

# Effects of deterministic measurement noise on barrier function-based adaptive sliding-mode control <sup>★</sup>

Andrés González, Luis Ovalle and Leonid Fridman

*Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), Facultad de  
Ingeniería, 04510, CDMX, México. (e-mail:  
andresglezrod29@gmail.com).*

---

## Abstract:

The effect of deterministic measurement noise on barrier function-based adaptive sliding mode controllers (BFASMC) is analyzed. For general bounded deterministic noise signals, it is impossible to select the controller parameters to track some perturbation with unknown bound. Nonetheless, if the assumption of continuity of the noise is added, the tracking of such a perturbation is possible whenever the barrier function width depends on the bound of the noise. If Lipschitz continuity of the noise is assumed, then the barrier function width can be chosen arbitrarily.

*Keywords:* Control por modos deslizantes adaptable, Función Barrera, Ruido de medición.

---

## 1. INTRODUCTION

El control por modos deslizantes (SMC) es conocido por su robustez ante perturbaciones acopladas. Para lograr una compensación exacta de las perturbaciones, las ganancias del SMC deben dominar la cota superior de las perturbaciones. Conocer las cotas exactas *a priori* es una tarea complicada, lo cual hace que las ganancias del controlador sean sobreestimadas la mayoría del tiempo, empeorando los problemas de *chattering* y consumo de energía. Aunque en sistemas reales, la cota superior de estas señales generalmente existe, son desconocidas o sobre estimadas. Debido a lo anterior, una respuesta a este problema es el uso de controles por modos deslizantes adaptables (ASMC). Estos controladores son considerados como una solución al problema de sobre estimación de ganancias.

Existen tres métodos clásicos para el diseño de ASMCs Shtessel et al. (2016):

- Ganancias crecientes: Las ganancias del controlador crecen hasta que la cota instantánea de la perturbación es alcanzada. Dicho esquema garantiza que el modo deslizante se establezca. A pesar de esto, dos desventajas principales de este enfoque son, la sobreestimación de la ganancia del controlador y el desconocimiento del tiempo de estabilización del modo deslizante.

- Ganancias crecientes-decrecientes: las ganancias del controlador crecen y decrecen para seguir la perturbación, logrando un último acotamiento de las trayectorias del sistema. Sin embargo, esta última cota depende de la cota desconocida de la perturbación, siendo imposible conocer *a priori* el tiempo cuando la última cota será establecida.
- Reconstrucción del control equivalente: Un filtro es usado para estimar el valor del control equivalente. Dicho filtro otorga una aproximación de la perturbación, pero introduce un retardo en el sistema de lazo cerrado, por lo que existe la posibilidad de perder el modo deslizante. Para el diseño del filtro, la cota superior de la derivada de la perturbación es necesaria, la cual, si es conocida, permite la aplicación de técnicas SMC continuas. Estas técnicas aseguran la existencia de un modo deslizante de segundo orden con mejor precisión asintótica.

En Obeid et al. (2018) se presenta un BFASMC que restringe al estado en una vecindad del origen (barrera) con un tamaño predefinido (ancho de la barrera) *a priori*. Esto se logra eligiendo las ganancias del BFASMC como una función cóncava, continua y con asíntotas verticales en la frontera de la barrera. Recientemente en Cruz-Ancona et al. (2023) una modificación de BFASMC es propuesta de tal forma que se asegure que las soluciones del sistema lleguen a la barrera prescrita en un tiempo predefinido.

Algunas aplicaciones de BFASMC han sido presentadas para una variedad de sistemas, como robots manipuladores Mobayen et al. (2021), vehículos de superficie Yan

---

<sup>★</sup> Los autores agradecen la ayuda financiera del proyecto PAPIIT-UNAM IN106622, CONACYT CVU 901097 y el Programa de Becas Posdoctorales en la UNAM.

et al. (2021), sistemas ABS Rodrigues et al. (2022), un oscilador *Duffing* Mousavi et al. (2023), motores lineales Shao et al. (2021), actuadores piezoeléctricos Ma et al. (2022) y *quad-rotors* Alattas et al. (2022), por nombrar algunos.

La teoría de BFASMC y sus aplicaciones no consideran ruido de medición en el sistema, el cual siempre está presente en aplicaciones reales. Esto genera el siguiente dilema: cuando el estado del sistema se encuentra cerca de la frontera de la barrera las ganancias del controlador tienden a infinito y, consecuentemente, la presencia del ruido puede forzar las trayectorias del sistema a salirse de la barrera.

En este tabajo se ilustra lo siguiente:

- En presencia de ruidos determinísticos generales acotados el ancho de la barrera deja de ser arbitrario. No obstante, puede ser seleccionada como una función de las cotas de la perturbación y el ruido.
- En el caso de ruidos determinísticos acotados y continuos, el ancho de la barrera puede ser seleccionado en función de la cota del ruido.
- En el caso de ruidos globalmente Lipschitz continuos, el ancho de la barrera puede ser seleccionada arbitrariamente, incluso si la constante de Lipschitz es desconocida.

Por cuestiones de espacio las pruebas son omitidas.

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considere el siguiente sistema dinámico

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u + \delta(t, x) \\ y &= x + \eta(t) \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $x, u, y \in \mathbb{R}$  son las variables de estado, control y salida, respectivamente.  $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  representa algún ruido de medición determinístico y  $\delta : \mathbb{R}_+ \times [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función medible que representa las perturbaciones.

Considere el siguiente BFASMC

$$u = -B_f(y)\text{sign}(y) \quad (2)$$

donde  $B_f(y) = \frac{|y|}{(\varepsilon - |y|)}$  representa una función barrera Obeid et al. (2018). El parámetro  $\varepsilon$  recibe el nombre de ancho de la barrera (BW).

Debido a que  $\eta(t)$  no se puede medir, y  $y(t) = 0$  implica  $x(t) = -\eta(t)$ , es imposible conocer la posición exacta del centro de la barrera, vea Fig. 1

*Comentario 1.* El Controlador (2) requiere  $|y(t_0)| < \varepsilon$ . Sin pérdida de generalidad, es posible suponer que  $|y(t_0)| < \varepsilon$  en (1) ya que siempre es posible usar el resultado en Cruz-Ancona et al. (2023) para alcanzar la barrera en un tiempo predefinido y conmutar los controladores. Sin embargo, para garantizar esta restricción,  $\varepsilon$  debe de ser mayor que el valor de  $\eta(t_0)$ . Debido a que  $\eta(t)$

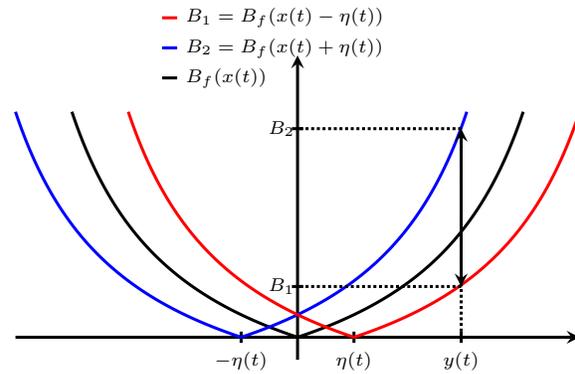


Fig. 1. Efectos de  $\eta$  en el centrado de la función barrera es desconocida, si el ruido fuese acotado,  $\varepsilon$  puede escojerse en términos de esa cota.

*Suposición 1.* Existe una constante positiva  $\bar{\delta} > 0$  tal que, para todo  $t \in [t_0, \infty)$  y  $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ , la perturbación cumple la cota  $|\delta(t, x)| \leq \bar{\delta}$ .

El objetivo de este trabajo es encontrar las posibles selecciones del parámetro  $\varepsilon$ , tales que, para diferentes condiciones de  $\eta(t)$ , las trayectorias del sistema se encuentren dentro de la barrera.

## 3. RUIDOS DETERMINÍSTICOS ACOTADOS

*Suposición 2.* Existe una constante conocida  $\Delta_\eta > 0$  tal que,  $|\eta(t)| \leq \Delta_\eta$ , para todo  $t \in [t_0, \infty)$ .

El siguiente teorema muestra condiciones suficientes para el acotamiento de (1) controlado por (2) bajo las suposiciones 1 y 2:

*Teorema 1.* Considere (1) controlado por (2) y las suposiciones 1 y 2 con  $\bar{\delta}$  conocida. Si  $\varepsilon > 2\Delta_\eta(\bar{\delta} + 1)$  y  $y(t_0) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , el estado estará restringido en el conjunto  $\Delta_\eta \leq |x| < \varepsilon - \Delta_\eta$ , lo que implica  $y(t) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , para todo  $t \in [t_0, \infty)$ .

**Prueba.** El sistema en lazo cerrado (1)-(2) está dado por

$$\dot{x} = -\frac{x + \eta}{(\varepsilon - |x + \eta|)} + \delta. \quad (3)$$

Considere la función de Lyapunov de tipo barrera

$$V = \frac{1}{2}x^2 + \frac{|x|}{(\varepsilon + \Delta_\eta - |x|)}. \quad (4)$$

tal que  $\lim_{x \rightarrow \varepsilon + \Delta_\eta} V(x) = \infty$ . La derivada (4) a lo largo de las trayectorias de (3) satisface la desigualdad  $\dot{V} \leq -F(x) \left( \frac{\text{sign}(x)(x+\eta)}{(\varepsilon - |x+\eta|)} - \bar{\delta} \right)$  con  $F(x) = \left( |x| + \frac{\varepsilon + \Delta_\eta}{(\varepsilon + \Delta_\eta - |x|)^2} \right) > 0$ . Entonces  $\dot{V} \leq 0$  si:

$$\text{sign}(x + \eta)\text{sign}(x) \geq \bar{\delta} \left( \frac{\varepsilon}{|x + \eta|} - 1 \right). \quad (5)$$

Tres diferentes casos serán considerados:

- Caso a)  $\text{sign}(\eta) = \text{sign}(x)$ :

En este caso, (5) es reescrita como  $1 \geq \bar{\delta} \left( \frac{\varepsilon}{|x|+|\eta|} - 1 \right)$ , lo que implica que  $|x| \geq \varepsilon \frac{\bar{\delta}}{1+\bar{\delta}} - \Delta_\eta$ . De esta forma,  $V$  estará acotada si  $\varepsilon - \Delta_\eta > |x| \geq \varepsilon \frac{\bar{\delta}}{1+\bar{\delta}} - \Delta_\eta$

- Caso b)  $\text{sign}(\eta) \neq \text{sign}(x)$  y  $|x| > |\eta|$  :

Lo anterior implica que  $|x + \eta| = |x| - |\eta|$  y  $\text{sign}(x + \eta) = \text{sign}(x)$ ; entonces, (5) es reescrita como  $1 \geq \bar{\delta} \left( \frac{\varepsilon}{|x|-|\eta|} - 1 \right)$ , por lo que  $|x| \geq \varepsilon \frac{\bar{\delta}}{1+\bar{\delta}} + \Delta_\eta$ . Entonces, en este caso,  $V$  estará acotada si  $\varepsilon + \Delta_\eta > |x| > \varepsilon \frac{\bar{\delta}}{1+\bar{\delta}} + \Delta_\eta$

- Caso c)  $\text{sign}(\eta) \neq \text{sign}(x)$  y  $|x| < |\eta|$  :

Las condiciones anteriores implican que  $|x + \eta| = |\eta| - |x|$  y  $\text{sign}(x + \eta) = -\text{sign}(x)$ ; entonces, (5) es reescrita como  $-1 \geq \bar{\delta} \left( \frac{\varepsilon}{|\eta|-|x|} - 1 \right)$ . De  $\varepsilon > 2\Delta_\eta$ , no es posible cumplir con  $\dot{V} > 0$ . En consecuencia,  $|x|$  crecerá y alcanzará el caso a) o b).

Ya que  $\eta(t)$  no se asume continua, es posible que las trayectorias del sistema salten entre los diferentes casos. Debido a esto, se debe asegurar que las condiciones de los casos a) y b) sean cumplidas simultáneamente. Esto significa que el conjunto  $\varepsilon - \Delta_\eta > \varepsilon \frac{\bar{\delta}}{1+\bar{\delta}} + \Delta_\eta$  no esté vacío, lo que implica que  $\varepsilon > 2\Delta_\eta(\bar{\delta} + 1)$ . Esta selección de  $\varepsilon$  asegura que  $\dot{V} < 0$  para  $|x(t)| < \varepsilon - \Delta_\eta$ .

*Comentario 2.* Si la condición  $\varepsilon > 2\Delta_\eta(\bar{\delta} + 1)$  no se cumple, el conjunto donde  $\dot{V} \leq 0$  podría estar vacío, ocasionando que el sistema pueda salir de la barrera.

*Comentario 3.* En el caso general de ruido determinístico acotado, el uso de (2) **no tiene sentido**:

- Dados valores de  $\varepsilon$  y  $\Delta_\eta$ , el nivel de perturbación,  $\bar{\delta}$ , que el sistema puede soportar no es arbitrario.
- Es imposible asegurar que las trayectorias del sistema permanezcan dentro de la barrera si  $\bar{\delta}$  es desconocida.
- Si  $\bar{\delta}$  es conocida, siempre es posible usar un control lineal  $u = -ky$  que asegure que la salida del sistema no abandone el conjunto  $|y| < \varepsilon$ , sin requerir de una ganancia infinita Khalil (2002).

Los efectos del ruido en la estabilidad del sistema son mostrados en Fig. 2. Si el estado se encuentra en las líneas discontinuas se tiene que  $\dot{V} < 0$ . Las líneas continuas muestran el caso donde  $\dot{V} > 0$ . Ahora, si el estado está en las líneas punteadas, no es posible evitar los saltos de un lado a otro de la barrera. Un ejemplo de estos saltos es dado por flechas verticales. No obstante, la selección de  $\varepsilon$  implica que el estado está restringido por el conjunto marcado por líneas verticales punteadas. En este conjunto todos los posibles saltos serán entre los conjuntos donde  $\dot{V} < 0$ .

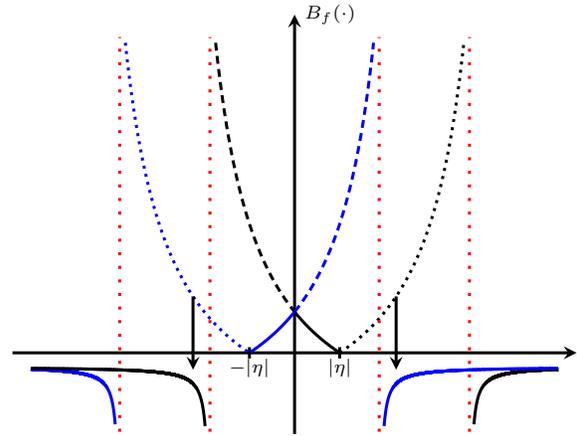


Fig. 2. Comportamiento gráfico del estado en tres casos

#### 4. RUIDO ACOTADO CONTINUO

*Suposición 3.* La función  $\eta(t)$  es una función continua que satisface la suposición 2.

Considere el siguiente corolario del Teorema 1

*Corolario 1.* Considere (1) controlado por (2) y asuma que las suposiciones 1 y 3 son satisfechas. Si el BW se escoge como  $\varepsilon > 2\Delta_\eta$  y  $y(t_0) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , se tendrá que  $y \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  para todo  $t \geq t_0$ , lo que implica que el estado estará acotado por  $\Delta_\eta \leq |x| < \varepsilon + \Delta_\eta$ .

**Prueba.** La prueba sigue la prueba del Teorema 1. Ya que  $\dot{V}$  no puede ser negativa en el caso c), solo los casos a) y b) son considerados. Además de esto, debido a que  $\eta(t)$  es continua, no es posible para  $x$  saltar de un caso a otro. Esto significa que las condiciones

$$\dot{V} \leq 0 \implies \begin{cases} \varepsilon - \Delta_\eta > |x| \geq \varepsilon \frac{\bar{\delta}}{1+\bar{\delta}} - \Delta_\eta & \text{Caso a)} \\ \varepsilon + \Delta_\eta > |x| \geq \varepsilon \frac{\bar{\delta}}{1+\bar{\delta}} + \Delta_\eta & \text{Caso b)} \end{cases}$$

no necesitan ser cumplidas simultáneamente. Considerando  $|y| = |x| + |\eta|$  en el Caso a) y  $|y| = |x| - |\eta|$  en el Caso b), se tiene:

$$\dot{V} \leq 0 \implies \begin{cases} \varepsilon > |x| + \Delta_\eta \geq |y| \geq \varepsilon \frac{\bar{\delta}}{1+\bar{\delta}} & \text{Caso a)} \\ \varepsilon > |y| \geq |x| - \Delta_\eta \geq \varepsilon \frac{\bar{\delta}}{1+\bar{\delta}} & \text{Caso b)} \end{cases}$$

por lo que  $\dot{V} \leq 0 \implies \varepsilon > |y| \geq \varepsilon \frac{\bar{\delta}}{1+\bar{\delta}}$ , la cual es factible para cualquier valor  $\bar{\delta}$  finito. Además,  $\varepsilon > |y|$  implica  $\varepsilon + \Delta_\eta > |x|$ .

*Comentario 4.* En el caso de ruido continuo,  $\varepsilon$  no depende de  $\bar{\delta}$ . Por otro lado, para cualquier controlador lineal, el conjunto donde el estado es últimamente acotado no puede ser predefinido si  $\bar{\delta}$  es desconocida.

*Comentario 5.* En el caso de ruido continuo, el valor de  $\varepsilon$  es restringido a  $\varepsilon > 2\Delta_\eta$ . En este caso, el uso de

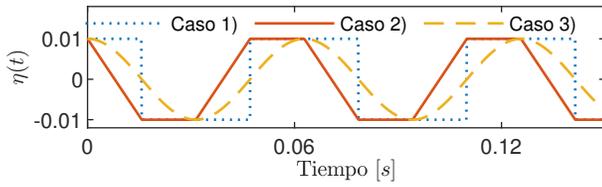


Fig. 3. Los diferentes ruidos considerados.

(2) asegura que las soluciones de (1) nunca salgan de la barrera.

## 5. RUIDO LIPSCHITZ CONTINUO

*Suposición 4.* El ruido de medición es globalmente Lipschitz continuo, con una constante Lipschitz desconocida  $\bar{\Delta}_\eta$ .

El siguiente teorema muestra que bajo la suposición 4, el tamaño del BW puede ser seleccionado arbitrariamente.

*Teorema 2.* Suponga que (1) es controlado por (2) y las suposiciones 1 y 4 son cumplidas. Si el BW se escoge como  $\varepsilon > 0$  y  $y(t_0) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , entonces  $y(t)$  estará restringida en  $0 \leq |y(t)| < \varepsilon$  para todo  $t \geq t_0$ .

**Prueba.** Del hecho que  $\eta(t)$  es globalmente Lipschitz continua, esta señal es diferenciable en casi en todos lados y su derivada es esencialmente acotada. Por lo que, considerando que  $y(t) = x(t) + \eta(t)$ , es posible reescribir (1) como  $\dot{y} = -\frac{y}{\varepsilon - |y|} + \delta_1(t)$ , casi en todos lados, con  $\delta_1(t) = \delta(t) + \dot{\eta}(t)$ , y  $|\delta_1(t)| \leq \bar{\delta} + \bar{\Delta}_\eta$  la cual es acotada, aunque su cota es desconocida. De esta forma, uno puede aplicar directamente los resultados de Obeid et al. (2018), para mostrar que  $y(t)$  esta confinada en  $|y| \leq \varepsilon$ .

*Comentario 6.* No existe una restricción teórica del tamaño de  $\varepsilon$ . No obstante, ya que la condición inicial del ruido es generalmente desconocida, una selección razonable para  $\varepsilon$  es  $\varepsilon > 2\Delta_\eta$  si  $\Delta_\eta$  existe y es conocida.

## 6. SIMULACIONES

Con el fin de mostrar la aplicación de los resultados presentados y demostrar algunas de las discusiones presentadas, tres casos de simulación serán considerados, cambiando la definición de  $\eta(t)$  en (1):

- Caso 1):  $\eta(t) = \Delta_\eta \text{sign}(\cos(\omega_d t))$
- Caso 2):  $\eta(t) = \begin{cases} \Delta_\eta(1-2T) & 0 < T \leq 1 \\ -\Delta_\eta & 1 < T \leq 2 \\ \Delta_\eta(2T-5) & 2 < T \leq 3 \\ \Delta_\eta & 3 < T \leq 4 \end{cases}$
- Caso 3)  $\eta(t) = \Delta_\eta(\cos(\omega_d t))$

con  $\omega_d = 100$ ,  $\Delta_\eta = 0.01$  y  $T = \{\frac{2t\omega_d}{\pi} \bmod (4)\}$ . Los ruidos a considerar son mostrados en Fig. 3 Cada una de las simulaciones se realizaron usando el método de discretización de Euler hacia atrás con un tiempo de muestreo de  $\tau = 1\mu s$  y consideran  $\delta = 20 \cos(10t)$ .

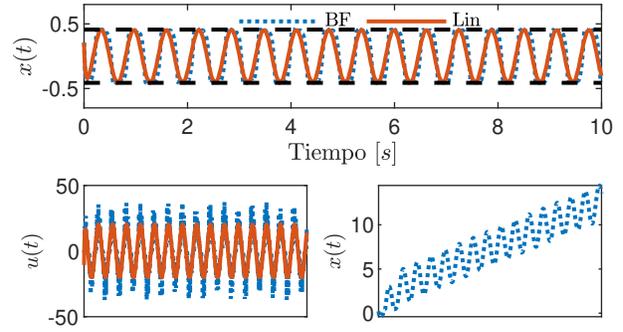


Fig. 4. Resultados de la simulación del Caso 1).

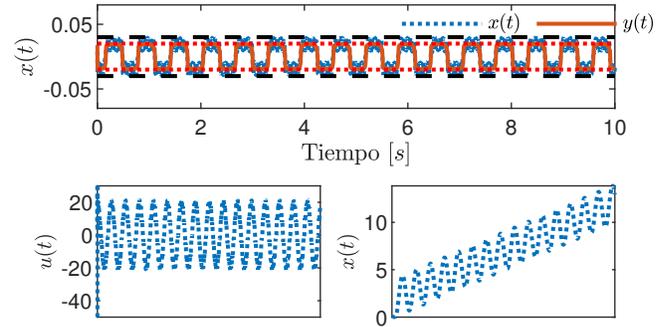


Fig. 5. Resultados de la simulación del Caso 2).

La primera simulación (mostrada en Fig. 4) considera un ruido discontinuo y una comparación contra un control lineal. La gráfica superior muestra  $x(t)$ , mientras que la gráfica inferior izquierda muestra  $u(t)$ ;  $u(t)$  es más agresivo para el control adaptable y la precisión de ambas técnicas es similar. Ya que el conocimiento de  $\bar{\delta}$  es necesario para la selección de  $\varepsilon$ , no se aprecia una ventaja del control adaptable sobre el control lineal. Para mostrar qué tan justa es la condición  $\varepsilon > 2\Delta_\eta(\bar{\delta} + 1)$ , la gráfica inferior derecha muestra el comportamiento  $x(t)$  con  $\varepsilon = 1.97\Delta_\eta(\bar{\delta} + 1)$  (1.5% más pequeño); de esta forma las trayectorias del sistema no pueden mantenerse en una región predefinida.

La segunda simulación (mostrada en la Fig. 5) considera un ruido continuo. La gráfica superior muestra  $x(t)$  y  $y(t)$ , los cuales son restringidos en  $|x(t)| < \varepsilon + \Delta_\eta$  (mostrado por la línea horizontal de líneas a trazos). En este caso no se asume conocimiento de la cota de la perturbación; por lo que un control lineal no puede ser diseñado.  $u(t)$  es mostrado en la gráfica inferior izquierda. Para demostrar qué tan cerca se encuentra el resultado de la condición necesaria, la gráfica inferior derecha muestra una respuesta del sistema con  $\varepsilon = 1.97\Delta_\eta$  (1.5% más pequeña que los resultado teóricos). Se observa que la respuesta ya no es restringida en el conjunto predefinido.

En la tercera simulación, un ruido continuamente diferenciable es considerado. La Fig. 6 muestra que tanto el estado  $x(t)$  como la salida  $y(t)$  se mantienen dentro de los conjuntos esperados. La gráfica superior muestra

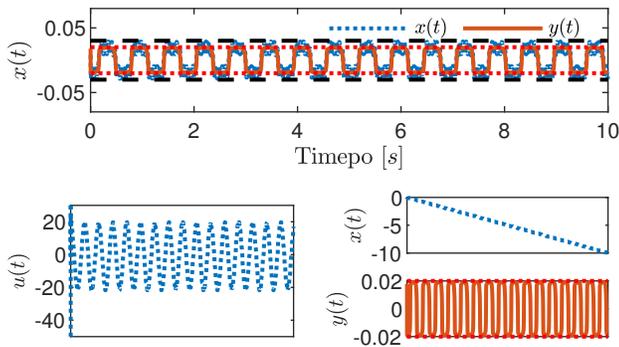


Fig. 6. Resultados de la simulación del Caso 3).

la evolución de  $x(t)$  y  $y(t)$ , mientras la gráfica inferior izquierda muestra  $u(t)$ . Para demostrar que  $\varepsilon$  puede ser seleccionado independiente de  $\Delta_\eta$ , el ruido  $\eta(t) = \Delta_\eta \cos(\omega_d t) + t$  es considerado. Dicho ruido es Lipschitz continuo, pero no acotado. Debido a que la simulación se realizó para  $t \in [0, 10]$ , uno podría considerar  $\Delta_\eta = 10.01$ , el cual es de 3 ordenes de magnitud mayor que el resto de las simulaciones, considerando el mismo valor para  $\varepsilon$  como la segunda y tercera simulación. Esto muestra la independencia de  $\varepsilon$  de  $\Delta_\eta$ . La parte inferior derecha de Fig. 6 muestra  $x(t)$  y  $y(t)$ . Debido a que el ruido no es acotado, para que  $|y(t)| < \varepsilon$  se cumpla, es necesario que el estado crezca con el ruido.

## 7. CONCLUSIÓN

El comportamiento de BFSMC fue analizado en presencia de ruido de medición. Condiciones suficientes para la selección del BW,  $\varepsilon$ , en presencia del ruido son mostradas; se concluye que, considerando solo la cota del ruido, el BW ya no puede ser elegido arbitrariamente, dependiendo de la cota superior del ruido y la perturbación. Por otro lado, si se asume la continuidad de la señal del ruido, la dependencia del BW con respecto a la cota de la perturbación desaparece. Más aún, si el ruido se asume como una señal Lipschitz continua, el BW puede ser seleccionado arbitrariamente. Simulaciones realizadas ilustran los resultados y resaltan lo justos que son los resultados, demostrando que valores abajo de 1.5% del valor teórico no logran forzar la salida al conjunto predefinido.

## REFERENCIAS

- Alattas, K.A., Mofid, O., Alanazi, A.K., Abo-Dief, H.M., Bartoszewicz, A., Bakouri, M., and Mobayen, S. (2022). Barrier function adaptive nonsingular terminal sliding mode control approach for quad-rotor unmanned aerial vehicles. *Sensors*, 22(3), 909.
- Cruz-Ancona, C.D., Fridman, L., Obeid, H., Laghrouche, S., and Pérez-Pinacho, C.A. (2023). A uniform reaching phase strategy in adaptive sliding mode control. *Automatica*, 150, 110854.
- Khalil, H. (2002). *Nonlinear Systems*. Pearson Education. Prentice Hall.

- Ma, H., Liu, W., Xiong, Z., Li, Y., Liu, Z., and Sun, Y. (2022). Predefined-time barrier function adaptive sliding-mode control and its application to piezoelectric actuators. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 18(12), 8682–8691.
- Mobayen, S., Alattas, K.A., and Assawinchaichote, W. (2021). Adaptive continuous barrier function terminal sliding mode control technique for disturbed robotic manipulator. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 68(10), 4403–4412.
- Mousavi, A., Markazi, A.H., and Ferrara, A. (2023). A barrier function-based second order sliding mode control with optimal reaching for full state and input constrained nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- Obeid, H., Fridman, L.M., Laghrouche, S., and Harmouche, M. (2018). Barrier function-based adaptive sliding mode control. *Automatica*, 93, 540–544.
- Rodrigues, V.H.P., Hsu, L., Oliveira, T.R., and Fridman, L. (2022). Adaptive sliding mode control with guaranteed performance based on monitoring and barrier functions. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 36(6), 1252–1271.
- Shao, K., Zheng, J., Wang, H., Wang, X., Lu, R., and Man, Z. (2021). Tracking control of a linear motor positioner based on barrier function adaptive sliding mode. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 17(11), 7479–7488.
- Shtessel, Y., Fridman, L., and Plestan, F. (2016). Adaptive sliding mode control and observation. *International Journal of Control*, 89(9), 1743–1746.
- Yan, Y., Zhao, X., Yu, S., and Wang, C. (2021). Barrier function-based adaptive neural network sliding mode control of autonomous surface vehicles. *Ocean Engineering*, 238, 109684.