

An Integral Sliding–Mode–based Interval Predictive Control for Constrained LPV Systems [★]

Susana V. Gutiérrez–Martínez ^{*,**} Héctor Ríos ^{*,***}
Tarek Raïssi ^{****} Denis Efimov ^{†,‡}

^{*} *Tecnológico Nacional de México/I.T. La Laguna, México. (e-mails: svgutierrezmr@gmail.com, hriosb@lalaguna.tecnm.mx)*

^{**} *Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Universidad Autónoma de Nuevo León, Mexico.*

^{***} *CONAHCYT IxM, CDMX, México*

^{****} *Conservatoire National des Arts et Métiers, Paris, France, (e-mail: tarek.raïssi@cnam.fr)*

[†] *Inria, Univ. Lille, CNRS, Lille, France, (e-mail: Denis.Efimov@inria.fr)*

[‡] *Department of Control Systems and Informatics, Information Technologies Mechanics and Optics University, Russia.*

Abstract: This paper presents the design of a robust controller, based on an integral sliding–mode control (ISM) approach together with an interval predictor–based state feedback controller and a Model Predictive Control (MPC) scheme, for a class of uncertain linear parameter–varying (LPV) systems. The proposed controller deals with some state and input constraints and is robust to some external disturbances and parameter uncertainties. Furthermore, the performance of the proposed scheme is validated by numerical simulations.

Keywords: LPV Systems, Sliding–Mode Control, Constrained System.

1. INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, el control de sistemas no lineales se ha convertido en un importante campo de investigación. Esto se debe a una amplia gama de aplicaciones críticas de ingeniería, como los sistemas de control de vuelo, los manipuladores, los sistemas automatizados, las estructuras de las alas de los aviones, los sistemas de inyección de combustible, entre otros. Sin embargo, todos estos sistemas poseen incertidumbres paramétricas y restricciones en los estados y en las entradas; además, pueden verse afectados por perturbaciones externas.

En cuanto al diseño de control de sistemas dinámicos con restricciones, se sabe que es una tarea muy compleja de abordar mediante soluciones clásicas de realimentación (Mayne et al. (2000)). Dado que este escenario es recurrente, el control predictivo basado en el modelo (MPC, por sus siglas en inglés) es una forma de manejar

problemas de control óptimo restringido para sistemas dinámicos inciertos (Mayne, 2014). Además, el MPC ha crecido hasta ser muy popular y exitoso en muchas aplicaciones industriales (ver, *e.g.*, Borrelli et al. (2017), Funke et al. (2016) y Falcone et al. (2007)). El MPC resuelve un problema de control óptimo en cada instante de muestreo, donde se optimiza una secuencia de entradas y sólo la primera entrada se inyecta en el sistema. Entonces, se dice que un esquema MPC es robusto si logra satisfacer la tarea de control bajo las restricciones en los estados y en las entradas, para todas las secuencias posibles con ciertas incertidumbres (Raković, 2016).

Sin embargo, se tienen algunos retos en los sistemas inciertos basado en el MPC: la predicción se basa en modelos que a menudo son diferentes con respecto al sistema real, por causa de incertidumbres, ruido y perturbaciones (Bemporad, 2007); normalmente, el MPC requiere la medición completa del estado, que no siempre está disponible y siendo necesario el uso de herramientas de estimación que añaden complejidad al problema debido a los errores de estimación (Findeisen et al., 2003). Por este motivo, los sistemas de parámetros lineales variables (LPV) se utilizan normalmente para representar sistemas con incertidumbres y/o no linealidades y pueden utilizarse

[★] Los autores agradecen el apoyo financiero de CONAHCYT CVU 333681, CONAHCYT IxM CVU 270504 Proyecto 922, del proyecto SEP–CONACYT–ANUIES–ECOS–NORD 315597 y ECOS NORD M20N04, y de proyectos TecNM. Este trabajo se desarrolla en el marco de la Red Internacional de Control y Cómputo Aplicados, TecNM.

para el diseño de algoritmos de predicción como el MPC. Por ejemplo, en Leurent et al. (2020), los autores proponen un algoritmo MPC, basado en un predictor de estado por intervalos, con el fin de abordar el problema de estabilización para una clase de sistemas LPV de tiempo continuo, bajo restricciones en el estado y en el control, sujeto a perturbaciones e incertidumbres paramétricas acotadas. En Reis de Souza et al. (2021), los autores proporcionan un control predictivo robusto con realimentación de salida para sistemas LPV de tiempo discreto bajo restricciones en el sistema, en el estado y perturbaciones acotadas. Sin embargo, en Leurent et al. (2020) y Reis de Souza et al. (2021), sólo se garantiza la Estabilidad Entrada-Estado (ISS) en presencia de perturbaciones externas.

Considerando técnicas de control robusto, el control basado en modos deslizantes (SMC) es una metodología popular usada debido a su robustez contra cierta clase de perturbaciones externas, y su convergencia en tiempo finito (véase, *e.g.*, Young et al. (1999) y Shtessel et al. (2014)). En la literatura se han propuesto varios trabajos para la combinación de los controles MPC y SMC. En Incremona et al. (2015), se propone un MPC jerárquico en un nivel superior, y el SMC en un nivel inferior, para una clase de sistemas inciertos no lineales con restricciones. Se propone un esquema de control accionado por eventos basado en modelos para sistemas inciertos no lineales de tiempo continuo con una configuración en red. La estrategia propuesta se basa en el uso de MPC y el control por modo deslizante integral (ISMC), cumple con las restricciones en el estado y en la entrada con incertidumbres. En Steinberger et al. (2020), los autores proponen una combinación del MPC y el ISMC para el seguimiento de la salida en sistemas lineales inciertos. Se garantiza la convergencia exponencial a cero del error de seguimiento. En Galván-Guerra et al. (2022) se propone un control óptimo, basado en el MPC y en el ISMC, para sistemas lineales representados por una aproximación multi-modelo con incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas acotadas. Además, mediante la resolución de un problema multi-modelo de min-max con el MPC, los autores proporcionan una estabilidad asintótica del sistema. Sin embargo, en la mayoría de los resultados anteriores, el modelo y los parámetros del sistema son necesarios para alcanzar la precisión, y la mayoría de ellos sólo proporcionan propiedades ISS.

La principal contribución de este trabajo es el diseño de un controlador robusto, basado en un enfoque ISMC con un controlador de realimentación de estado basado en un predictor por intervalos y un esquema MPC, para una clase de sistemas LPV inciertos. La estrategia de control es robusta frente a algunas perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas con restricciones en el estado y en la entrada. El ISMC compensa las perturbaciones acopladas asegurando el modo deslizante desde el primer instante. Además, el controlador de realimentación de estado esta basado en el predictor por intervalos y el MPC, el cual establecen un controlador de conmutación que se ocupan de las restricciones en el estado y en la

entrada. Se demuestra que el enfoque de control propuesto garantiza la estabilidad exponencial y la carga computacional disminuye debido a la estructura de conmutación del controlador. Es importante mencionar que esta propuesta extiende los resultados mostrados por Leurent et al. (2020) compensando completamente el efecto de la perturbación externa.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: En la Sección II se presenta el planteamiento del problema. Los preliminares se presentan en la Sección III, y el controlador propuesto se presenta en la Sección IV. La Sección V ilustra el enfoque propuesto con un ejemplo numérico. Finalmente, en la Sección VI se encuentran las conclusiones de este estudio.

Notación: La norma euclidiana de un vector $x \in \mathbb{R}^n$ es representada como $\|x\|$. La matriz identidad de dimensión n es definida por I_n . La secuencia de enteros $1, \dots, n$ esta denotada como $\overline{1, n}$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. El conjunto de todas las entradas $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^p$ tal que su norma L_∞ en $[0, \infty]$ es menor que infinito, *i.e.*, $\|u\|_\infty := \|u\|_{[0, \infty]} < \infty$, se denota como \mathcal{L}_∞ . Para un par de vectores $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, y un par de matrices $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, la relación $x_1 \leq x_2$, y $A_1 \leq A_2$, se satisface elemento a elemento. Para una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se define $A^+ = \max\{0, A\}$, $A^- = A^+ - A$, y $|A| = A^+ + A^-$, de forma similar para un vector. El término $\text{He}(A)$ se expresa $A + A^T$, para una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Además, para una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la relación $A \prec 0$ ($A \succeq 0$) significa que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es negativa (positiva) definida. Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es llamada Metzler cuando todos sus componentes fuera de la diagonal son no negativos.

2. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Considere el sistema LPV de forma:

$$\dot{x} = A(\theta)x + B(u + w(t)), \quad (1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u \in \mathbb{R}^m$ es la entrada de control, el término $w : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^m$ representa algunas perturbaciones externas acotadas, $\theta \in \mathbb{R}^p$ es un vector de parámetros desconocidos en la matriz $A : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, que pertenece a un conjunto compacto $\Theta \in \mathbb{R}^p$, y la matriz $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es conocida.

El objetivo de este trabajo es diseñar un controlador robusto tal que las trayectorias del sistema (1) converjan a cero. Dicho controlador debe ser robusto ante algunas perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas, además, considerar algunas restricciones en el estado y en la entrada *i.e.*, $x(t) \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$, y $u(t) \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$, para todo $t \geq 0$ con un conjunto de restricciones acotadas \mathbb{X} y \mathbb{U} .

Para abordar el diseño del control, el sistema (1) cumple con las siguientes suposiciones.

Suposición 1. *Existe una matriz Metzler $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, y algunas matrices $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, para $i = \overline{1, \eta}$, para cierta $\eta \in \mathbb{N}_+$ tal que:*

$$A(\theta) = A_0 + \sum_{i=1}^{\eta} \lambda_i(\theta) A_i, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{\eta} \lambda_i(\theta) = 1, \quad \lambda_i(\theta) \in [0, 1]. \quad (3)$$

Suposición 2. Las perturbaciones externas son acotadas, i.e., $w \in \mathbb{W} := \{w \in \mathcal{L}_{\infty} : \|w\|_{\infty} \leq w^+\}$, con w^+ una constante positiva conocida; y existen dos vectores $\underline{x}_0, \bar{x}_0 \in \mathbb{X}$ tal que $\underline{x}_0 \leq x(0) \leq \bar{x}_0$.

3. DISEÑO DEL CONTROL

Se propone la siguiente entrada de control:

$$u(t) = u_0(t) + u_1(t). \quad (4)$$

El control (4) esta dividido por dos componentes: el componente no lineal u_1 basado en el enfoque de modo deslizante integral que compensa el efecto de las perturbaciones; mientras que u_0 es la parte del control nominal, que se compone de una realimentación de estado basado en un predictor por intervalos y el esquema MPC, el cual se ocupará de las restricciones en el estado y en la entrada. La metodología propuesta garantizará la estabilidad exponencial del sistema dinámico.

Considerando que $u(t) \in \mathbb{U}$, esto implica que $\|u\| \leq u_{\max}$, para un determinado $u_{\max} > 0$; entonces, un esfuerzo de control específico puede ser asignado a cada componente del controlador (4), i.e., $\|u_0\| \leq u_{0\max}$ y $\|u_1\| \leq u_{1\max}$, con $u_{0\max}, u_{1\max} > 0$, tal que $u_{0\max} + u_{1\max} \leq u_{\max}$.

3.1 Control por Modos Deslizantes Integrales

Considere la siguiente variable deslizante

$$s(x) = G[x(t) - x(0)] - G \int_0^t [A_0 x(\tau) + B u_0(\tau)] d\tau, \quad (5)$$

donde $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $\det(GB) \neq 0$. Esta matriz puede ser seleccionada como $G = (B^T B)^{-1} B^T$, para más detalles ver Castaños (2006) y Utkin et al. (1999) Así, la dinámica de la variable deslizante es:

$$\dot{s} = G \sum_{i=1}^{\eta} \lambda_i(\theta) A_i x + GB(u_1 + w(t)). \quad (6)$$

Entonces, se propone el siguiente control por modo deslizante

$$u_1 = -\gamma(x) \frac{(GB)^T s}{\|(GB)^T s\|}, \quad (7)$$

donde $\gamma(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{X}$. El siguiente lema proporciona las condiciones para garantizar la convergencia en tiempo finito de la variable deslizante a cero cumpliendo con la restricción en la entrada.

Lema 1. Sea el ISMC (7) aplicado al sistema (6), para $u_{1\max} > 0$. Si la ganancia $\gamma(x)$ es diseñada como:

$$\gamma(x) = \rho + w^+ + \|G\| A_{\max} \|x\|, \quad (8)$$

con $A_{\max} = \sum_{i=1}^{\eta} \|A_i\|$, y $\rho > 0$ tal que $0 < \rho \leq u_{1\max} - w^+ - \|G\| A_{\max} x_{\max}$, (9) se cumple que $u_{1\max} > 0$; entonces, $s = 0$ es uniformemente estable en tiempo finito (UFTS, por sus siglas en inglés).

La prueba del Lema 1 es estándar para modos deslizantes y se omite por cuestión de espacio (Utkin, 1996).

Por lo tanto, el control robusto u_1 se encargará de las perturbaciones w y de las incertidumbres paramétricas $\sum_{i=1}^{\eta} \lambda_i(\theta) A_i$, que satisfaga la restricción en la entrada $\|u_1\| \leq u_{1\max}$. Sin embargo, la incertidumbre paramétrica $\sum_{i=1}^{\eta} \lambda_i(\theta) A x$ no está acoplada con la entrada de control u_1 , solamente su proyección en el espacio coincidente con B puede ser compensado por u_1 .

Además, es posible establecer $u_{1\max}$ de acuerdo con la cota superior de las perturbaciones; entonces, se destina el esfuerzo de control restante a u_0 , i.e., $u_{0\max} \leq u_{\max} - u_1$.

Observación 1. También es posible diseñar el control por modo deslizante (7) mediante leyes de control continuas, por ejemplo, mediante algoritmos Super-Twisting multivariables (ver Indira Nagesh (2014), López-Caamal (2019) o Moreno et al. (2021)). Sin embargo, es necesario considerar las restricciones de saturación.

3.2 Predictor por Intervalos

A partir de que el modo deslizante se lleva a cabo desde (6), se tiene que el control equivalente es

$$u_{1eq} = -(GB)^{-1} G \sum_{i=1}^{\eta} \lambda_i(\theta) A_i x - w, \quad (10)$$

por lo que las trayectorias del sistema en la superficie deslizante están dadas por

$$\dot{x} = \left[A_0 + \sum_{i=1}^{\eta} \lambda_i(\theta) \tilde{A}_i \right] x + B u_0, \quad (11)$$

donde $\tilde{A}_i = (I - B(GB)^{-1}G)A_i$. Entonces, de acuerdo con Efimov et al. (2013), se obtiene que

$$-\bar{A} \underline{x}^- - \underline{A} \bar{x}^+ \leq \sum_{i=1}^{\eta} \lambda_i(\theta) \tilde{A}_i x \leq \bar{A} \bar{x}^+ + \underline{A} x^-, \quad (12)$$

donde $\bar{A} = \sum_{i=1}^{\eta} \tilde{A}_i^+$, $\underline{A} = \sum_{i=1}^{\eta} \tilde{A}_i^-$. Por lo tanto, es posible diseñar el siguiente predictor por intervalos para el sistema (11)

$$\dot{\hat{x}} = A_0 \hat{x} - \bar{A} \hat{x}^- - \underline{A} \hat{x}^+ + B u_0, \quad (13)$$

$$\dot{\hat{x}} = A_0 \hat{x} + \bar{A} \hat{x}^+ + \underline{A} \hat{x}^- + B u_0. \quad (14)$$

La dinámica anterior podría reescribirse de forma compacta de la siguiente manera

$$\dot{\xi} = \mathcal{A}_0 \xi + \mathcal{A}_1 \xi^+ + \mathcal{A}_2 \xi^- + \mathcal{B} u_0, \quad (15)$$

donde $\xi = (\underline{x}^T, \bar{x}^T)^T \in \mathbb{R}^{2n}$, y las matrices del sistema

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\underline{A} \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} -\bar{A} & 0 \\ \underline{A} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix}.$$

Observe que el término de ξ esta acotado, por lo que x esta acotado. Así, para estabilizar la dinámica del sistema (1), se requiere diseñar una realimentación de estado u_0 para llevar las trayectorias del sistema (15) a cero (ver Efimov et al. (2013)).

3.3 Diseño del Control por Realimentación de Estado

La señal de control u_0 se propone como

$$u_0(t) = \begin{cases} \mathcal{U}_0(t), & \xi(t_i) \notin \mathbb{X}_f, \\ \bar{u}_0(t), & \xi(t_i) \in \mathbb{X}_f, \end{cases} \quad (16)$$

donde \mathcal{U}_0 es la señal de control dada por el MPC, para todo $t \in [t_i, t_i + h)$, con $h \in (0, T)$ y T como el tiempo de aplicación y el predictor por intervalos para el MPC, respectivamente; y \bar{u}_0 es la realimentación de estado. El conjunto de conmutación \mathbb{X}_f es definido más adelante.

El control de realimentación de estado \bar{u}_0 se obtiene de la siguiente forma

$$\bar{u}_0 = K_0\xi + K_1\xi^+ + K_2\xi^-, \quad (17)$$

con $K_0, K_1, K_2 \in \mathbb{R}^{m \times 2n}$ son las ganancias que se diseñarán. El siguiente lema proporciona una manera de diseñar las ganancias de realimentación de estado garantizando la convergencia de las trayectorias del sistema (15) a cero.

Lema 2. *Asuma que las suposiciones 1 y 2 se cumplen y que se aplica la ley de control por realimentación de estado (17) al sistema (15), i.e., $u_0(t) = \bar{u}_0(t)$. Se supone que existen matrices diagonales $0 < \Gamma_l \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $0 \leq R_1, R_2 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, algunas matrices diagonales $\Psi_1, R_0 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ y algunas matrices $Y_l \in \mathbb{R}^{m \times 2n}$, para $l = \overline{0, 2}$, tal que el siguiente conjunto de LMIs*

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ \star & \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ \star & \star & \Omega_{33} \end{pmatrix} \preceq 0, \quad (18)$$

$$\Psi_0 + \min\{\Psi_1, \Psi_2\} + 2 \min\{R_1, R_2\} > 0, \quad (19)$$

$$\Omega_{11} = \text{He}(\mathcal{A}_0\Gamma_0^{-1} + \mathcal{B}Y_0) + \Psi_0,$$

$$\Omega_{12} = \mathcal{A}_1\Gamma_1^{-1} + \mathcal{B}Y_1 + \Gamma_0^{-1}\mathcal{A}_0^T + Y_0^T\mathcal{B}^T + R_1,$$

$$\Omega_{13} = \mathcal{A}_2\Gamma_2^{-1} + \mathcal{B}Y_2 - \Gamma_0^{-1}\mathcal{A}_0^T - Y_0^T\mathcal{B}^T - R_2,$$

$$\Omega_{22} = \text{He}(\mathcal{A}_1\Gamma_1^{-1} + \mathcal{B}Y_1) + \Psi_1,$$

$$\Omega_{23} = \mathcal{A}_2\Gamma_2^{-1} + \mathcal{B}Y_2 - \Gamma_1^{-1}\mathcal{A}_1^T - Y_1^T\mathcal{B}^T + R_0,$$

$$\Omega_{33} = \Psi_2 - \text{He}(\mathcal{A}_2\Gamma_2^{-1} + \mathcal{B}Y_2),$$

son factibles. Si las ganancias de realimentación de estado se diseñan como $K_j = Y_j\Gamma_j^{-1}$ para $j = \overline{0, 2}$; entonces, las trayectorias del sistema (15) convergen exponencialmente a cero.

La estructura diagonal que requiere Γ_0 es natural debido a la existencia de una matriz diagonal Γ_0 , como una solución de la ecuación de Lyapunov $\text{He}(\Gamma\bar{\mathcal{A}}_0) \preceq 0$, es equivalente a la estabilidad de la matriz Metzler $\bar{\mathcal{A}}_0 = \mathcal{A}_0 + \mathcal{B}K_0$.

Así, el control (17) proporciona una convergencia exponencial a cero para el predictor por intervalos (15).

Además, considerando que \mathcal{A}_0 es Metzler y $\underline{x}_0 \leq x(0) \leq \bar{x}_0$, para dos vectores $\underline{x}_0, \bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, la propiedad de inclusión $\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t)$ se satisface (para mayores detalles, ver Efimov et al. (2013) y Efimov et al. (2012)), por lo tanto, las trayectorias del sistema (1) convergerán a cero y el problema considerado se resolverá adecuadamente siempre que $x(t) \in \mathbb{X}$, y $u(t) \in \mathbb{U}$, para todo $t \geq 0$, se cumple.

Ahora, es posible definir el conjunto \mathbb{X}_f como sigue

$$\mathbb{X}_f = \{\xi \in \mathbb{R}^{2n} : V_\xi(\xi) \leq \kappa^{-1}\epsilon\}, \quad (20)$$

donde $V_\xi = \xi^\top \Gamma_0^{-1} \xi + \xi^\top \Gamma_1^{-1} \xi^+ - \xi^\top \Gamma_2^{-1} \xi^-$, ϵ es una constante positiva, y $\kappa = \min_{v_i=1,2p} \lambda_i [\Upsilon(\Gamma_0 + \Gamma_1^+ + \Gamma_2^+)]$, con $\Upsilon = \bar{\Psi}_0 + \min\{\bar{\Psi}_1, \bar{\Psi}_2\} + 2 \min\{\bar{R}_1, \bar{R}_2\} > 0$, $\bar{\Psi}_j = \Gamma_j^{-1} \Psi_j \Gamma_j^{-1}$, y $\bar{R}_j = \Gamma_j^{-1} R_j \Gamma_j^{-1}$, para $l = \overline{0, 2}$. Note que \mathbb{X}_f es un conjunto invariante para el sistemas (15); además, todas las trayectorias dentro de \mathbb{X}_f convergen a cero. Por lo tanto, es posible seleccionar ϵ tal que $\mathbb{X}_f \subset \mathbb{X} \times \mathbb{X}$, i.e., tal que $x(t) \in \mathbb{X}$ se cumple, para todo $t \geq t_f \geq 0$.

3.4 Diseño del MPC

Antes de proceder a la descripción de la metodología del MPC, es necesario introducir la siguiente suposición.

Suposición 3. *Existen $\gamma(x)$, K_0 , K_1 , y K_2 que satisfacen las condiciones del Lema 1, y*

$$-\gamma(x(t)) \frac{(GB)^T s}{\|(GB)^T s\|} + K_0\xi(t) + K_1\xi_1^+(t) + K_2\xi^-(t) \in \mathbb{U},$$

para cualquier $\xi \in \mathbb{X}_f$ y todo $t \geq t_f \geq 0$.

La suposición anterior implica que siempre existe un controlador (4), dado por (7) y (17), y tal que el sistema (1) se estabiliza, y esta dentro de \mathbb{X}_f , las restricciones en el estado y en la entrada se cumplen.

Ahora, se describe la aplicación del MPC, que se ocupará de las restricciones en el estado y en la entrada para todo $\xi(t_i) \notin \mathbb{X}_f$. Se define T y $h \in (0, T)$ como el intervalo de predicción y el tiempo de aplicación del MPC, respectivamente. Por consiguiente, el problema de control óptimo para el algoritmo del MPC es el siguiente (ver Mayne et al. (2000) y Michalska (1993)):

Problema 1. *Para las matrices dadas $0 \preceq Q_j \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $j = \overline{0, 1}$, $0 \preceq Q_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$, y $t_i = ih$, con $i \in \mathbb{N}_+$, para encontrar las señales de control*

$$\mathcal{U}_0 = \arg \min_{u: [t_i, t_i+T] \rightarrow \mathbb{R}^m} \xi^T(t_i + T) Q_0 \xi(t_i + T) + \int_{t_i}^{t_i+T} [\xi^T(\sigma) Q_1 \xi(\sigma) + u_0^T(\sigma) Q_2 u_0(\sigma)] d\sigma, \quad (21)$$

de forma que se cumplan las siguientes restricciones

- $\xi : [t_i, t_i + T] \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ es una solución de (15).
- $\xi(\sigma) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X}$ y $u_0(\sigma) \in \mathbb{U}$ para $\sigma \in [t_i, t_i + T]$.
- $\xi(t_i + T) \in \mathbb{X}_f$.

Así, si el control óptimo antes mencionado es factible, las trayectorias del sistema (17) convergerán al conjunto

terminal \mathbb{X}_f , cuando $u_0(t) = \mathcal{U}_0(t)$; entonces, dentro de \mathbb{X}_f , cuando $u_0(t) = \bar{u}_0(t)$, las trayectorias convergerán a cero satisfaciendo las restricciones en el estado y en la entrada.

Finalmente, la solución del problema 1 proporcionarán el resultado principal de este trabajo, que se describe en el siguiente Teorema.

Teorema 3. *Se supone que la suposición 1, las condiciones de los Lemas 1 y 2 se satisfacen y el Problema 1 es factible. Si la ley de control (4), dada por (7) y (16), se aplica al sistema (1) y es diseñada de acuerdo a los Lemas 1, 2 y la solución del Problema 1; entonces, el origen del sistema (1) es Uniformemente Exponencialmente Estable, y se satisfacen las restricciones en el estado y en la entrada.*

La prueba se basa en resultados clásicos del MPC (Mayne et al., 2000).

4. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

En esta sección se presenta un ejemplo numérico para ilustrar la utilidad de la metodología propuesta. Considere el sistema LPV (1) con:

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} -1.5 & 1 + \theta(t) \\ \theta(t) & -0.4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

con $\theta(t) = 2 \cos(t)$ y $w(t) = 3 \cos(1.5t) + 3$. El conjunto de restricciones esta definido como $\mathbb{X} = [-2, 2] \times [-2, 2]$ y $\mathbb{U} = [-10, 10]$, mientras que las condiciones iniciales del sistema son $x(0) = (-1, 1)^T$. Es posible demostrar que este sistema satisface la Suposición 1 y las matrices A_0 y A_i , con $i = 1, 2$, se pueden obtener por un método politópico convexo, y la perturbación externa cumple con la Suposición 2, con $w^+ = 6$. Por otra parte, las condiciones iniciales para el predictor son $\underline{x}_0 = (-1.5, -0.5)^T$ y $\bar{x}_0 = (0.5, 1.5)^T$. Las ganancias del controlador por realimentación de estado se evalúan con las LMIs del Lema 1, *i.e.*,

$$\begin{aligned} K_0 &= (-0.0766, -0.0289, -0.0766, -0.0289), \\ K_1 &= (-0.1210, -0.0836, -0.1210, -4.4345), \\ K_2 &= (0.1210, 4.4340, 0.1210, 0.0836). \end{aligned}$$

El horizonte de predicción es seleccionado como $N = 15$ y calculando el conjunto de conmutación correspondiente a \mathbb{X}_f de acuerdo a (20). Todas las simulaciones se han realizado en MATLAB con el método de discretización de Euler, un tiempo de muestreo igual a 0.001, y las soluciones de las LMI correspondientes se han encontrado mediante el solucionador SDPT3 de YALMIP en MATLAB, mientras que el MPC se ha implementado utilizando el toolbox nmpc de MATLAB.

Los resultados de simulación se muestran en las Figuras 1, 2 y 3. En la Figura 1 es posible observar la variación con respecto al tiempo de las trayectorias del sistema que satisfacen las restricciones y convergen a cero. La entrada de control u aplicada al sistema se muestra en la Fig.

2. Además, se muestran las señales de control u_0 y u_1 . Con el fin de mostrar la importancia del ISMC, la Fig. 3 muestra una comparación entre la entrada de control con y sin el ISMC, *i.e.*, $u_1 = 0$. Como resultado, la señal de control u_0 no es capaz de estabilizar el sistema, debido a las perturbaciones externas, y las trayectorias comienzan a crecer dejando el conjunto de restricciones.

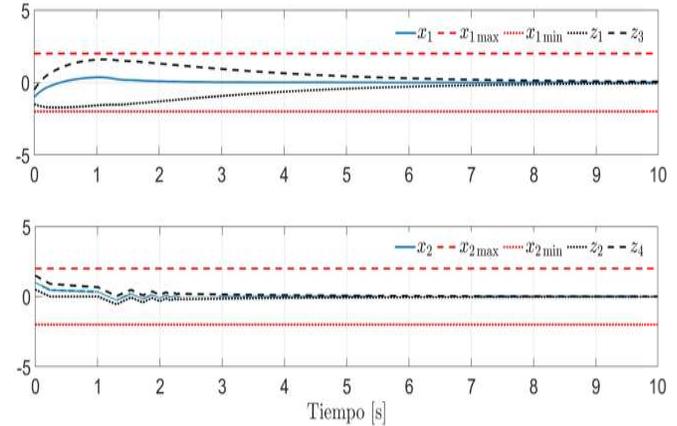


Fig. 1. Evolución de las variables de estado

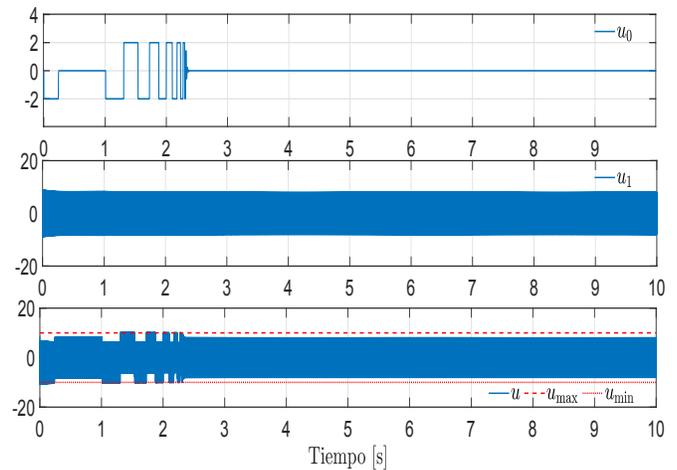


Fig. 2. Evolución con respecto al tiempo de las señales de control

5. CONCLUSIONES

Este trabajo presenta el diseño de un controlador robusto, basado en un enfoque ISMC combinado con un predictor por intervalos mediante un controlador de realimentación de estado basado y un esquema MPC, para una clase de sistemas LPV inciertos. La estrategia de control ISMC permite rechazar las perturbaciones de emparejamiento asegurando el modo deslizante desde el instante inicial. El control es robusto frente a algunas incertidumbres paramétricas, y se logra satisfacer la tarea de control

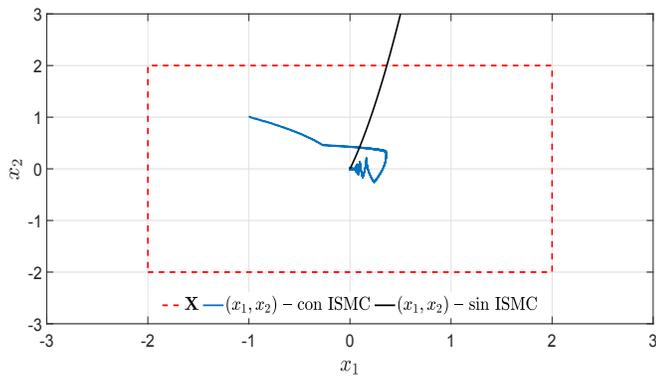


Fig. 3. Comparación del sistema con y sin ISMC

bajo restricciones en la entrada y en el estado. El uso de LMI permite un diseño constructivo de las ganancias del controlador basado en predictor por intervalos, que no depende de la cota superior de las perturbaciones externas. Además, el enfoque de control propuesto garantiza la estabilidad exponencial y la carga computacional es menor gracias a la estructura de conmutación del controlador. Por último, se demuestra la eficacia del método con un ejemplo numérico. Los trabajos futuros se dedicarán a la ampliación de la propuesta a situaciones más complejas.

REFERENCIAS

- Bemporad, Alberto, M. (2007). Robust model predictive control: A survey. In *Robustness in identification and control*, 207–226. Springer.
- Borrelli, F., Bemporad, A., and Morari, M. (2017). *Predictive control for linear and hybrid systems*. Cambridge University Press.
- Castaños, Fernando, F. (2006). Analysis and design of integral sliding manifolds for systems with unmatched perturbations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(5), 853–858.
- Efimov, D., Fridman, L., Raïssi, T., Zolghadri, A., and Seydou, R. (2012). Interval estimation for LPV systems applying high order sliding mode techniques. *Automatica*, 48(9), 2365–2371.
- Efimov, D., Raïssi, T., and Zolghadri, A. (2013). Control of nonlinear and LPV systems: interval observer-based framework. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(3), 773–778.
- Falcone, P., Borrelli, F., Asgari, J., Tseng, H.E., and Hrovat, D. (2007). Predictive active steering control for autonomous vehicle systems. *IEEE Transactions on control systems technology*, 15(3), 566–580.
- Findeisen, R., Imsland, L., Allgower, F., and Foss, B.A. (2003). State and output feedback nonlinear model predictive control: An overview. *European Journal of Control*, 9(2-3), 190–206.
- Funke, J., Brown, M., Erlien, S.M., and Gerdes, J.C. (2016). Collision avoidance and stabilization for autonomous vehicles in emergency scenarios. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 25(4), 1204–1216.
- Galván-Guerra, R., Incremona, G.P., Fridman, L., and Ferrara, A. (2022). Robust multi-model predictive control via integral sliding modes. *IEEE Control Systems Letters*, 6, 2623–2628.
- Incremona, G.P., Ferrara, A., and Magni, L. (2015). Hierarchical model predictive/sliding mode control of nonlinear constrained uncertain systems. *IFAC-PapersOnLine*, 48(23), 102–109.
- Indira Nagesh, C.E. (2014). A multivariable super-twisting sliding mode approach. *Automatica*, 50(3), 984–988.
- Leurent, E., Efimov, D., and Maillard, O.A. (2020). Robust-adaptive interval predictive control for linear uncertain systems. In *2020 59th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 1429–1434. IEEE.
- López-Caamal, Fernando, M. (2019). Generalised multi-variable supertwisting algorithm. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 29(3), 634–660.
- Mayne, D.Q. (2014). Model predictive control: Recent developments and future promise. *Automatica*, 50(12), 2967–2986.
- Mayne, D.Q., Rawlings, J.B., Rao, C.V., and Sokaert, P.O. (2000). Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, 36(6), 789–814.
- Michalska, Hannah y Mayne, D.Q. (1993). Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(11), 1623–1633.
- Moreno, J., Ríos, H., Ovalle, L., and Fridman, L. (2021). Multivariable Super-Twisting algorithm for systems with uncertain input matrix and perturbations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 67(12), 6716–6722.
- Raković, S.V. (2016). Model predictive control: classical, robust, and stochastic. *IEEE Control Systems Magazine*, 36(6), 102–105.
- Reis de Souza, A., Efimov, D., Raïssi, T., and Ping, X. (2021). Robust output feedback mpc for LPV systems using interval observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 67(6), 3188–3195.
- Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L., Levant, A., et al. (2014). *Sliding mode control and observation*, volume 10. Springer.
- Steinberger, M., Castillo, I., Horn, M., and Fridman, L. (2020). Robust output tracking of constrained perturbed linear systems via model predictive sliding mode control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 30(3), 1258–1274.
- Utkin, Vadim, S. (1996). Integral sliding mode in systems operating under uncertainty conditions. In *Proceedings of 35th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 4, 4591–4596. IEEE.
- Utkin, V., Guldner, J., and Shi, J. (1999). Sliding modes in electromechanical systems. *Taylor and Francis*.
- Young, K.D., Utkin, V.I., and Ozguner, U. (1999). A control engineer’s guide to sliding mode control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 7(3), 328–342.