

# Trajectory generation considering non-holonomic constraints for an indoor quadrotor

J.C Sandoval-Reyes, Manuel Mera,  
Francisco Javier Bejarano.

*Instituto Politécnico Nacional ESIME Ticomán, Av. Ticomán No. 600,  
San José Ticomán, C.P. 07340 Ciudad de México, México. E-mail:  
jcsandovalreyes@gmail.com, mmerah@ipn.mx, fjbejarano@ipn.mx*

**Abstract:** Nowadays the use of quadrotors is extremely extended in different recreational, industrial and research environments, for that reason having a way to generate motion following a predetermined position without losing the degrees of freedom of the quadrotor is an interesting idea. In the present work a model of a quadrotor with cross configuration is obtained, analytically by the Euler-Lagrange method, and non-holonomic constraints are imposed through a vector that gives the direction to follow in every movement it performs. A Twisting control is used to generate the point-to-point trajectory that the quadrotor should follow, in particular for this work, pointing to the positive x-axis of the quadrotor.

*Keywords:* Non-holonomic System, Nonlinear Control, Quadrotor model, Twisting controller, Trajectory generation

## 1. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo trata sobre la imposición de restricciones no holónomas ajenas (sección 2) a un modelo de quadrotor en configuración de cruz (sección 3 y 4) por medio de su modificación, usando el kernel de la matriz de restricciones del sistema D'andr ea-novel et al. (1995) (sección 5 y 6) e implementando un control Twisting para la generación de trayectoria punto a punto (sección 7). Se presentan los resultados de la simulación del control en la sección 8 y las conclusiones en la sección 9.<sup>1</sup>

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El movimiento de un quadrotor involucra movimiento angular antes de un movimiento lineal. El presente trabajo propone una alternativa para mantener una dirección fija y lograr un movimiento lineal, con una parte del quadrotor apuntando en dirección al movimiento.

Para seguir una dirección dada por el vector de orientación  $D$  durante el movimiento del quadrotor se debe restringir el vector de velocidad  $V$  al hacer que ambos sean paralelos. En otras palabras, el producto punto entre el vector velocidad y el vector perpendicular al vector orientación  $D^\perp$  debe de ser cero, esto es

$$\langle V, D^\perp \rangle = 0 \quad (1)$$

$D$  se encuentra en el marco de referencia cuerpo y posee ángulos directores; en el caso del plano  $xy$  solo se cuenta

con  $\alpha$ . Se desea un movimiento similar a la conducción de un automóvil o a una carreta sobre rieles Fathian et al. (2021); Li et al. (2018); en estos ejemplos existe un frente que permanentemente tiene la dirección predefinida, y no puede deslizarse lateralmente.

Al introducir estas restricciones al modelo y no al control, se busca que cualquier control diseñado, considerando el modelo restringido, produzca una trayectoria admisible.

Debido al alcance de este trabajo, vamos a limitar el análisis al movimiento en el plano  $xy$ , con una dirección igual al eje  $x$  positivo del marco de referencia cuerpo, en otras palabras, la configuración en cruz hará que el frente del quadrotor apunte a la dirección en la que nos movemos. Se toman como referencias centrales a D'andr ea-novel et al. (1995); Greenwood (1997). Nuestro objetivo es *implementar restricciones no holónomas para mantener el movimiento de un quadrotor con una orientación dada al generar trayectorias punto a punto por medio de control twisting.*

## 3. MODELO DEL QUADROTOR

Se usará una configuración en cruz, es decir, los motores se encuentran de manera equidistante del hub, a esta distancia se le conocer  como  $l$ , el largo del brazo, y se intersecan de forma perpendicular. Hespanha (2009); Nagaty et al. (2013); Wu et al. (2017).

El marco de referencia inercial  $i$  será en el cual se obtiene movimiento de traslación, estará en la superficie terrestre

<sup>1</sup> F. J. Bejarano agradece el apoyo del proyecto SIP 20231425.

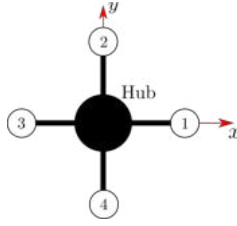


Figura 1. Vista de planta del quadrotor con numeración de motores.

y conservará la orientación conforme a la regla de la mano derecha con el eje  $z$  positivo apuntando al cielo. El marco de referencia Vehículo  $v$  tendrá como origen el centro de gravedad del quadrotor, teniendo la misma orientación que el marco de referencia Inercial, siendo solo una traslación de éste. El marco de referencia Cuerpo  $b$ , donde se originan las fuerzas y momentos del quadrotor, será dada la orientación por los ángulos  $\phi, \theta, \psi$ , teniendo como origen el centro de gravedad del quadrotor Beard (2008); Meyer et al. (2012); Praveen et al. (2016).

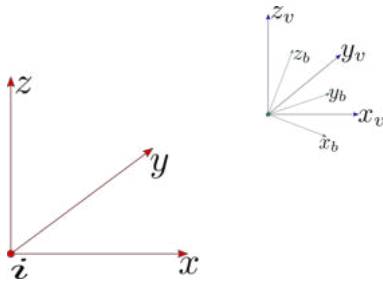


Figura 2. Marcos de referencia del quadrotor.

El vector de coordenadas generalizadas queda definido como  $q = [\xi \ \eta]^T = [x \ y \ z \ \phi \ \theta \ \psi]^T$ , siendo las variables  $(x, y, z)$  las encargadas de describir la posición y  $(\phi, \theta, \psi)$  las que describen la orientación. Gracias a la simetría que posee el quadrotor, el momento de inercia total del eje  $y$  del marco de referencia cuerpo ( $I_{yy}$ ) es igual al momento de inercia total del eje  $x$  del marco de referencia cuerpo ( $I_{xx}$ ) y  $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ , siendo nuestra matriz de inercia en el marco de referencia cuerpo  $I_{xyz}$ :

$$I_{xyz} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Las matrices de rotación estarán definidas por  $\phi, \theta, \psi$  los desplazamientos angulares. Siendo la rotación del marco de referencia vehículo al marco cuerpo la matriz de rotación general  $R_v^b(\phi, \theta, \psi)$ , siendo la funciones trigonométricas abreviadas como  $seno = s$  y  $coseno = c$ .

$$R_v^b(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi c\theta \\ c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi c\theta \end{bmatrix}$$

Un caso especial surge a la hora de transformar las velocidades angulares del marco vehículo al marco cuerpo, pues al ser  $\phi, \theta, \psi$  los desplazamientos angulares del quadrotor medidos a partir del marco Vehículo, se tendrá que obtener la razón de cambio a partir de la transformación de los ángulos al marco cuerpo. Así  $M_T$  es la matriz de rotación para la velocidades angulares.

$$M_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi c\theta \\ 0 & -s\phi & c\phi c\theta \end{bmatrix}$$

#### 4. DINÁMICA DEL QUADROTOR

Para el modelo del quadrotor se utiliza el método de Euler Lagrange, por lo que se debe de obtener el lagrangiano  $L = T - U$ , donde  $T$  es la energía cinética y  $U$  es la energía potencial del sistema. Para el quadrotor la energía cinética esta dada por el movimiento de traslación y el movimiento de rotación, mientras que la energía potencial esta dada por la masa del quadrotor.

En el caso de la energía cinética por rotación, pertenece al marco de referencia cuerpo, obligando a realizar una serie de transformaciones a  $I_{xyz}$  para expresarla en el marco de referencia inercial dando como resultado  $J = M_T^T I_{xyz} M_T$  Beard (2008); Praveen et al. (2016); Castillo et al. (2004); Pestana et al. (2016); Bemporad et al. (2009). Donde  $J \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es la matriz de momentos de inercia en el marco de referencia inercial, resultado de la pre y pos multiplicación de la matriz  $I_{xyz}$  por la matriz de rotación  $M_T$ . Entonces la energía cinética total esta dada por

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T \begin{bmatrix} mI & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \dot{q}$$

Donde  $mI \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es una matriz identidad multiplicada por la masa total del quadrotor. La energía potencial dada por la masa del quadrotor es:  $U = mgz$

Una vez definida la energía cinética y potencial, se obtiene el Lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2} \left( \dot{x}^2 m + \dot{y}^2 m + \dot{z}^2 m + \dot{\phi}^2 I_{xx} + \dot{\theta}^2 (I_{yy} + a s^2 \phi) \right) + \frac{1}{2} \left( \dot{\psi}^2 (I_{yy} + a (c\phi c\theta)^2) - 2\dot{\psi}\dot{\phi}s\theta I_{xx} - \dot{\psi}\dot{\theta}a c\theta s(2\phi) \right) - mgz$$

Cada motor del vehículo genera una fuerza de levantamiento y un momento, gracias a esto es posible el movimiento del quadrotor. El vector de entradas de control será:

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} f_1 + f_2 + f_3 + f_4 \\ l(f_4 - f_2) \\ l(f_1 - f_3) \\ \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} \quad (2)$$

Siendo  $f$  la suma de las fuerzas de sustentación generadas por los motores;  $\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi$  los momentos alrededor de los ejes  $x, y, z$  del marco de referencia cuerpo.

Para obtener el vector de fuerzas y momentos  $F \in \mathbb{R}^6$  es necesario recurrir a (2) y a la matriz  $\bar{B} \in \mathbb{R}^{6 \times 4}$ , compuesta por una matriz de ceros  $0_{2 \times 4}$  y una matriz identidad  $I_{4 \times 4}$  es decir  $\bar{B} = (0_{2 \times 4}, I_{4 \times 4})^T$  para que  $F = \bar{B}\hat{u}$  y se logre tener la misma dimensión del vector de coordenadas generalizadas.

Ya que se necesita el vector de fuerzas y momentos en el marco de referencia inercial, se debe transformar con la ayuda de la matriz de rotación general:

$$Q = \begin{bmatrix} R_b^v & 0 \\ 0 & R_b^v \end{bmatrix} F \quad (3)$$

Siendo  $Q$  el vector de fuerzas generalizadas. Entonces las ecuaciones de Lagrange  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = Q$  están dadas por

$$[m\ddot{x} \ m\ddot{y} \ m\ddot{z} - mg \ L_4 \ L_5 \ L_6]^T = Q \quad (4)$$

$$L_4 = I_{xx} (\ddot{\phi} - \ddot{\psi}s\theta) - I_{xx}\dot{\psi}\dot{\theta}c\theta + \frac{a}{2}s(2\phi) (-\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2c^2\theta) + a\dot{\psi}\dot{\theta}c\theta c(2\phi)$$

$$L_5 = \ddot{\theta} (I_{yy} + as^2\phi) - as(2\phi)\ddot{\psi}c\theta + as(2\phi) (\dot{\theta}\dot{\phi} + 2\dot{\psi}\dot{\theta}s\theta) - 2a\dot{\psi}\dot{\phi}c\theta c(2\phi) + \frac{a}{2}s(2\theta)\dot{\psi}^2c^2\phi + \dot{\psi}\dot{\phi}I_{xx}c\theta$$

$$L_6 = \ddot{\psi} (I_{yy} + a(c\phi c\theta)^2) - I_{xx}\ddot{\phi}s\theta - as(2\phi)\ddot{\theta}c\theta + I_{xx} (-\dot{\phi}\dot{\theta}c\theta) - a\dot{\psi} (\dot{\theta}s(2\theta)c^2\phi + \dot{\phi}s(2\phi)c^2\theta) + as(2\phi) (\dot{\theta}^2s\theta) - 2a\dot{\theta}\dot{\phi}c\theta c(2\phi)$$

Al reordenar para obtener la forma estándar de los sistemas mecánicos Greenwood (1997); Hespanha (2009); de Jesus Rubio et al. (2014); B B V L and Singh (2016); Kurak and Hodzic (2018)  $M(q)\ddot{q} = C(\dot{q}, q) + B(q)u$ , donde:  $M(q)$  es la matriz de inercia,  $C(q, \dot{q})$  es la matriz de Coriolis,  $u$  el vector de entradas y  $B(q)$  la matriz de entradas, se consigue a (5) como el modelo estándar del quadrotor.

$$M\ddot{q} = Bu + C \quad (5)$$

Siendo:

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{xx} & 0 & I_{xx}s\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (I_{yy} + as^2\phi) & -as(2\phi)c\theta \\ 0 & 0 & 0 & -I_{xx}s\theta & -as(2\phi)c\theta & (I_{yy} + a(c\phi c\theta)^2) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} R_b^v & 0 \\ 0 & R_b^v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{2 \times 4} \\ I_{4 \times 4} \end{bmatrix}, u = \hat{u}$$

$$C = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, \ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix}$$

Con:

$$c_1 = -I_{xx}\dot{\psi}\dot{\theta}c\theta + \frac{a}{2}s(2\phi) (-\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2c^2\theta) + a\dot{\psi}\dot{\theta}c\theta c(2\phi)$$

$$c_2 = +as(2\phi) (\dot{\theta}\dot{\phi} + 2\dot{\psi}\dot{\theta}s\theta) - 2a\dot{\psi}\dot{\phi}c\theta c(2\phi) + \frac{a}{2}s(2\theta)\dot{\psi}^2c^2\phi + \dot{\psi}\dot{\phi}I_{xx}c\theta$$

$$c_3 = +I_{xx} (-\dot{\phi}\dot{\theta}c\theta) - a\dot{\psi} (\dot{\theta}s(2\theta)c^2\phi + \dot{\phi}s(2\phi)c^2\theta) + as(2\phi) (\dot{\theta}^2s\theta) - 2a\dot{\theta}\dot{\phi}c\theta c(2\phi)$$

## 5. MODELO CON RESTRICCIONES NO HOLÓNOMAS ADICIONALES

Llamamos  $V = (\dot{x}, \dot{y})^T$  al vector velocidad sobre el plano y  $D$  al vector orientación. Debido a que el vector orientación es el eje  $x$  del marco de referencia cuerpo, se puede usar a  $\psi$  como el ángulo del vector orientación, por lo que  $D = [c\psi \ s\psi]^T, D^\perp = [s\psi \ -c\psi]^T$ . Siendo la restricción obtenida de (1):  $\dot{x}s\psi - \dot{y}c\psi = 0$

El movimiento en el eje  $z$  estará restringido mientras se mueve en el plano  $xy$ , por lo que la velocidad en dicho eje será  $\dot{z} = 0$ .

La restricción impuesta cumplen con la propiedad de representarse como  $\sum_{i=1}^n a_{ji}\delta q_i = 0$ , necesaria para introducir las restricciones en las ecuaciones de Lagrange a través de las fuerzas de restricción o fuerzas generalizadas provocadas por las restricciones, permitiendo interactuar con ellas debido a su naturaleza D'andr ea-novel et al. (1995); Greenwood (1997); Fathian et al. (2021); Li et al. (2018). Se puede obtener  $A$  como la matriz de restricciones.

$$A = \begin{bmatrix} s\psi & 0 \\ -c\psi & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} s\psi & -c\psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La ecuaci3n de los sistemas mecánicos con restricciones hol3nomas D'andr ea-novel et al. (1995); Li et al. (2018); Fathian et al. (2021) esta dada por (6)

$$M\ddot{q} = C(q, \dot{q}) + F_r + B(q)u \quad (6)$$

Siendo  $F_r$ , las fuerzas generalizadas provocadas por las restricciones, la forma en que se representan las restricciones no holónomas dentro de la ecuación de los sistemas mecánicos.

Se sabe por el comportamiento de los sistemas no holónomos Greenwood (1997); D'andréa-novel et al. (1995), que la energía generada por las restricciones debe de ser cero  $F_r \dot{q} = 0$ , y gracias a que se puede representar a las restricciones de forma  $A^T \dot{q} = 0$ , podemos partir del hecho de que las constantes de lagrange  $\lambda$  representan las fuerzas generalizadas Greenwood (1997); D'andréa-novel et al. (1995).

$$F_r = A\lambda \quad (7)$$

Esta forma de representar  $F_r$  permite eliminarlo de (6) usando  $S$ , el kernel de  $A$ , sin necesidad de conocer los valores de los multiplicadores de Lagrange ni de  $F_r$ . Así las restricciones quedan expresadas dentro de nuestra ecuación (6) D'andréa-novel et al. (1995).

Siendo entonces  $A^T S = 0 \forall q$ , las restricciones son equivalentes al hecho de que en cada instante  $\dot{q}$  pertenece al espacio generado por las columnas de  $S$ , es decir  $A^T \dot{q} = 0$ .

De suerte que  $\dot{q} \in S$ , por lo que existe un vector  $\gamma$  tal que  $\dot{q} = S\gamma$ , siendo esté último el espacio de estados cinemático del modelo D'andréa-novel et al. (1995). Se calcula  $S$  y  $\gamma$

$$S = \begin{bmatrix} s\psi & 0 & 0 & 0 \\ c\psi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\gamma = [S^T S]^{-1} S^T \dot{q} = P\dot{q} \quad (8)$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} c\psi\dot{x} + \dot{y}s\psi \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

Se llama a  $\gamma_1 = w$  y tenemos que  $w = c\psi\dot{x} + \dot{y}s\psi$ .

## 6. DINÁMICA CON RESTRICCIONES NO HOLÓNOMAS

Se utiliza el modelo sin alteraciones, obtenido en la sección 4 para modificarlo conforme al procedimiento de D'andréa-novel et al. (1995), de esta forma se obtiene de (1) y (7) a (9)

$$M\ddot{q} = C(q, \dot{q}) + A(q)\lambda + B(q)u \quad (9)$$

Se opera a (9) con  $S$  y la derivada de  $\gamma$  de (8) para obtener a (10)

$$\begin{aligned} S^T M \ddot{q} &= S^T C(q, \dot{q}) + S^T A(q)\lambda + S^T B(q)u \\ [S^T M S] \dot{\gamma} &= S^T [-Mr(q, \gamma)r(q, \gamma) + C(q, S\gamma) + B(q)u] \end{aligned} \quad (10)$$

Donde

$$r = \left( \frac{\partial S}{\partial q} I_n \otimes \dot{q} \right) \gamma$$

Se despeja  $\dot{\gamma}$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= [S^T M S]^{-1} S^T [-Mr(q, \gamma)r(q, \gamma) + C(q, S\gamma) + B(q)u] \\ \dot{\gamma} &= [\dot{w} \quad \ddot{\phi} \quad \ddot{\theta} \quad \ddot{\psi}]^T \end{aligned}$$

Y con  $\dot{\gamma}$ , se obtiene la dinámica completa dada por el vector de estados  $(\gamma, \dot{\gamma})^T$ .

## 7. GENERACIÓN DE TRAYECTORIA USANDO UN CONTROL TWISTING

Para controlar nuestra posición en el plano  $xy$ , se tiene solo una entrada de control  $f$ , por lo que el sistema es subactuado. En consecuencia se hará un cambio de coordenadas de rectangulares a polares para controlar la norma con  $f$ . Mientras que para el diseño de la superficie de control de los ángulos, estará regido por el ángulo deseado  $\psi_d$ , el cual esta en función del vector que indica la dirección a la que queremos llegar. Se tiene entonces la posición deseada dada por  $x_d, y_d$ , mientras que la orientación deseada por  $\phi_d, \theta_d, \psi_d$ .

Para lograr el objetivo se usaran los vectores de posición de la ubicación actual  $\vec{r}$  y la ubicación deseada  $\vec{r}_d$ , restando ambos obtenemos el vector de dirección, con el cual obtendremos la orientación deseada  $\psi_d$ , figura 3, siendo esta

$$\psi_d = \arctg\left(\frac{y - y_d}{x - x_d}\right)$$

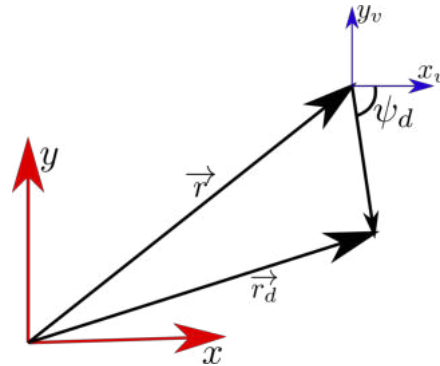


Figura 3. Vectores de posición actual y deseada formando el vector de dirección.

Para  $\theta_d$  se usara un ángulo pequeño, igual a  $\pi/12$ , y para mantener la proyección de  $f$  sobre el plano  $xy$  se hace que  $\phi_d = 0$ . Por lo que el vector de superficie de control  $\sigma_a$ , estará dado por la diferencia entre la orientación actual y la deseada.

$$\sigma_a = \begin{bmatrix} \phi - \phi_d \\ \theta - \theta_d \\ \psi - \psi_d \end{bmatrix}$$

Para poder usar una superficie de control que sirva para alcanzar  $x_d$  y  $y_d$ , la posición, se tomarán las normas de los vectores de posición actual y deseada.

Si bien, con la norma se obtiene una circunferencia en donde la distancia se cumple, al tener definida la dirección con la obtención de  $\psi_d$ , se puede llegar al punto deseado de manera exacta.

Se describe entonces la superficie de deslizamiento como la resta entre la norma cuadrada del vector posición actual  $\rho$  y la norma cuadrada del vector posición deseada  $\rho_d$ , precisadas como  $\rho = x^2 + y^2$ ,  $\rho_d = x_d^2 + y_d^2$ . Entonces se define la superficie de control como

$$\sigma = \rho - \rho_d$$

El grado relativo de las superficies de control se obtiene al derivarlas sucesivamente hasta la aparición de las entradas de control Shtessel (2014); Kurak and Hodzic (2018); Praveen et al. (2016); Hehn and D'Andrea (2011). Siendo entonces de grado relativo igual a dos, pues es en la segunda derivada de  $\sigma_a$  y  $\sigma$  donde aparecen las entradas de control ( $\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi$ ) y  $f$ . Se pueden organizar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\ddot{\sigma} &= H(\gamma, q) + G(\gamma, q) f \\ \ddot{\sigma}_a &= H(\gamma, q) + G(\gamma, q) \tau\end{aligned}$$

para obtener el control se usa la función signo  $sign(\cdot)$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\tau &= \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = G^{-1}(\phi, \theta, \psi) u_\sigma \\ u_\sigma &= R_{1a} sign(\sigma_a) + R_{2a} sign(\dot{\sigma}_a) \\ f &= -r_1 sign(\sigma) - r_2 sign(\dot{\sigma})\end{aligned}$$

Con  $G^{-1}(\phi, \theta, \psi)$  una matriz auxiliar para desacoplar las entradas de control de los ángulos ( $\phi, \theta, \psi$ ). De esta forma según Shtessel (2014) se asegura la convergencia de las superficies de control.

## 8. SIMULACIONES

Las simulaciones de los algoritmos que se han descrito en los capítulos anteriores se programaron en Matlab con las siguientes constantes: El vector de condiciones iniciales esta dado por  $X$

$$X = \left[ 2 \ 7 \ 5 \ 0 \ \frac{\pi}{4} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T$$

Para las constantes de los controles se encontró que la configuración mostrada a continuación es funcional.

$$R_{1a} = \begin{bmatrix} 800 & 0 & 0 \\ 0 & 800 & 0 \\ 0 & 0 & 800 \end{bmatrix}, R_{2a} = \begin{bmatrix} 400 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 0 \\ 0 & 0 & 550 \end{bmatrix}$$

$$r_1 = 100, r_2 = 20$$

Los valores deseados serán

$$x_d = 8, y_d = -7, \phi_d = 0, \theta_d = \frac{\pi}{12}$$

$$\psi_d = arctg\left(\frac{y_0 - y_d}{x_0 - x_d}\right) = arctg\left(\frac{7+7}{2-8}\right) \approx -1.659rad$$

A continuación se presentan las gráficas de las simulaciones, empezando el análisis por la gráfica de los ángulos  $\phi, \theta, \psi$ , seguido de la gráfica de posición  $x, y, z$ .

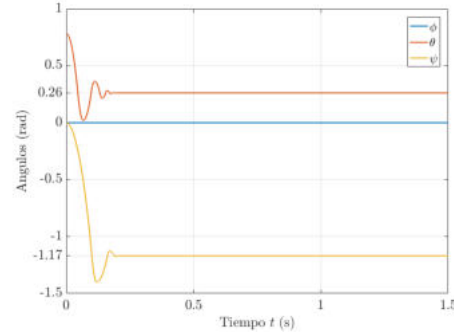


Figura 4. Gráfica de los ángulos  $\phi, \theta, \psi$

En la gráfica, de la figura 4 podemos observar que el tiempo de convergencia es bajo. También observamos que una vez ha llegado al objetivo, se mantienen dentro del mismo, lo que se puede corroborar al ver las gráficas de las entradas de control de Torque  $\tau$ , figura 5, que muestran una conmutación constante y se mantiene de ese modo a lo largo del tiempo de simulación.

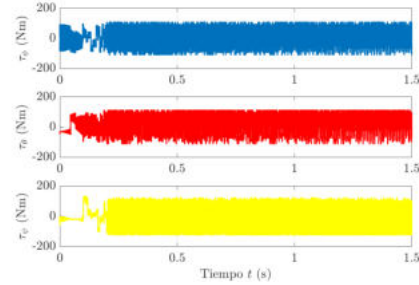


Figura 5. Gráfica de entradas de control  $\tau$ .

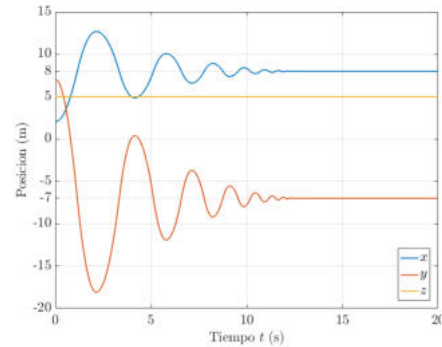


Figura 6. Gráfica de posición  $x, y, z$ .

La gráfica de la posición que se muestra en la figura 6. Podemos observar que el tiempo de convergencia es

mucho mayor comparado con el de los ángulos, esto se puede considerar aceptable debido a la distancia recorrida. Recordemos que solo se le tiene permitido al quadrotor ir hacia adelante con una velocidad fija, lo que hace que se acerque al punto oscilando. Sin embargo una vez que logra alcanzar el objetivo, permanece en su posición.

También podemos ver, en la grafica de la entrada de control  $f$ , figura 7, la confirmación de la permanencia en la posición, gracias a que el control permanece activo durante todo el tiempo de simulación como lo muestra la etapa de conmutación típica del control de modos deslizante Twisting sin atenuación de chattering.

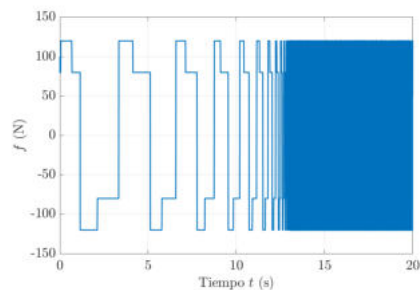


Figura 7. Gráfica de entrada de control  $f$ .

## 9. CONCLUSIONES

El trabajo presentado refleja que es posible implementar restricciones no holónomas desde el modelo, asegurándonos que no vamos a tener movimientos no deseados en el vehículo, lo que permite concentrarnos en aprovechar las bondades de diferentes tipos de control para desempeñar diversas funciones sin tener que preocuparnos en el comportamiento del vehículo. Como trabajos posteriores se sugiere implementar distintos tipos de control, así como el desarrollo de alguna aplicación en un vehículo, para analizar el comportamiento de estas restricciones en el modelo y no el control.

## REFERENCIAS

- B B V L, D. and Singh, P. (2016). A survey on design and development of an unmanned aerial vehicle (quadcopter). *International Journal of Intelligent Unmanned Systems*, 4(2), 70–106.
- Beard, R. (2008). Quadrotor dynamics and control rev 0.1. Technical report.
- Bemporad, A., Pascucci, C., and Rocchi, C. (2009). Hierarchical and hybrid model predictive control of quadcopter air vehicles. *IFAC Proceedings Volumes*, 42(17), 14–19. 3rd IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems.
- Castillo, P., Dzul, A., and Lozano, R. (2004). Real-time stabilization and tracking of a four-rotor mini rotorcraft. *IEEE Transactions on control systems technology*, 12(4), 510–516.
- D’andréa-novel, B., Campion, G., and Bastin, G. (1995). Control of wheeled mobile robots not satisfying ideal velocity constraints: A singular perturbation approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 5(4), 243–267.
- de Jesus Rubio, J., Humberto Perez Cruz, J., Zamudio, Z., and J. Salinas, A. (2014). Comparison of two quadrotor dynamic models. *IEEE Latin America Transactions*, 12(4), 531–537.
- Fathian, K., Safaoui, S., Summers, T.H., and Gans, N.R. (2021). Robust distributed planar formation control for higher order holonomic and nonholonomic agents. *IEEE Transactions on Robotics*, 37(1), 185–205.
- Greenwood, D.T. (1997). *Classical Dynamics*. Dover Publications.
- Hehn, M. and D’Andrea, R. (2011). Quadcopter trajectory generation and control. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1), 1485–1491.
- Hespanha, J.o.P. (2009). *Linear systems theory*. Princeton University Press.
- Kurak, S. and Hodzic, M. (2018). Control and estimation of a quadcopter dynamical model. *Periodicals of Engineering and Natural Sciences (PEN)*, 6(1), 63.
- Li, L., Liu, Y.H., Jiang, T., Wang, K., and Fang, M. (2018). Adaptive trajectory tracking of nonholonomic mobile robots using vision-based position and velocity estimation. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 48(2), 571–582. doi:10.1109/TCYB.2016.2646719.
- Meyer, J., Sendobry, A., Kohlbrecher, S., Klingauf, U., and Stryk, O.v. (2012). Comprehensive simulation of quadrotor uavs using ros and gazebo. In *International conference on simulation, modeling, and programming for autonomous robots*, 400–411. Springer.
- Nagaty, A., Saeedi, S., Thibault, C., Seto, M., and Li, H. (2013). Control and navigation framework for quadrotor helicopters. *Journal of intelligent & robotic systems*, 70(1), 1–12.
- Pestana, J., Sanchez-Lopez, J.L., De La Puente, P., Carrio, A., and Campoy, P. (2016). A vision-based quadrotor multi-robot solution for the indoor autonomy challenge of the 2013 international micro air vehicle competition. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 84(1), 601–620.
- Praveen, V., Pillai, S., et al. (2016). Modeling and simulation of quadcopter using pid controller. *International Journal of Control Theory and Applications*, 9(15), 7151–7158.
- Shtessel, Y. (2014). *Second-Order Sliding Mode Controllers and Differentiators*. In: *Sliding Mode Control and Observation*. Birkhauser.
- Wu, M., Cheng, Z., Yang, L., and Xu, L. (2017). Design of quadrotor unmanned aerial vehicle. In *International Conference on Intelligent Robotics and Applications*, 25–34. Springer.