ^{**}

^{*} Instituto Politécnico Nacional (IPN), Estudiante de Doctorado en Comunicaciones y Electrónica, ESIME - CULHUACAN, Ciudad de México, México (yoshua2p@hotmail.com).

^{**} Instituto Politécnico Nacional (IPN), Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, ESIME - UPT, Ciudad de México, México (jadavila@ipn.mx).

Resumen. This article presents a distributed control of unicycle mobile robots for the leader-follower configuration while maintaining a specific geometric distribution in the horizontal plane. The proposed control algorithm facilitates the formation of the follower robots with respect to the leader by using a quasi-sliding mode. The technique uses a pair of sliding variables, and the proposed controller guarantees the convergence of the sliding variables to a region close to zero. The particular formulation of these sliding variables ensures that their convergence to a bounded region around zero, provides asymptotic convergence of the formation errors towards a bounded region around the origin.

Keywords: Mobile robots, Sliding mode control, Decentralized and distributed control, Autonomous vehicles, Cooperative control.

1. INTRODUCCION

En las últimas décadas, los Sistemas Multiagentes (SMA) se han aplicado en diferentes áreas científicas, militares y civiles. Se han utilizado en una amplia variedad de dispositivos para algunas tareas colaborativas, por ejemplo, Robots Móviles Uniciclos (RMU) para transporte de carga y exploración, Vehículos Aéreos No Tripulados (UAV, por sus siglas en inglés) para localización y reconocimiento, embarcaciones para búsqueda y rescate, e incluso en peces robot para imitar la respuesta de los peces ante los depredadores. El diseño de un control de formación es de gran importancia en el control de sistemas multiagente debido a que permite la coordinación de grupos. Se alienta a los lectores interesados a consultar material relacionado con este problema en Oh et al. (2015), Shi and Yan (2021), Kamel et al. (2020) y las referencias incluidas en estos.

Las técnicas de control por Modos Deslizantes (MD) se aplican comúnmente a sistemas que requieren robustez y convergencia en tiempo finito, sin embargo, han sido aplicadas exitosamente a la solución del problema de formación. González-Sierra et al. (2019) presentan un controlador de formación y evasión de colisiones, en el que se utiliza una estrategia basada en observadores por MD para estimar las velocidades lineales y angulares de un grupo de cuadricópteros afectados por perturbaciones. Damien (2009) diseña un control anidado suave utilizando MD para lograr una formación de UAVs. González-Sierra et al. (2017) y González-Sierra et al. (2020) implementan un control de formación para cuadricópteros cuyo grafo de comunicación contiene un esquema de árbol de expansión dirigido.

Por otro lado, se han aplicado una amplia variedad de controladores para resolver el problema de formación en RMU.

Maghenem et al. (2019) abordan un control de formación a través del control de consenso descentralizado utilizando un controlador suave variable en el tiempo. La técnica propuesta pertenece a la clase de excitación δ -persistente, proporcionando estabilidad global asintótica uniforme. Aunque este enfoque aplica un algoritmo de formación completo, requiere el uso de un centroide como referencia. Zoghliami et al. (2014) presentan la solución al problema de formación, pero no se estudia el seguimiento de trayectorias posteriores a la convergencia por parte de los seguidores. Además, se necesita un grafo con forma de árbol de expansión, cuya desventaja es que el sistema no puede segregarse fácilmente en dominios más pequeños para proporcionar una mejor escalabilidad. Meng et al. (2015) resuelven el problema de formación para un grupo de RMU utilizando un enfoque de aprendizaje iterativo bajo topologías cambiantes.

En relación con el diseño de algoritmos de formación con SMA, Defoort et al. (2016) diseñan un control no lineal basado en MD para resolver el consenso en tiempo fijo de múltiples agentes. Debido a que el diseño del algoritmo se realiza en una forma en cadena, requiere cálculos adicionales relacionados con los parámetros que deben implementarse en el control, sin mencionar la interdependencia existente entre estos, por lo que requiere una cuidadosa selección de los mismos. Bhowmick and Panja (2019) resuelven el problema de consenso bipartito utilizando una ley de control distribuida basada en observadores por retroalimentación de salida. Este control proporciona una solución asintótica al problema de consenso bipartito, pero es necesario refinar algunos parámetros críticos. Los trabajos mencionados poseen la desventaja de ser algoritmos discontinuos, que podrían presentar el destructivo efecto de chattering cuando son aplicados.

En este artículo, se propone un control distribuido que se diseña utilizando un cuasi-modo deslizante, proporcionando

^{*} Este trabajo recibió apoyo de SEP-CONACYT-ANUIES-ECOS Francia número 315597/M20M04, de la SIP-IPN número 20230223, y del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) con el CVU 1034576.

una señal de control continua. Las principales características del control propuesto son:

- A diferencia de Mera et al. (2020) y Díaz et al. (2023), el control propuesto proporciona una señal de control continua que garantiza la convergencia de las variables deslizantes a una región acotada alrededor del origen.
- La particular selección de las variables de deslizamiento garantiza la convergencia de los errores de formación a una región acotada.
- La precisión obtenida con el algoritmo propuesto es proporcionada en el artículo.

En consecuencia, el algoritmo propuesto proporciona convergencia asintótica a la formación deseada mientras se realiza una maniobra de seguimiento de líder para vehículos unicitos.

2. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considere un SMA compuesto por $n + 1$ RMU, n seguidores y un líder, con la configuración mostrada en la Figura 1. La cinemática del i -ésimo robot unicitio es:

$$\dot{x}_i = v_i \cos(\theta_i), \quad \dot{y}_i = v_i \sin(\theta_i), \quad \dot{\theta}_i = \omega_i \quad (1)$$

donde $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ son la posición, $\theta_i \in \mathbb{R}$ es la orientación en el marco de referencia inercial. $v_i \in \mathbb{R}$ y $\omega_i \in \mathbb{R}$ son las velocidades lineal y angular, respectivamente, para el seguidor $i = 1, \dots, n$ y el líder L . Se considera en este trabajo que todos los agentes poseen la misma cinemática.

La interacción entre los seguidores es modelada por el grafo de comunicación no dirigido $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, donde $\mathcal{V} = 1, \dots, n + 1$ es el conjunto de vértices y $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ es el conjunto de aristas. Si un par de vértices $(i, j) \in \mathcal{E}$, entonces el par $(j, i) \in \mathcal{E}$. No se permiten aristas propias, i.e., $(i, i) \notin \mathcal{E}$. La vecindad del vértice i es el conjunto $\mathcal{N}_i = \{j \in \mathcal{V} | (i, j) \in \mathcal{E}\}$.

Se considera que los seguidores comparten sus velocidades lineales y angulares con su vecindad, i.e., el i -ésimo agente tiene acceso a v_j y ω_j si $(i, j) \in \mathcal{E}$.

Suposición 1. La velocidad lineal v_L y la velocidad angular del líder ω_L se asumen acotadas:

$$0 < v_{\min} \leq v_L \leq v_{\max} \quad (2)$$

$$|\omega_L| \leq \omega_{\max}$$

La matriz de adyacencia \mathcal{A} asociada al grafo \mathcal{G} es una matriz simétrica de dimensión $n \times n$ cuyas entradas se definen como $a_{ij} = 1$ si $(i, j) \in \mathcal{E}$, de otra forma $a_{ij} = 0$, nótese que $a_{ii} = 0$, Mesbahi and Egerstedt (2010).

Un grafo \mathcal{G} es nombrado conectado si para cada par de vértices $(c, d) \in \mathcal{V}$, existe un camino de c a d , Queiroz et al. (2019).

Suposición 2. El grafo de comunicación formado por los seguidores es conectado y no dirigido.

Suposición 3. El líder L siempre forma parte del conjunto vecindad de al menos un seguidor.

El objetivo de control es representado en términos del error de formación $e_i \in \mathbb{R}^3$, el cual se aprecia en la Figura 1, y se describe como:

$$e_i = [e_{i1} \ e_{i2} \ e_{i3}]^T = \frac{1}{N_i} A(\theta_i) \sum_{j=1}^n a_{ij} (P_j - P_i + \Delta_{ij}) \quad (3)$$

donde N_i es la cardinalidad del conjunto vecindad \mathcal{N}_i del agente $i = 1, \dots, n$, y $\Delta_{ij} = [\delta_{ijx} \ \delta_{ijy} \ 0]^T$ es el vector de

distancias relativas deseadas. Entonces, δ_{ijx} y δ_{ijy} son las distancias relativas deseadas entre i y j , en los ejes x y y , respectivamente, además:

$$A(\theta_i) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & \sin(\theta_i) & 0 \\ -\sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ \theta_i \end{bmatrix}, \quad P_j = \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ \theta_j \end{bmatrix}$$

donde $P_i \in \mathbb{R}^3$ y $P_j \in \mathbb{R}^3$ para cada agente $i = 1, \dots, n$ y $\forall j \in \mathcal{N}_i$.

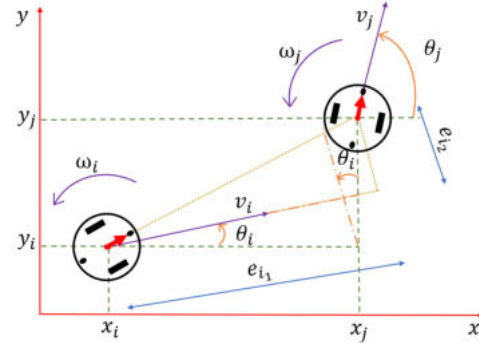


Figura 1. Modelo de los RMU y errores de formación.

Suposición 4. Los valores absolutos de los promedios de las velocidades lineales y angulares de los agentes de cada vecindad $i = 1, \dots, n$ se asumen acotados por las velocidades lineal y angular máximas del líder:

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \right| \leq N_i v_L, \quad \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} \omega_j \right| \leq N_i \omega_L \quad (4)$$

El objetivo es diseñar una ley de control distribuido que, satisfecchas las *Suposiciones 1 a 4*, asegure que los errores de formación (3) converjan a una región compacta del origen, garantizando así el seguimiento en formación del líder. Cuando este objetivo es alcanzado, todos los seguidores se posicionan en la geometría deseada y siguen la trayectoria del líder.

3. DISEÑO DE CONTROL

3.1 Dinámica de los errores de formación

Calculando la dinámica de los errores de formación.

Primero, la derivada temporal de e_{i1} se obtiene como:

$$\dot{e}_{i1} = \frac{1}{N_i} \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} (\dot{x}_j - \dot{x}_i) \cos(\theta_i) - \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{\theta}_i (x_j - x_i + \delta_{ijx}) \sin(\theta_i) + \sum_{j=1}^n a_{ij} (\dot{y}_j - \dot{y}_i) \sin(\theta_i) + \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{\theta}_i (y_j - y_i + \delta_{ijy}) \cos(\theta_i) \right]$$

Se sustituye la cinemática (1) en la expresión anterior y aplicando la identidad de la suma y diferencia de ángulos, y la identidad Pitagórica, se obtiene:

$$\dot{e}_{i1} = \omega_i e_{i2} + \frac{1}{N_i} \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \cos(\theta_j - \theta_i) - N_i v_i \right]$$

La señal de control v_i se propone como:

$$v_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \cos(\theta_j - \theta_i) - u_{i1} \quad (5)$$

donde u_{i1} es una variable auxiliar que se diseñará después para garantizar que e_{i1} vaya a una región alrededor de cero.

Entonces, la dinámica de e_{i_1} se escribe de forma compacta como:

$$\dot{e}_{i_1} = \omega_i e_{i_2} + u_{i_1} \quad (6)$$

Segundo, calculando la derivada temporal del error de formación e_{i_2} , se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{e}_{i_2} = \frac{1}{N_i} \left[- \sum_{j=1}^n a_{ij} (\dot{x}_j - \dot{x}_i) \sin(\theta_i) - \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{\theta}_i (x_j - x_i + \delta_{i_x}) \cos(\theta_i) \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^n a_{ij} (\dot{y}_j - \dot{y}_i) \cos(\theta_i) - \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{\theta}_i (y_j - y_i + \delta_{i_y}) \sin(\theta_i) \right] \end{aligned}$$

Sustituyendo la cinemática (1) en la expresión anterior y después de algunas simplificaciones:

$$\begin{aligned} \dot{e}_{i_2} = -\omega_i e_{i_1} + \frac{1}{N_i} \left[- \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \cos(\theta_j) \sin(\theta_i) \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \sin(\theta_j) \cos(\theta_i) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

Tercero, la derivada temporal de e_{i_3} se calcula como $\dot{e}_{i_3} = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} \omega_j - \omega_i$.

La señal de control ω_i se propone como:

$$\omega_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} \omega_j - u_{i_2} \quad (8)$$

Después, la dinámica de e_{i_3} es escrita en forma compacta como:

$$\dot{e}_{i_3} = u_{i_2} \quad (9)$$

donde u_{i_2} es una variable auxiliar que se diseñará de tal forma que la convergencia de e_{i_3} a una región alrededor de cero implique la convergencia de e_{i_2} . Nótese que las variables v_i , ω_i , u_{i_1} y u_{i_2} tendrán un rol importante durante el diseño del control.

3.2 Ley de control

En esta sección, inspirados por Mera et al. (2020) y Díaz et al. (2023), dos leyes de control basadas en un algoritmo continuo que garantiza la existencia de un cuasi-modo deslizante son propuestas para garantizar la formación con seguimiento de líder. El primer control actúa sobre la velocidad lineal del vehículo (5), mientras que el segundo actúa en la velocidad angular (8). El control provee el seguimiento de los estados del líder para los tres grados de libertad de los seguidores.

Se proponen dos variables deslizantes para asegurar que los errores de formación (3) converjan a una región cercana a cero:

$$\sigma_{i_1} = e_{i_1} \quad (10)$$

$$\sigma_{i_2} = e_{i_3} - \arcsin(f(e_{i_2})) \quad (11)$$

donde $f(e_{i_2})$ es una función no lineal continua a trozos:

$$f(e_{i_2}) = -(\min\{\delta_1 |e_{i_2}|^{-1}, \delta_2\}) e_{i_2} \quad (12)$$

donde δ_1 y δ_2 son constantes que satisfacen:

$$1 > \delta_1 > \frac{2v_{\max}}{\sqrt{v_{\min}^2 - 2v_{\min}v_{\max} + 5v_{\max}^2}}, \quad \delta_2 > 0$$

Las dos leyes de control auxiliares se proponen como:

$$u_{i_1} = -\rho_1 \tanh\left(\frac{\sigma_{i_1}}{\varepsilon}\right) \quad (13)$$

$$u_{i_2} = -\rho_2 \tanh\left(\frac{\sigma_{i_2}}{\varepsilon}\right) \quad (14)$$

donde $\varepsilon \ll 1$, las ganancias de control ρ_1 y ρ_2 se escogen tal que:

$$\rho_1 > \frac{\delta_1}{\delta_2} (\omega_{\max} + \rho_2), \quad \rho_2 > \delta_2 v_{\max} / \sqrt{1 - \delta_1^2}. \quad (15)$$

Teorema 1. Sea un conjunto de n RMU, con el modelo cinemático mostrado en (1), satisfaciendo las *Suposiciones 1 a 4*. Entonces, las leyes de control

$$v_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \cos(\theta_j - \theta_i) - u_{i_1}$$

$$\omega_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} \omega_j - u_{i_2}$$

donde u_{i_1} y u_{i_2} están definidas en (13) y (14), y las variables deslizantes en (10) y (11), con las ganancias de control seleccionadas de acuerdo a (15); garantizan que las dinámicas de los errores de formación (6), (7) y (9) converjan asintóticamente al conjunto acotado:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} = \left\{ (e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3})^T \in \mathbb{R}^3 : |e_{i_1}| \leq \frac{\rho_1 \eta \varepsilon}{\alpha}, |e_{i_2}| \leq \sqrt{\frac{\xi}{\psi}}, \right. \\ \left. |e_{i_3}| \leq \arcsin\left(\delta_2 \sqrt{\frac{\xi}{\psi}}\right) + \frac{\rho_2 \eta \varepsilon}{\beta}, \forall i = 1, \dots, n \right\} \end{aligned}$$

donde $\psi := v_{\min} \delta_2$, $\xi := \frac{v_{\max}(\delta_1^2 + 1)}{\delta_2} + \rho_1 \eta \varepsilon (1 - \frac{\rho_1}{\alpha})$, $\alpha := \rho_1 - \frac{\delta_1}{\delta_2} (\omega_{\max} + \rho_2)$, $\beta := \rho_2 - \frac{\delta_2 v_{\max}}{\sqrt{1 - \delta_1^2}}$, $\eta \approx 0.2785$ y $\varepsilon \ll 1$.

Prueba 1. El análisis de estabilidad es estructurado, debido a la característica de subactuación del problema, para dos variables de deslizamiento relacionadas a dos controles, y tres errores de formación relacionados a tres variables de configuración. Para analizar la convergencia de estas cinco variables, se utilizan en total cuatro funciones candidatas de Lyapunov, dos para cada variable deslizante, i.e. σ_{i_1} , σ_{i_2} , y dos para los primeros dos errores de formación, i.e. e_{i_1} , e_{i_2} . Para el análisis de los errores se consideran los casos cuando σ_{i_1} converge a una región cercana a cero, antes que σ_{i_2} , y cuando la σ_{i_2} converge antes que σ_{i_1} . Una vez que la variable deslizante σ_{i_2} ha convergido a una región alrededor de cero, el error de formación e_{i_3} satisface una relación algebraica con e_{i_2} , así, la convergencia de e_{i_3} depende directamente de e_{i_2} .

Análisis de estabilidad de σ_{i_1} : Se introduce la función candidata de Lyapunov $V_{\sigma_{i_1}} = \frac{1}{2} \sigma_{i_1}^2 = \frac{1}{2} e_{i_1}^2$ para la primera variable deslizante (10). Calculando la derivada temporal de $V_{\sigma_{i_1}}$ a lo largo de las trayectorias de (6) y sustituyendo (13), se obtiene:

$$\dot{V}_{\sigma_{i_1}} = e_{i_1} \left(\omega_i e_{i_2} - \rho_1 \tanh\left(\frac{e_{i_1}}{\varepsilon}\right) \right)$$

De (8) y (14), se sabe que $\omega_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} \omega_j + \rho_2 \tanh\left(\frac{\sigma_{i_2}}{\varepsilon}\right)$, entonces:

$$\dot{V}_{\sigma_{i_1}} = e_{i_1} e_{i_2} \left(\frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} \omega_j + \rho_2 \tanh\left(\frac{\sigma_{i_2}}{\varepsilon}\right) \right) - \rho_1 e_{i_1} \tanh\left(\frac{e_{i_1}}{\varepsilon}\right)$$

Dos propiedades importantes serán utilizadas para acotar funciones a lo largo del artículo, estas son:

$$0 \leq |x| - x \tanh\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \leq \eta \varepsilon, \quad \left| \tanh\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right| \leq 1. \quad (16)$$

donde $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ y $\eta - e^{-(\eta+1)} = 0$, i.e. $\eta \approx 0.2785$.

Nótese que, si $|e_{i2}| \leq \frac{\delta_1}{\delta_2}$, entonces usando las cotas superiores (2), (4) y (16), las siguientes desigualdades se satisfacen:

$$\dot{V}_{\sigma_{i1}} \leq \frac{\delta_1 \omega_{\max}}{\delta_2} |e_{i1}| + \frac{\delta_1 \rho_2}{\delta_2} |e_{i1}| - \rho_1 |e_{i1}| + \rho_1 \eta \varepsilon$$

El caso donde la norma de $|e_{i2}| > \frac{\delta_1}{\delta_2}$ es analizado más adelante.

Reduciendo y factorizando términos, se tiene que $\dot{V}_{\sigma_{i1}} \leq -\left(\rho_1 - \frac{\delta_1}{\delta_2} (\omega_{\max} + \rho_2)\right) |e_{i1}| + \rho_1 \eta \varepsilon$. Entonces, para que esta función sea negativa, se debe de cumplir que ρ_1 satisfice (15), por lo tanto $\dot{V}_{\sigma_{i1}}$ satisfice la desigualdad $\dot{V}_{\sigma_{i1}} \leq -\alpha \sqrt{2} V_{\sigma_{i1}}^{1/2} + \rho_1 \eta \varepsilon < 0$, donde $\alpha := \rho_1 - \frac{\delta_1}{\delta_2} (\omega_{\max} + \rho_2)$. Finalmente, se concluye que para cada agente $i = 1, \dots, n$, se satisfice la desigualdad $|\sigma_{i1}(t)| \leq \rho_1 \eta \varepsilon / \alpha, \forall t \geq t_{1, \max_i}$, para un tiempo $t_{1, \max_i} \leq 2V_{\sigma_{i1}}^{1/2}(0) + \sqrt{2} \rho_1 \eta \varepsilon \ln \left| 1 - \frac{\sqrt{2} \alpha}{\rho_1 \eta \varepsilon} V_{\sigma_{i1}}^{1/2}(0) \right| / \alpha$.

Análisis de estabilidad de σ_{i2} : La función candidata de Lyapunov $V_{\sigma_{i2}} = \frac{1}{2} \sigma_{i2}^2$ es propuesta para la segunda variable deslizante (11). Sustituyendo (11) y (9) en la derivada temporal de $V_{\sigma_{i2}}$:

$$\dot{V}_{\sigma_{i2}} = \sigma_{i2} \left(u_{i2} - \frac{d}{dt} \arcsin(f(e_{i2})) \right) \quad (17)$$

La derivada de la función $f(\cdot)$ en (12) tiene una discontinuidad en $|e_{i2}| = \frac{\delta_1}{\delta_2}$, esto hace que los errores de formación deban ser analizados cuando $|e_{i2}| > \frac{\delta_1}{\delta_2}$ y cuando $|e_{i2}| \leq \frac{\delta_1}{\delta_2}$.

Para la primera región, donde $|e_{i2}| > \frac{\delta_1}{\delta_2}$ y $f(e_{i2}) = -\delta_1 \text{sign}(e_{i2})$, $\arcsin(f(e_{i2}))$ tiene un valor constante:

$$\frac{d}{dt} \arcsin(f(e_{i2})) = 0 \quad (18)$$

Ahora sustituimos (14) y (18) en la derivada temporal de $V_{\sigma_{i2}}$, resultando que $\dot{V}_{\sigma_{i2}} = \sigma_{i2} \left(-\rho_2 \tanh\left(\frac{\sigma_{i2}}{\varepsilon}\right) \right) \leq \rho_2 \eta \varepsilon - \rho_2 |\sigma_{i2}|$.

Nótese que, si $\rho_2 > 0$, entonces $\dot{V}_{\sigma_{i2}} \leq -\rho_2 \sqrt{2} V_{\sigma_{i2}}^{1/2} + \rho_2 \eta \varepsilon < 0$. Por lo tanto, se concluye que para la primera región cuando $|e_{i2}| > \frac{\delta_1}{\delta_2}$, la segunda variable deslizante satisfice $|\sigma_{i2}| \leq \eta \varepsilon$ en tiempo finito $t_{2, \max_i} \leq 2V_{\sigma_{i2}}^{1/2}(0) + \sqrt{2} \eta \varepsilon \ln \left| 1 - \frac{\sqrt{2}}{\eta \varepsilon} V_{\sigma_{i2}}^{1/2}(0) \right|$.

Por otro lado, para la segunda región, donde $|e_{i2}| \leq \frac{\delta_1}{\delta_2}$, $f(e_{i2}) = -\delta_2 e_{i2}$, la derivada del arcoseno ahora esta dada como:

$$\frac{d}{dt} \arcsin(-\delta_2 e_{i2}) = -[-\delta_2 \omega_i e_{i1} + \frac{\delta_2 \Sigma S}{N_i} \cos(e_{i3}) + \frac{\delta_2 \Sigma C}{N_i} \sin(e_{i3})] / \sqrt{1 - \delta_2^2 e_{i2}^2} \quad (19)$$

La derivada temporal de $V_{\sigma_{i2}}$ ahora se calcula sustituyendo (14) y (19) en (17), para este segundo caso:

$$\dot{V}_{\sigma_{i2}} = -\rho_2 \sigma_{i2} \tanh\left(\frac{\sigma_{i2}}{\varepsilon}\right) + \sigma_{i2} [-\delta_2 \omega_i e_{i1} + \frac{\delta_2 \Sigma S}{N_i} \cos(e_{i3}) + \frac{\delta_2 \Sigma C}{N_i} \sin(e_{i3})] / \sqrt{1 - \delta_2^2 e_{i2}^2}$$

donde:

$$\Sigma S := \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \sin(\theta_j - \theta_i - e_{i3}), \quad \Sigma C := \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \cos(\theta_j - \theta_i - e_{i3}).$$

Para cualquier $t \geq t_{1, \max_i}$, la variable σ_{i1} y por lo tanto e_{i1} , se consideran despreciables. Dadas las Suposiciones 1 y 4, aplicando la identidad de la suma y diferencia de ángulos y la cota de (16), la siguiente desigualdad se satisfice:

$$\dot{V}_{\sigma_{i2}} \leq -\left(\rho_2 - \frac{\delta_2 v_{\max}}{\sqrt{1 - \delta_1^2}}\right) |\sigma_{i2}| + \rho_2 \eta \varepsilon \quad (20)$$

Entonces, para que la función (20) sea negativa, se debe cumplir que ρ_2 satisfice (15).

Se tiene entonces que $\dot{V}_{\sigma_{i2}} \leq -\beta \sqrt{2} V_{\sigma_{i2}}^{1/2} + \rho_2 \eta \varepsilon$ donde $\beta := \rho_2 - \frac{\delta_2 v_{\max}}{\sqrt{1 - \delta_1^2}}$. Por lo tanto, se concluye que se satisfice la desigualdad $|\sigma_{i2}(t)| \leq \rho_2 \eta \varepsilon / \beta, \forall t \geq t_{2, \max_i}$, para el tiempo $t_{2, \max_i} \leq 2V_{\sigma_{i2}}^{1/2}(0) + \sqrt{2} \rho_2 \eta \varepsilon \ln \left| 1 - \frac{\sqrt{2} \beta}{\rho_2 \eta \varepsilon} V_{\sigma_{i2}}^{1/2}(0) \right| / \beta$.

Dada la convergencia de σ_{i2} , obteniendo e_{i3} de (11), se tiene:

$$e_{i3} = \arcsin(f(e_{i2})) + \sigma_{i2} = \arcsin(f(e_{i2})) \pm \frac{\rho_2 \eta \varepsilon}{\beta} \quad (21)$$

Considerando el valor de e_{i3} en (3), θ_i puede escribirse como:

$$\theta_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} \theta_j - e_{i3} \quad (22)$$

Entonces, sustituyendo (22) en la dinámica del segundo error de formación (7):

$$\dot{e}_{i2} = -\omega_i e_{i1} + \frac{\Sigma S}{N_i} \cos(e_{i3}) + \frac{\Sigma C}{N_i} \sin(e_{i3}) \quad (23)$$

Análisis de estabilidad de e_{i1} y e_{i2} : Es necesario introducir una función de Lyapunov candidata para los primeros dos errores de formación, debido a que aparecen términos cruzados en las derivadas y estos tienen que ser eliminados, como $V_{e_i} = V_{e_{i1}} + V_{e_{i2}} = \frac{1}{2} e_{i1}^2 + \frac{1}{2} e_{i2}^2$. Se sustituye (21) en (23), y recordando que si $|e_{i2}| > \frac{\delta_1}{\delta_2}$ entonces $f(e_{i2}) = -\delta_1 \text{sign}(e_{i2})$, con este análisis se considera el caso en donde σ_{i1} aún no converge. Considerando las trayectorias de la dinámica de los errores, para $|e_{i2}| > \frac{\delta_1}{\delta_2}$, la derivada temporal de V_{e_i} esta dada por:

$$\dot{V}_{e_i} = \rho_1 \eta \varepsilon - \rho_1 |e_{i1}| + \frac{e_{i2} \Sigma S}{N_i} \sqrt{1 - \delta_1^2} + \frac{\delta_1 \Sigma S}{N_i} |e_{i2}| - \frac{\delta_1 \Sigma C}{N_i} |e_{i2}| + \frac{e_{i2} \Sigma C}{N_i} \sqrt{1 - \delta_1^2}$$

Después, aplicando las cotas dadas en (2), (4) y (16), la derivada temporal de V_{e_i} satisfice la desigualdad $\dot{V}_{e_i} \leq -\rho_1 |e_{i1}| - \left(\delta_1 v_{\min} - v_{\max} \left(2\sqrt{1 - \delta_1^2} + \delta_1\right)\right) |e_{i2}| + \rho_1 \eta \varepsilon$. Para que la función de Lyapunov sea negativa, debe satisfacerse que $\rho_1 > 0$ y $\delta_1 > 2v_{\max} / \sqrt{v_{\min}^2 - 2v_{\min} v_{\max} + 5v_{\max}^2}$. Si δ_1 y ρ_1 son seleccionadas como en (12) y (15), respectivamente, entonces $\rho_1 \geq \gamma > 0$ y $\dot{V}_{e_i} \leq -\gamma \sqrt{2} V_{e_i}^{1/2} + \gamma \eta \varepsilon$, donde $\gamma := \delta_1 v_{\min} - v_{\max} \left(2\sqrt{1 - \delta_1^2} + \delta_1\right)$.

Los errores de formación satisfacen $|e_{i1}| \leq \eta \varepsilon$ y $|e_{i2}| \leq \eta \varepsilon$ en tiempo finito $t_{e, \max_i} \leq 2V_{e_i}^{1/2}(0) + \sqrt{2} \eta \varepsilon \ln \left| 1 - \frac{\sqrt{2}}{\eta \varepsilon} V_{e_i}^{1/2}(0) \right|$.

Análisis de estabilidad de e_{i_2} cuando $e_{i_1} \rightarrow \frac{\rho_1 \eta \varepsilon}{\alpha}$: Para probar la estabilidad del segundo error de formación, una vez que el primer error de formación ha convergido a su respectivo conjunto, y considerando $|e_{i_2}| \leq \frac{\delta_1}{\delta_2}$, se propone la función candidata de Lyapunov $V_{e_{i_2}} = \frac{1}{2} e_{i_2}^2$.

La derivada temporal de $V_{e_{i_2}}$ esta dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{e_{i_2}} = & \rho_1 \eta \varepsilon \left(1 - \frac{\rho_1}{\alpha}\right) + e_{i_2} \sqrt{1 - \delta_2^2 e_{i_2}^2} \left(\frac{\Sigma S}{N_i} + \frac{\Sigma C}{N_i}\right) \\ & + \frac{\delta_2 |e_{i_2}| \Sigma S}{N_i} - \frac{\delta_2 e_{i_2}^2 \Sigma C}{N_i} \end{aligned} \quad (24)$$

Con el fin de acotar la función de Lyapunov (24), el máximo de $e_{i_2} \sqrt{1 - \delta_2^2 e_{i_2}^2}$ es calculado, obteniendo la cota superior $e_{i_2} \sqrt{1 - \delta_2^2 e_{i_2}^2} \leq \frac{1}{2\delta_2}$. Entonces, utilizando las desigualdades dadas en (2) y (4), y sustituyendo el máximo calculado, la derivada temporal de $V_{e_{i_2}}$ satisface la desigualdad $\dot{V}_{e_{i_2}} \leq -v_{\min} \delta_2 |e_{i_2}|^2 + \frac{v_{\max}(\delta_1^2 + 1)}{\delta_2} + \rho_1 \eta \varepsilon \left(1 - \frac{\rho_1}{\alpha}\right)$.

Si δ_2 es escogida de acuerdo a (12), entonces $\dot{V}_{e_{i_2}} \leq -2\psi V_{e_{i_2}} + \xi$, donde $\psi := v_{\min} \delta_2$ y $\xi := \frac{v_{\max}(\delta_1^2 + 1)}{\delta_2} + \rho_1 \eta \varepsilon \left(1 - \frac{\rho_1}{\alpha}\right)$. Para que sea negativa esta derivada, puede observarse que mientras más grande el valor de δ_2 , más grande la razón de convergencia de ψ y más chica la región donde converge ξ . Entonces será negativa para $|e_{i_2}| > \sqrt{\frac{\xi}{\psi}}$.

Así, el segundo error de formación e_{i_2} converge asintóticamente al conjunto compacto atractivo dado por:

$$\mathcal{C}_1 := \left\{ e_{i_2} \in \mathbb{R} : |e_{i_2}| \leq \sqrt{\frac{\xi}{\psi}}, \forall i = 1, \dots, n \right\}.$$

Análisis de estabilidad de e_{i_3} : Como consecuencia de la convergencia de e_{i_2} a la región \mathcal{C}_1 , entonces $|e_{i_3}| \leq \arcsin(\delta_2 |e_{i_2}|) + \frac{\rho_2 \eta \varepsilon}{\beta}$. Definiendo:

$$\mathcal{C}_2 := \left\{ e_{i_3} \in \mathbb{R} : |e_{i_3}| \leq \arcsin\left(\delta_2 \sqrt{\frac{\xi}{\psi}}\right) + \frac{\rho_2 \eta \varepsilon}{\beta}, \forall i = 1, \dots, n \right\}.$$

Se observa que si $|e_{i_2}| \rightarrow \mathcal{C}_1$, entonces $|e_{i_3}| \rightarrow \mathcal{C}_2$, en otras palabras, el tercer error de formación converge a la región \mathcal{C}_2 .

■

Observación 1. La alta frecuencia de conmutación en las señales de control causada por el uso de funciones discontinuas, conocida como “chattering”, es atenuada utilizando el control diferenciable presentado en este artículo. El control utilizado en la forma $u_{ij} = -\rho \tanh\left(\frac{\sigma_{ij}}{\varepsilon}\right)$ para cada $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, 2$, altera las propiedades de convergencia del control por modos deslizantes. En vez de garantizar la existencia de un modo deslizante ideal, ahora las trayectorias son forzadas a moverse en una región alrededor del conjunto deslizante, de donde recibe el nombre de cuasi-modo deslizante. Esto causa que la convergencia de los errores de formación pueda ser garantizada solo en un conjunto acotado alrededor del origen, este conjunto acotado es proporcional al parámetro ε , como se observa en la prueba del *Teorema 1*. Además, el parámetro δ_2 es inversamente proporcional a la dimensión del conjunto de atracción de e_{i_2} .

4. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Se considera un SMA conformado por RMU, cuatro agentes seguidores y un líder, modelados por la cinemática (1). Cada agente puede obtener información sólo de su vecindad. En la Figura 2 se aprecian el líder, etiquetado con la letra L, los seguidores, representados por los nodos 1 a 4, y las distancias relativas δ_{ij_x} y δ_{ij_y} entre cada par de agentes i, j .

Recordemos que el líder puede realizar una trayectoria arbitraria, pero para fines de simulación, se considera que el líder tiene un control de seguimiento de trayectoria, basado en el trabajo de Mera et al. (2020), que le permite seguir la trayectoria de la Lemniscata de Geron, parametrizada en el tiempo como $x_d(t) = b \cos(\omega_0 t)$, $y_d(t) = b \sin(2\omega_0 t)$, y $\theta_d(t) = \arctan\left(\frac{\dot{y}_d(t)}{\dot{x}_d(t)}\right)$, donde $b = 1$ y $\omega_0 = 0.35$ [rad/s].

Nótese que no todos los agentes seguidores tienen acceso a la información del líder ni a la de todos los agentes de forma directa. Además, la trayectoria seguida por el líder es desconocida para el grupo de seguidores.

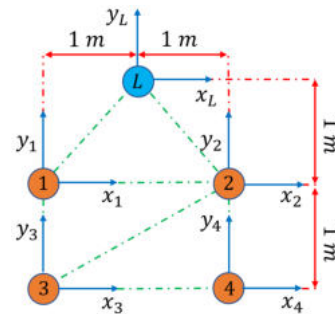


Figura 2. Grafo de Formación.

El objetivo es que los agentes seguidores ejecuten la formación dada en la Figura 2 mientras siguen los movimientos del líder.

Utilizando la notación de (3), la postura inicial es establecida como $P_L = (1, -0.5, 0.5)$, $P_1 = (0.25, -2.5, 1.6)$, $P_2 = (2.5, -1.75, 1.2)$, $P_3 = (0.5, -3, 1.8)$ y $P_4 = (2.25, -2, 1.5)$. El grafo de comunicación $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ esta compuesto por el conjunto de vértices $\mathcal{V} = \{L, 1, 2, 3, 4\}$, y el conjunto de aristas $\mathcal{E} = \{(L, 1), (L, 2), (1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 4)\}$.

Se considera que los seguidores se controlan por la ley dada en el *Teorema 1*. Para la *Suposición 1* los valores se establecen como $v_{\min} = 0.01$ [m/s], $v_{\max} = 0.7$ [m/s] y $\omega_{\max} = 2.7$ [rad/s]. Las ganancias de control (12) están dadas por $\delta_1 = 0.9$ y $\delta_2 = 1.8$ se escogen de esa forma para suavizar el comportamiento durante la convergencia. Los parámetros de control en (15) están acotados como $\rho_2 > 2.89$ y $\rho_1 > 2.91$ que son arbitrariamente seleccionados como $\rho_1 = \rho_2 = 3$. El parámetro de regularización de la *Observación 1* es $\varepsilon = 0.01$.

La Figura 3 muestra el comportamiento de las variables deslizantes. Nótese que ambas variables deslizantes convergen a una región muy cercana a cero en menos de 0.4s. En la Figura 4 se muestra la convergencia de los errores de formación una vez que las variables deslizantes han convergido. e_{i_1} converge en tiempo finito como consecuencia directa de la convergencia de σ_{i_1} . El error de formación e_{i_2} converge asintóticamente a la región acotada \mathcal{C}_1 alrededor del origen, así como e_{i_3} converge asintóticamente a la región acotada \mathcal{C}_2 . Los errores de formación alcanzan un valor despreciable después de 4s. Las señales

proporcionadas por el controlador propuesto son mostradas en la Figura 5, note la ausencia de chattering en ellas. Finalmente, en la Figura 6 se presenta la formación deseada de los agentes y el seguimiento de la posición del líder. Una animación utilizando los datos de la simulación numérica puede verse en <https://youtu.be/qq8C7QoCpMU>.

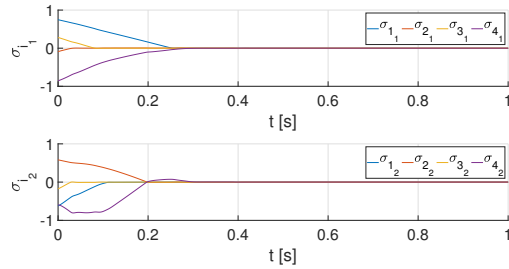


Figura 3. Variables Deslizantes (σ_{i_1} y σ_{i_2}).

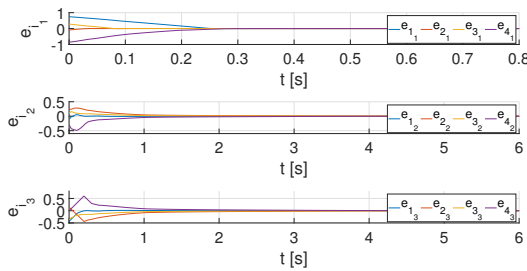


Figura 4. Errores de Formación (e_{i_1} , e_{i_2} y e_{i_3}).

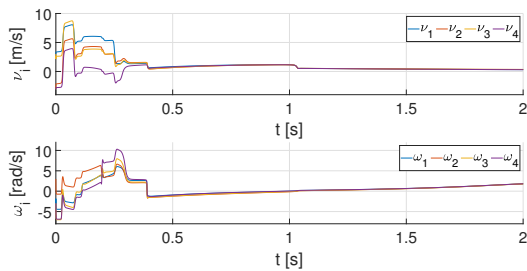


Figura 5. Señales de control v_i y ω_i .

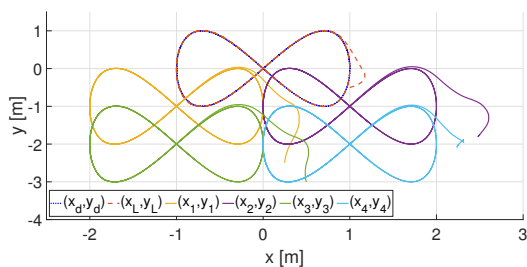


Figura 6. Trayectorias de Formación.

5. CONCLUSIONES

En este artículo se propone la técnica de control utilizando un cuasi-modo deslizante para resolver el problema de seguimiento de formación de múltiples RMU. La estrategia de control garantiza la convergencia asintótica de los errores de formación a un conjunto compacto alrededor del origen mediante un

diseño particular de las variables deslizantes. Los resultados obtenidos en la simulación muestran la efectividad del control implementado para la trayectoria de la Lemniscata de Gerono y prueba que los robots móviles son capaces de alcanzar el objetivo de control mediante una ley de control diferenciable.

REFERENCIAS

- Bhowmick, S. and Panja, S. (2019). Leader-follower bipartite consensus of linear multiagent systems over a signed directed graph. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 66, 1436–1440.
- Damien, G. (2009). *Unmanned Aerial Vehicle Formation Flight Using Sliding Mode Disturbance Observers*. IntechOpen.
- Díaz, Y., Dávila, J., and Mera, M. (2023). Leader-follower formation of unicycle mobile robots using sliding mode control. *IEEE Control Systems Letters*, 7, 883–888.
- Defoort, M., Demesure, G., Zuo, Z., Polyakov, A., and Djemai, M. (2016). Fixed-time stabilisation and consensus of non-holonomic systems. *IET Control Theory & Applications*, 10, 2497–2505.
- González-Sierra, J., Dzul, A., and Ríos, H. (2019). Robust sliding-mode formation control and collision avoidance via repulsive vector fields for a group of quad-rotors. *International Journal of Systems Science*, 50, 1483–1500.
- González-Sierra, J., Ríos, H., and Dzul, A. (2017). Leader-follower robust formation control for quad-rotors via continuous sliding-modes. *2017 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, 1850–1857.
- González-Sierra, J., Ríos, H., and Dzul, A. (2020). Quad-rotor robust time-varying formation control: a continuous sliding-mode control approach. *International Journal of Control*, 93, 1659–1676.
- Kamel, M.A., Yu, X., and Zhang, Y. (2020). Formation control and coordination of multiple unmanned ground vehicles in normal and faulty situations: A review. *Annual Reviews in Control*, 49, 128–144.
- Maghenem, M., Bautista, A., Nuño, E., Loría, A., and Pantelley, E. (2019). Consensus of multi-agent systems with nonholonomic restrictions via Lyapunov’s direct method. *IEEE Control Systems Letters*, 3, 344–349.
- Meng, D., Jia, Y., and Du, J. (2015). Robust consensus tracking control for multiagent systems with initial state shifts, disturbances, and switching topologies. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 26, 809–824.
- Mera, M., Ríos, H., and Martínez, E.A. (2020). A sliding-mode based controller for trajectory tracking of perturbed unicycle mobile robots. *Control Engineering Practice*, 102.
- Mesbahi, M. and Egerstedt, M. (2010). *Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks*, 23–27. Princeton University Press, student edition.
- Oh, K.K., Park, M.C., and Ahn, H.S. (2015). A survey of multi-agent formation control. *Automatica*, 53, 424–440.
- Queiroz, M.D., Cai, X., and Feemster, M. (2019). *Formation Control of Multi-Agent Systems*, 1–28. John Wiley & Sons.
- Shi, P. and Yan, B. (2021). A survey on intelligent control for multiagent systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 51, 161–175.
- Zoghiani, N., Beji, L., Mlayeh, R., Abichou, A., and Jammazi, C. (2014). Finite-time consensus of networked nonlinear systems under directed graph. *2014 European Control Conference (ECC)*, 546–551.