

Gain calculation of 0-degree homogeneous controllers

Matias Iglesias-Rios* Jaime A. Moreno** Leonid Fridman*

* Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, C.U.,
04510, México CDMX, e-mail: matias.iglesias.rios@gmail.com,
leonfrid54@hotmail.com

** Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, C.U.,
04510, México CDMX, e-mail: JMorenoP@ii.unam.mx

Abstract: This paper presents sets of gains for the nested discontinuous controller family. The methodology for obtaining gains is based on a control Lyapunov function, this function determines the conditions for the value of each of the controller gains, the last gain being the one that is directly related to the boundaries of the disturbances and uncertainties. In this way the algorithm for obtaining gains can be summarized in three steps. The first step concerns about establishing the value of the weight vector, the degrees of homogeneity of the r-homogeneous functions that make up the proposed Lyapunov function. The second step consists of establishing the value of the first gain, which, for second and higher order controllers, is sufficient for it to be real positive. The third step is to determine the maximum value of an objective function. Moreover, it allows us to obtain the lower bound of the set of values for the gain that stabilize the system. The results show that the set of gains obtained stabilize the closed-loop system.

Palabras clave: HOSMC, Obtención de ganancias, SMC, Controlador discontinuo anidado.

1. INTRODUCCIÓN

El control por modos deslizantes (SMC, por sus siglas en inglés) es una técnica de control robusto que nos permite lidiar con incertidumbres acotadas, así como perturbaciones externas (Cruz-Zavala and Moreno, 2017) (Utkin, 1991).

El controlador clásico de primer orden por modos deslizantes requiere de una salida tal que el sistema sea de grado relativo uno. La metodología de diseño del controlador clásico se puede describir en dos pasos; el primer paso consiste en diseñar una superficie de deslizamiento de primer orden, que reduce la dinámica en un grado. Como segundo paso se diseña una ley de control que lleva las trayectorias del sistema a la superficie de deslizamiento. Este controlador tiene la limitación de que la salida a controlar debe ser de grado relativo uno, así como la desventaja de la aparición del fenómeno de *chattering*.

La historia y evolución del SMC se puede dividir en cinco generaciones (Fridman et al., 2015). La primera generación corresponde al control clásico de primer orden mencionado anteriormente, la principal desventaja de este controlador es el fenómeno llamado *chattering*, el cual consiste en vibraciones de alta frecuencia. Este fenómeno es causado principalmente por dinámicas parásitas no modeladas que incrementan el grado relativo del sistema, por lo que es necesario no solo llevar a cero la variable de deslizamiento, si no también su derivada. Así es como se introducen los SMC de segundo orden.

Algunos algoritmos de segundo orden son el *Twisting*, el subóptimo y el terminal (Emelyanov, 1986) (Bartolini et al., 1998) (Feng et al., 2002). Las ventajas que ofrecen

los SMC de segundo orden son la mejora en la precisión cuadrática de la convergencia de la variable de deslizamiento, la reducción del orden de la dinámica en dos; sin embargo para sistemas con grado relativo dos las leyes de control obtenidas son discontinuas, además de no reducir significativamente el *chattering*. La tercera generación es el algoritmo de control *Super-Twisting* (Levant, 1993), que nos proporciona una ley de control continua para sistemas Lipschitz de grado relativo uno.

Por otro lado, la cuarta y quinta generación se denomina de control por modos deslizantes de alto orden (HOSMC, por sus siglas en inglés) nos permite utilizar una variable de deslizamiento de grado relativo arbitrario (Levant, 2003), esto nos permite obtener leyes de control suaves y continuas para el caso de la quinta generación, sin comprometer la robustez del sistema ante la presencia de perturbaciones suaves y acotadas (Fridman et al., 2015). A pesar de romper la limitación del grado relativo así como aliviar el fenómeno de *chattering* mediante la obtención de leyes de control suaves y continuas, la dificultad para obtener las condiciones de estabilidad así como el calculo de ganancias que aseguren la estabilidad del sistema incrementa bastante, por lo que es de suma importancia el desarrollo de algoritmos que brinden mas opciones a la hora de la selección de ganancias de este tipo de controladores.

En los trabajos (Pérez-Ventura and Fridman, 2019) (Pérez Ventura et al., 2021) se proponen ganancias para el STA y controlador PID-Like respectivamente, con la finalidad de minimizar la amplitud del *chattering* provocado por dinámicas parásitas en estado permanente, utilizando métodos basados en frecuencia. La metodo-

logía para la obtención de ganancias en empleada en este trabajo es utilizar una función de Lyapunov de control (CLF, por sus siglas en inglés) para HOSMC, en particular para controladores homogéneos (Rosier, 1992) (Bacciotti and Rosier, 2005). En este trabajo se pretende utilizar la función de Lyapunov de control propuesta en (Cruz-Zavala and Moreno, 2017). Ya que además de proporcionar una función de Lyapunov para dos familias de controladores, también caracteriza las ganancias del controlador. De esta manera se pretende obtener juegos de ganancias para el algoritmo de control discontinuo anidado.

2. PRELIMINARES

La función $sign(x)$ esta definida a trazos de la siguiente forma:

$$sign(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

donde podemos apreciar que no esta definida en el origen, por lo que

$$sign(0) \in [-1, 1] \quad (2)$$

Para facilitar la escritura y lectura de lo HOSMC se utiliza la notación de los corchetes signado:

$$[x]^m = |x|^m sign(x); \text{ con, } [x]^0 = sign(x) \quad (3)$$

2.1 Homogeneidad ponderada

La homogeneidad es una propiedad de invarianza que posee un objeto con respecto a una clase de transformaciones llamadas dilataciones. (Bacciotti and Rosier, 2005), (Bernuau et al., 2014). Dado un vector $x = [x_1, \dots, x_n]^T$ y el operador de dilatación definido como:

$$\Delta_\varepsilon^r x := (\varepsilon^{r_1} x_1, \dots, \varepsilon^{r_n} x_n), \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (4)$$

donde $r_i > 0$ son los pesos de las coordenadas y $r = [r_1, \dots, r_n]$ es el vector de pesos.

Una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada r-homogénea de grado $m \in \mathbb{R}$ si la identidad 5 se cumple

$$V(\Delta_\varepsilon^r x) = \varepsilon^m V(x) \quad (5)$$

3. PROBLEMA DE CONTROL POR HOSM

El problema estándar de control por HOSM consiste en diseñar un controlador para el sistema con una entrada-una salida (SISO, por sus siglas en inglés) afín a la entrada Σ_G .

$$\Sigma_G : \begin{cases} \dot{z}_i = z_{i+1}, & i = 1, \dots, \rho - 1 \\ \dot{z}_\rho = f(t, z) + g(t, z)u \end{cases} \quad (6)$$

donde $|f(t, z)| \leq C$ y $0 < k_m \leq g(t, z) \leq k_M$. El controlador debe llevar el estado al origen en un tiempo finito $t \geq T$.

Cuando el grado relativo es conocido y bien definido equivale a diseñar un controlador para la siguiente DI Σ_{ID} .

$$\Sigma_{ID} : \begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, & i = 1, \dots, \rho - 1 \\ \dot{x}_\rho \in [-C, C] + [K_m, K_M]u, \end{cases} \quad (7)$$

El sistema en su forma matricial se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\dot{x} \in F(x) + g(x)\xi(x)u \quad (8)$$

4. FUNCIÓN DE LYAPUNOV DE CONTROL

Una función de Lyapunov de control (CLF, por sus siglas en inglés) se puede considerar una generalización de las funciones de Lyapunov; sin embargo, las CLF toman en cuenta la ley de control, por lo que se podría entender como una función de Lyapunov para el sistema en lazo cerrado (Sontag, 1989).

La condición para que exista una CLF $V(x)$ C^1 r-homogénea para el sistema anterior Σ_G , es la siguiente:

$$L_{g(x)}V = 0 \Rightarrow \sup_{v \in F(x)} L_v V < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n / \{0\}$$

4.1 CLF para HOSMC

En (Cruz-Zavala and Moreno, 2017) se presenta una CLF para dos familias de controladores discontinuo anidado y cuasicontinuos. Para ello definiremos lo siguiente, sea el número entero $\rho \geq 0$, así como $i = 1, \dots, \rho$ se define el vector $\bar{x}_i = [x_1, \dots, x_\rho]^T$. Además se define la siguiente secuencia decreciente positiva de números reales, donde $r_i = r_1 - (i - 1)$ para algún $r = r_1 \geq \rho$, así como la sucesión de números no decrecientes α_i , donde $\alpha_\rho \geq \alpha_{\rho-1} \geq \dots \geq \alpha_1 \geq r_1$. Un valor constante $m \geq r_i + \alpha_{i-1}$. Se definen también los pesos de las coordenadas como:

$$r = [r_1, \dots, r_\rho] = [r, r - 1, \dots, r_{\rho+1} - \rho] \quad (9)$$

Con lo anterior definimos la CLF recursiva, así como las funciones C^1 r-homogéneas, donde para $i = 2, \dots, \rho$,

$$V_i(\bar{x}_i) = \gamma_{i-1} V_{i-1}(\bar{x}_{i-1}) + W_i(\bar{x}_i) \quad (10)$$

$$W_i(\bar{x}_i) = \frac{r_i}{m} |x_i|^{\frac{m}{r_i}} - [v_{i-1}]^{\frac{m-r_i}{r_i}} x_i + (1 - \frac{r_i}{m}) |v_{i-1}|^{\frac{r_i}{m}} \quad (11)$$

$$v_i(\bar{x}_i) = -k_i [\sigma_i]^{\frac{r_i+1}{\alpha_i}} \quad (12)$$

$$\sigma_i(\bar{x}_i) = [x_i]^{\frac{\alpha_i}{r_i}} + k_{i-1}^{\frac{\alpha_i}{r_i}} [\sigma_{i-1}]^{\frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}}} \quad (13)$$

para el caso donde $i = 1$ las funciones quedan como:

$$V_1(x_1) = \frac{r}{m} |x_1|^{\frac{m}{r}} \quad (14)$$

$$v_1(x_1) = -k_1 [\sigma_1]^{\frac{r_2}{\alpha_1}} = -k_1 [x_1]^{\frac{r_2}{r_1}} \quad (15)$$

$$\sigma_1 = [x_1]^{\frac{\alpha_1}{r_1}} \quad (16)$$

donde $\gamma_i > 0$, $k_i > 0$. σ_i es homogénea de grado α_i , v_i de grado r_{i+1} y V_i de grado m .

5. CONTROLADORES HOMOGÉNEOS DE GRADO CERO

Teorema: (Cruz-Zavala and Moreno, 2017) Si para el sistema existe una CLF, y que $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es r-homogénea de grado 0, tal que:

$$\varphi(x) L_{g(x)} V(x) > 0 \text{ cuando } L_{g(x)} V(x) \neq 0 \quad (17)$$

Entonces tenemos la ley de control $u = -k\varphi$, en particular las siguientes dos familias de controladores:

$$u_1 = -k\varphi_1(x) = -k[L_{g(x)}V(x)]^0 \quad (18)$$

$$u_2 = -k\varphi_2(x) = -k \frac{L_{g(x)}V(x)}{M(x)} \quad (19)$$

donde $M(x)$ es r -homogénea de grado $m+l$. EL sistema en lazo cerrado es GAS en $x=0 \forall k \geq k^* > 0$, y es GFTS si $l < 0$.

Corolario: Si fijamos $r = \rho$, entonces para cualquier $\rho \geq 2$ tenemos la familia de controladores discontinuos anidados y cuasi-continuos con la siguiente forma:

$$u_D = -k_\rho [\sigma_\rho(x)]^0, \quad u_Q = -k_\rho \frac{\sigma_\rho(x)}{M(x)}$$

5.1 Control discontinuo anidado

Los controladores discontinuos anidados de segundo y tercer de acuerdo a la version presentada en (Cruz-Zavala and Moreno, 2017) son:

$$u_{2D} = -k_2 \left[[x_2]^{\alpha_2} + k_1^{\alpha_2} [x_1]^{\frac{\alpha_2}{2}} \right]^0 \quad (20)$$

$$u_{3D} = -k_3 \left[[x_3]^{\alpha_3} + k_2^{\alpha_3} \left[[x_2]^{\frac{\alpha_2}{2}} + k_1^{\frac{\alpha_2}{2}} [x_1]^{\frac{\alpha_2}{3}} \right]^{\frac{\alpha_3}{\alpha_2}} \right]^0 \quad (21)$$

6. GANANCIAS DEL CONTROLADOR

El numero de ganancias del controlador coincide con el orden del sistema. Para determinar las primeras $\rho - 1$ ganancias del controlador. Se debe satisfacer la siguiente condición:

$$\frac{\partial V_\rho}{\partial \bar{x}_\rho} g(x) = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V_\rho}{\partial \bar{x}_\rho} F(x) < 0 \quad (22)$$

Lo cual se cumple cuando:

$$\Phi_i(\bar{x}_i) - k_i s_{i,d} [\sigma_i]^{\frac{r_i+1}{\alpha_i}} < 0 \quad (23)$$

De la condición anterior determinamos la cota mínima para $k_i, i = 2, \dots, \rho - 1$, con $k_1 > 0$

$$k_i > \max_{\bar{x}_i \in S_i} \left\{ \frac{\Phi_i(\bar{x}_i)}{s_{i,d} [\sigma_i(\bar{x}_i)]^{\frac{r_i+1}{\alpha_i}}} \right\} := \max_{\bar{x}_i \in S_i} \{f_i(k_{i-1})\} \quad (24)$$

donde $S_i = \bar{x}_i \in \mathbb{R}^i : \|\bar{x}_i\|_{r,\rho} = 1$ es la esfera unitaria, $\Phi_i(\bar{x}_i) = \sum_{j=1}^{i-1} x_{j+1} \frac{\partial V_i}{\partial \bar{x}_i}$ y $s_{i,d} = [x_i]^{\frac{m-r_i}{r_i}} - [v_{i-1}]^{\frac{m-r_i}{r_i}}$, es una función de desingularización.

Para calcular la ultima ganancias k_ρ , primero se obtiene la derivada de la CLF a lo largo de las trayectorias del sistema, esta condición de igual manera nos da el limite inferior del conjunto de valores que hacen que sea definida negativa.

$$\dot{V} \leq \max L_{F(x)} V(x) - k \xi(x) L_{g(x)} V(x) \varphi(x) \quad (25)$$

$$\dot{V} \leq \max \left\{ \sum_{j=1}^{\rho-1} x_{j+1} \partial_{x_j} V_\rho \right\} + C |s_{\rho,d}(x)| - k_\rho K_m s_{\rho,d} \frac{s_{\rho,d}(x)}{|s_{\rho,d}(x)|} \quad (26)$$

$$k_\rho > \frac{1}{K_m} \left(\max_{x \in S_\rho} \left\{ \frac{\sum_{j=1}^{\rho-1} x_{j+1} \partial_{x_j} V_\rho}{|s_{\rho,d}(x)|} \right\} + C \right) \quad (27)$$

6.1 Algoritmo para determinar juegos de ganancias

Para sistemas de segundo orden en adelante, el algoritmo para la obtención de juegos de ganancias se puede determinar en los siguientes tres pasos:

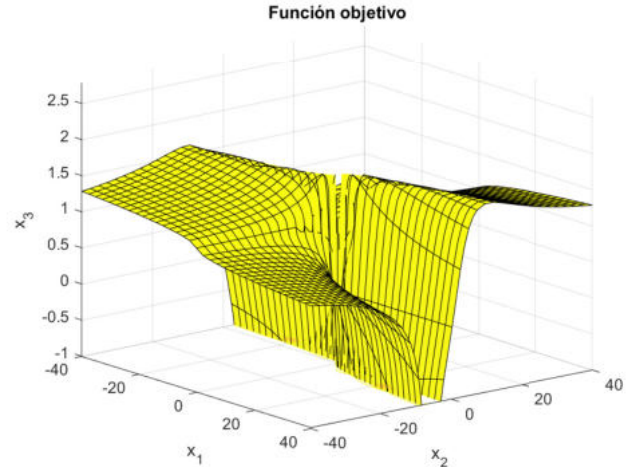


Figura 1. Función objetivo $f_2(\bar{x}_2)$.

1. Como primer paso se determinan el vector pesos, así como los grados de homogeneidad.
2. Posteriormente se determina el valor de la primer ganancia $k_1 > 0$.
3. Los siguientes pasos son iterativos, empezando por k_2 hasta k_ρ .
 - a) Se determina la función objetivo a obtener el máximo $f_i(\bar{x}_i)$.
 - b) Se determina el valor máximo de la función objetivo $\max(f_i(\bar{x}_i))$
 - c) Finalmente se fija un valor para la k_i ganancia, a lo largo de este trabajo este valor queda determinado como $k_i = 1.1 \bar{k}_i$.

El tercer paso es iterativo ya que el valor de la ganancia depende del valor de las ganancias anteriores. Para el caso de la última ganancia, además se toman en cuenta las cotas de las perturbaciones por lo que al final la fijamos como $k_\rho = \frac{1}{k_m} (1.1 \bar{k}_\rho + C)$. Debido a que incluir las cotas de las perturbaciones consiste en una suma y multiplicación, es muy sencillo cambiar o ajustar la ultima ganancia para compensar diversas perturbaciones.

6.2 Optimización sin restricciones

Para determinar el valor de las ganancias es necesario determinar el valor maximo de un función objetivo $f_i(\bar{x}_i)$ Para k_i , donde $i = 2 \dots \rho - 1$, la función objetivo es

$$f_i(\bar{x}_i) = \frac{\Phi_i(\bar{x}_i)}{s_{i,d} [\sigma_i(\bar{x}_i)]^{\frac{r_i+1}{\alpha_i}}}, \quad (28)$$

Para k_ρ , la función objetivo a determinar el valor máximo tiene la siguiente forma

$$f_\rho(\bar{x}_\rho) = \frac{\sum_{j=1}^{\rho-1} \partial_{x_j} V_\rho}{|s_{\rho,d}(x)|}, \quad (29)$$

Ambas funciones objetivo tienen las siguientes características:

1. Función racional.
2. Los puntos donde el denominador es cero, la función tiende a menos infinito.
3. Es homogénea de grado cero, por lo que podemos buscar el valor máximo en la esfera unitaria.

Para determinar el valor máximo igualaremos el gradiente de la función objetivo al vector nulo y resolveremos el sistema de ecuaciones resultante. Buscar en la esfera unitaria nos reduce en uno la dimension del sistema de ecuaciones.

Para el caso de las primeras $\rho - 1$ ganancias tenemos:

$$\left[\frac{\partial f_i(\bar{x}_i, \bar{k}_{i-1})}{\partial x_1}, \frac{\partial f_i(\bar{x}_i, \bar{k}_{i-1})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_i(\bar{x}_i, \bar{k}_{i-1})}{\partial x_{\rho-1}}, \frac{\partial f_i(\bar{x}_i, \bar{k}_{i-1})}{\partial x_\rho} \right] = \emptyset \quad (30)$$

Entonces para $i = 2, \dots, \rho - 1$, donde $j = 1, \dots, i$, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial f_i(\bar{x}_i)}{\partial x_j} = s_{id}[\sigma_i]^{\frac{r_{i+1}}{\alpha_i}} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} - \phi_i \frac{\partial s_{id}[\sigma_i]^{\frac{r_{i+1}}{\alpha_i}}}{\partial x_i} = 0 \quad (31)$$

En el caso de la última ganancia k_ρ tenemos:

$$\left[\frac{\partial f_\rho(\bar{x}_\rho)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_\rho(\bar{x}_\rho)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_\rho(\bar{x}_\rho)}{\partial x_{\rho-1}}, \frac{\partial f_\rho(\bar{x}_\rho)}{\partial x_\rho} \right] = \emptyset \quad (32)$$

Obteniendo así el sistema de ecuaciones a resolver, donde para $j = 1, \dots, \rho$

$$\frac{\partial f_\rho(\bar{x}_\rho, \bar{k}_{\rho-1})}{\partial x_j} = \frac{\partial \phi_\rho}{\partial x_j} - \frac{\phi_\rho}{s_{pd}} \frac{\partial s_{pd}}{\partial x_j} \quad (33)$$

7. CONTROLADOR DE SEGUNDO ORDEN

Para el caso de sistemas de segundo orden SISO afines a la entrada. El problema de diseño del controlador es equivalente a diseñarlo para la DI 34, debido a que la salida $\sigma = x_1$ hace que sea de grado relativo $\rho = 2$.

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (34a)$$

$$\dot{x}_2 \in [-C, C] + [K_m, K_M]u \quad (34b)$$

Siguiendo los pasos del algoritmo, como primer paso fijamos los pesos y grados de homogeneidad $m = 3$, $r = [2, 1]$, $\alpha = [2, 3]$ y $\gamma_1 = 1$. Como segundo paso fijamos el valor de la primera ganancia $k_1 = 1$. El tercer paso en este caso no es iterativo, ya que la ganancia k_2 es la última. La función objetivo a obtener el máximo es la siguiente y en la Figura 1 podemos observar la grafica de la función:

$$f_2(\bar{x}_2) = \frac{\phi_2}{|s_{2d}|} = \frac{2x_2|x_1|^{\frac{1}{2}} + x_2^2}{|[x_2]^2 + x_1|} \quad (35)$$

Para encontrar el valor máximo de la función igualamos el gradiente al vector nulo $\nabla f_2(\bar{x}_2) = 0$, en la Figura 2 podemos observar el gradiente y el círculo unitario, la intersección entre la curva roja y el círculo unitario son puntos donde la función objetivo tiende a menos infinito. Por otro lado la intersección de la curva azul y el círculo unitario resulta en los puntos donde la alcanza su valor máximo.

$$f_2(0.3454, \sqrt{1 - x_1^2}) = 1.618, \quad (36)$$

$$f_2(-0.3454, -\sqrt{1 - x_1^2}) = 1.618 \quad (37)$$

$$\max_{\bar{x}_2 \in S_2} \{f_2(\bar{x}_2, k_1)\} = 1.618 \quad (38)$$

Este valor máximo representa la cota mínima del conjunto de valores que estabilizan el sistema; sin embargo la condición es que la ganancia sea mayor a este valor, en este trabajo se propone que sea diez por ciento mayor a la cota mínima de manera arbitraria puesto que no es un

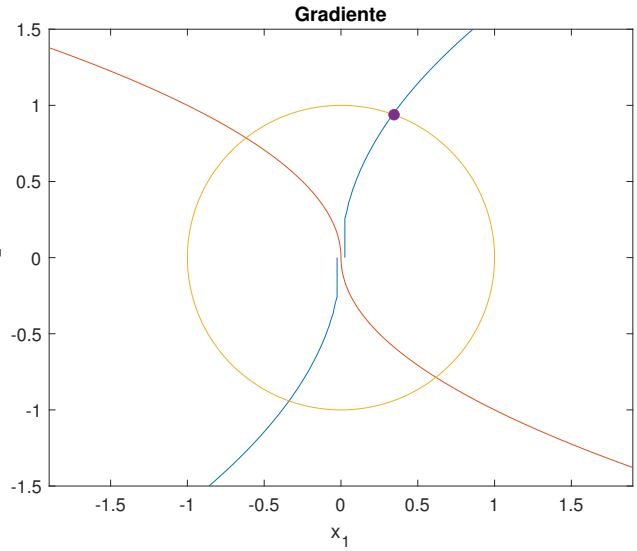


Figura 2. Gradiente de la función objetivo y círculo unitario.

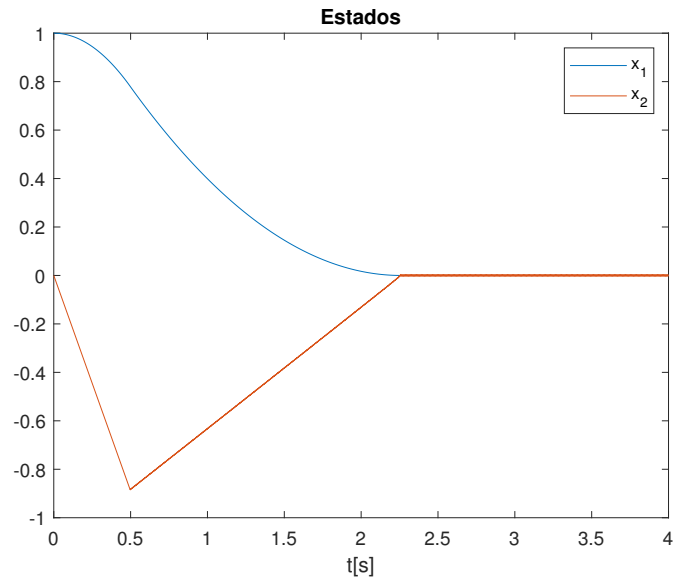


Figura 3. Controlador de segundo orden con $k_1 = 1$, $k_2 = 1.7798$, $m = 3$, $r = [2, 1]$, $\alpha = [2, 3]$ y $\tau = 1e-3$.

criterio de sintonización ya que no pretende mejorar el desempeño sino simplemente cumplir con la condición 0.

Finalmente agregamos las cotas de las perturbaciones e incertidumbres de acuerdo a la siguiente condición.

Fijamos $k_2 = \frac{1}{K_m} (1.1\hat{k}_2) = 1.7798$, con $C = 0$ y $K_m = 1$

En la Figura 3 podemos observar la simulación del sistema en lazo cerrado, cuyas condiciones iniciales es $x(0) = [1, 0]$, con tiempo de muestreo $\tau = 1e-3$, donde es evidente la convergencia del estado al origen. En la Tabla 1 tenemos juegos de ganancias variando el grado de homogeneidad de la función de Lyapunov resultando en el crecimiento del valor de la segunda ganancia y con ello en el aumento de *chattering*.

Ganancias para controlador de segundo orden		
Pesos y grados de homogeneidad	k_1	k_2
$m = 3, r = [2, 1]$ y $\alpha = [2, 3]$	1	1.7798
	2	5.5114
$m = 5, r = [2, 1]$ y $\alpha = [2, 3]$	1	2.8874
$m = 7, r = [2, 1]$ y $\alpha = [2, 3]$	1	4.4686
$m = 9, r = [2, 1]$ y $\alpha = [2, 3]$	1	6.2015
$m = 11, r = [2, 1]$ y $\alpha = [2, 3]$	1	8.0237

Tabla 1. Tabla de ganancias para controlador de segundo orden, donde $C = 0$ y $K_m = 1$

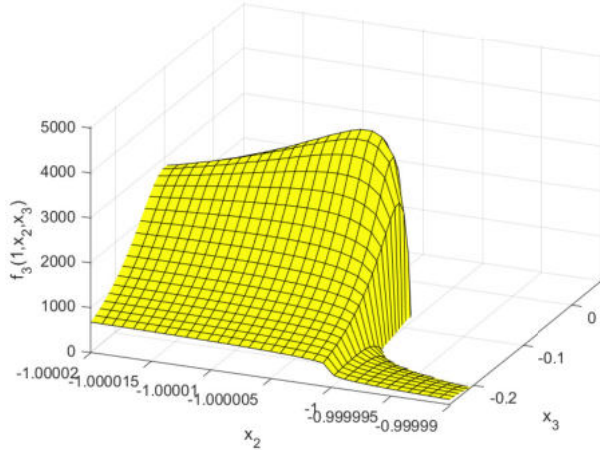


Figura 4. Función objetivo $f_3(1, x_2, x_3)$.

8. CONTROLADOR DE TERCER ORDEN

Para el caso de sistemas de tercer orden SISO afines a la entrada. El problema de diseño del controlador es equivalente a diseñarlo para la DI 39, debido a que la salida $\sigma = x_1$ hace que sea de grado relativo $\rho = 3$.

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (39a)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 \quad (39b)$$

$$\dot{x}_3 \in [-C, C] + [K_m, K_M]u \quad (39c)$$

Para este caso la función de Lyapunov tiene la siguiente forma:

$$V_3 = \gamma_2 \left(\gamma_1 \frac{r_1}{m} |x_1|^{\frac{m}{r_1}} + \frac{r_2}{m} |x_2|^{\frac{m}{r_2}} - [v_1]^{\frac{m-r_2}{r_2}} x_2 + \left(1 - \frac{r_2}{m}\right) |v_1|^{\frac{m}{r_2}} \right) + \frac{r_3}{m} |x_3|^{\frac{m}{r_3}} - [v_2]^{\frac{m-r_3}{r_3}} x_2 + \left(1 - \frac{r_3}{m}\right) |v_2|^{\frac{m}{r_3}}$$

Siguiendo los pasos del algoritmo, como primer paso fijamos los pesos y grados de homogeneidad $m = 5$, $r = [3, 2, 1]$, $\alpha = [3, 4, 5]$, $\gamma = [1, 1]$. Como segundo paso fijamos el valor de la primera ganancia $k_1 = 1$. Para este caso el tercer paso se realiza dos veces uno para determinar la segunda ganancia y para determinar la tercera ganancia. Para la ganancia k_2 la función objetivo tiene la siguiente forma:

$$f_2(\bar{x}_2) = \frac{\phi_2}{s_{2d} [\sigma_2]^{\frac{1}{4}}} = \frac{2x_2 [x_1]^{\frac{2}{3}} + x_2^2}{\left([x_2]^{\frac{3}{2}} + x_1 \right) \left[[x_2]^2 + [x_1]^{\frac{4}{3}} \right]^{\frac{1}{4}}}, \quad (40)$$

De igual manera que para el controlador anterior para encontrar el valor máximo de la función igualamos el gradiente al vector nulo $\nabla f_2(\bar{x}_2) = 0$, en busca de los

puntos críticos, de los cuales al evaluar en la función objetivo determinamos el valor máximo.

$$\max_{\bar{x}_2 \in S_2} \{f_2(\bar{x}_2, k_1)\} = 1.3976 \quad (41)$$

Para determinar el valor de la tercera y última ganancia tenemos que fijar el valor de la segunda ganancia de la siguiente manera:

$$k_2 = 1.1 \hat{k}_2 = 1.5373 \quad (42)$$

Para la tercera ganancia la función objetivo tiene la siguiente forma, la cual depende de x_1, x_2, x_3 así como de los valores de k_1 y k_2

$$f_3(\bar{x}_3) = \frac{\phi_3}{|s_{3d}|} \quad (43)$$

Para encontrar el valor máximo de la función $f_3(\bar{x}_3)$ en este caso en lugar de buscar en la esfera unitaria, se busca en una variedad más sencilla de parametrizar, es decir, en $f_3(1, x_2, x_3)$, $f_3(0, x_2, x_3)$ y en $f_3(-1, x_2, x_3)$. Obteniendo los siguientes puntos críticos:

$$f_3(1, -1.000004, -0.0848, \bar{k}_2) = 4136.4 \quad (44)$$

$$f_3(0, 17.7021, 5.4274, 1, 1.5373) = 5.1507 \quad (45)$$

$$f_3(-1, 1.000004, 0.0848, \bar{k}_2) = 4136.4 \quad (46)$$

Es evidente que se obtienen puntos máximos simétricos al origen. Dando como resultado $\max(f_3(\bar{x}_3)) = 4136.4$.

En la Figura 8 se muestra la función objetivo, donde se puede observar que el punto máximo está muy cerca de los puntos de singularidad. En consecuencia el valor máximo es un número muy grande, esto afecta mucho a los juegos de ganancias puesto que el valor de las últimas ganancias son excesivamente grandes. Esto es aun más preocupante puesto que para los casos de controladores de cuarto orden en adelante se espera que el valor de la última ganancia aumente considerablemente. Finalmente al tratarse de la última ganancia se toman en cuenta las cotas de las perturbaciones, que para este trabajo se consideran como $C = 0$ y $K_m = K_M = 1$:

$$k_3 = \frac{1}{K_m} \left(1.1 \hat{k}_3 + C \right) = 1.1(4136.4) = 4550.2 \quad (47)$$

En la Figura 5 se muestra la convergencia de las tres variables de estado del sistema. Por otro lado en la Figura 6 se muestra el diagrama de fase, donde se aprecia que la convergencia es terminal, ya que al entrar las trayectorias del sistema a la variable de deslizamiento ya no vuelven a salir. La Tabla 2 contiene juegos de ganancias obtenidas para el controlador de tercer orden. En cada juego de ganancias se incrementa el valor del grado de homogeneidad m de la función de Lyapunov, esto tiende a incrementar el valor de las ganancias y en consecuencia aumenta el efecto del *chattering*, así como incrementar el tiempo de convergencia, haciendo al controlador más rápido. Un punto importante a trabajar a futuro es encontrar una forma de reducir significativamente el valor de la última ganancia a través de modificar parámetros de diseño de la función de Lyapunov como los pesos y grados de homogeneidad así como el valor de las constantes γ , ya que es indispensable para poder obtener juegos de ganancias razonables para controladores de mayor orden.

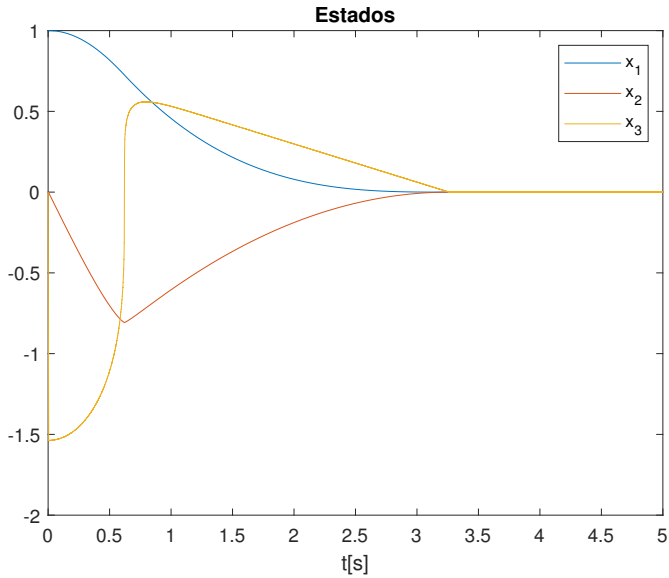


Figura 5. Controlador de segundo orden con $k_1 = 1$, $k_2 = 1.7798$, $k_3 = 4550.2$, $m = 3$, $r = [2, 1]$ y $\alpha = [2, 3]$.

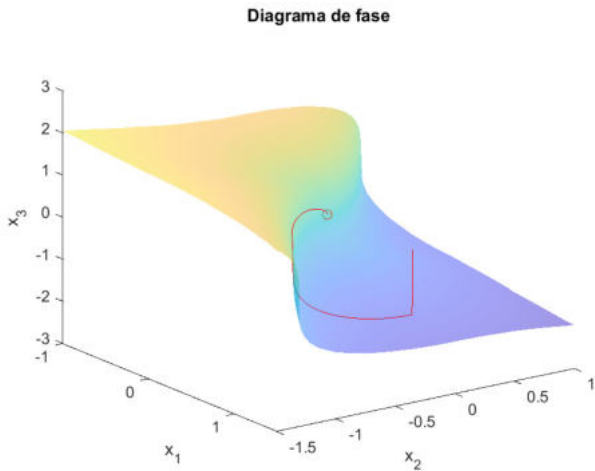


Figura 6. Controlador de segundo orden con $k_1 = 1$, $k_2 = 1.7798$, $k_3 = 4550.2$, $m = 3$, $r = [2, 1]$ y $\alpha = [2, 3]$.

Ganancias para el controlador de tercer orden			
Pesos y grados de homogeneidad	k_1	k_2	k_3
$m = 5$, $r = [3, 2, 1]$ y $\alpha = [2, 3, 4]$	1	1.5373	4550.2
$m = 7$, $r = [3, 2, 1]$ y $\alpha = [2, 3, 4]$	1	2.0126	1399.1
$m = 9$, $r = [3, 2, 1]$ y $\alpha = [2, 3, 4]$	1	2.7757	4974.8
$m = 11$, $r = [3, 2, 1]$ y $\alpha = [2, 3, 4]$	1	3.6427	15502

Tabla 2. Tabla de ganancias para controlador de tercer orden, donde $C = 0$ y $K_m = 1$

9. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentaron e implementaron algoritmos para la obtención de ganancias de la familia de controladores discontinuo anidado. Estos controladores se caracterizan por estar basados en modos deslizantes de alto orden, así como por producir leyes de control

discontinuas capaces de compensar perturbaciones e incertidumbres acopladas y acotadas .

Se obtuvieron juegos de ganancias del controlador que estabilizan el sistema en lazo cerrado para los controladores de segundo y tercer orden. El número de ganancias depende directamente del orden del controlador; por lo tanto, cuanto mayor sea el orden del controlador las opciones para determinar las ganancias incrementan bastante. La última ganancia es la encargada de compensar las perturbaciones y además la que tiene que ver con la ley de control. Para el caso del controlador de tercer orden la última ganancia es considerablemente grande, lo cual se traduce en un tiempo de convergencia corto; sin embargo, aumenta la presencia del *chattering* y de otros efectos que afectan el desempeño, como el efecto pico. Una manera de lidiar con esto es reduciendo el valor de las ganancias mediante un escalamiento homogéneo. Por otro lado, otra alternativa y trabajo a futuro es la modificación de la función de CFL que nos permita reducir el valor de las ganancias.

Este algoritmo tiene la ventaja de proporcionar una amplia variedad de juegos de ganancias que cumplen con las condiciones teóricas obtenidas de una CFL

AGRADECIMIENTOS

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo y la beca brindada. Y al PAPIIT-UNAM (Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica), proyecto IN106323.

REFERENCIAS

- Bacciotti, A. and Rosier, L. (2005). *Liapunov functions and stability in control theory*. Springer Science and Business Media.
- Bartolini, G., Ferrara, A., and Usai, E. (1998). Chattering avoidance by second-order sliding mode control. *IEEE Transactions on automatic control*, 43(2), 241–246.
- Bernaui, E., Efimov, D., Perruquetti, W., and Polyakov, A. (2014). On homogeneity and its application in sliding mode control. *Journal of the Franklin Institute*, 351(4), 1866–1901.
- Cruz-Zavala, E.... and Moreno, J.... (2017). Homogeneous high order sliding mode design: A lyapunov approach. *Automatica*, 80, 232–238 – 238.
- Emelyanov, S. (1986). Higher order sliding modes in the binary control systems. In *Sov. Phys. Dokl.*, volume 4, 291–293.
- Feng, Y., Yu, X., and Man, Z. (2002). Non-singular terminal sliding mode control of rigid manipulators. *Automatica*, 38(12), 2159–2167.
- Fridman, L., Moreno, J.A., Bandyopadhyay, B., Kamal, S., and Chalanga, A. (2015). Continuous nested algorithms: The fifth generation of sliding mode controllers. *Recent advances in sliding modes: From control to intelligent mechatronics*, 5–35.
- Levant, A. (2003). Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*, 76(9–10), 924–941 – 941.
- Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*, 58(6), 1247–1263, 10.1080/00207179308923053.
- Pérez-Ventura, U. and Fridman, L. (2019). Design of super-twisting control gains: A describing function based methodology. *Automatica*, 99, 175–180.
- Pérez Ventura, U., Mendoza Avila, J., and Fridman, L. (2021). Design of a proportional integral derivative like continuous sliding mode controller. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 31, 10.1002/rnc.5412.
- Rosier, L. (1992). Homogeneous lyapunov function for homogeneous continuous vector field. *Systems & Control Letters*, 19(6), 467–473.
- Sontag, E.D. (1989). A universal construction of artstein's theorem on nonlinear stabilization. *Systems & control letters*, 13(2), 117–123.
- Utkin, V. (1991). Slides modes in control and optimization. *Springer-Verlang*.