Memorias del 2023 Congreso Nacional de Control Automático
25-27 de Octubre, 2023. Acapulco, Guerrero, México.
Copyright© AMCA, ISSN: 2594-2492

Finite-Time Regulation of Robot Manipulators in the Task-space ⋆

Emmanuel Cruz-Zavala * **Carlos I. Aldana** *
Jaime A. Moreno ** **Emmanuel Nuño** *

* *Department of Computer Science, University of Guadalajara (UdG)*
(e-mails: emmannuel.cruz1692@academicos.udg.mx,
ivan.aldana@academicos.udg.mx,
emmannuel.nuno@academicos.udg.mx)
** *Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México*
(e-mails: JMorenoP@iingen.unam.mx)

Abstract: This paper proposes a control scheme in order to attain finite-time regulation of robots manipulators in the task-space. The stability analysis is carried out by means of strict Lyapunov functions since the well-known results of homogeneous systems cannot be applied directly. Simulations results verify the performance of the proposed control scheme.

Keywords: Finite-Time Control, Task-Space Control, Robot Manipulators.

1. INTRODUCCIÓN

Generalmente, las tareas de regulación en los manipuladores robóticos se especifican como referencias de la *pose* del efector final del robot en el espacio cartesiano o espacio de la tarea. La pose se establece en coordenadas cartesianas de posición y orientación. El problema de regulación puede resolverse usando esquemas de control en espacio articular o los esquemas de control en espacio de la tarea. Estos últimos utilizan los errores de pose en lugar de errores de posición y velocidad articular, Craig (1989). Uno de los enfoques para regulación en base cartesiana es el control de Jacobiano transpuesto, que inicialmente fue reportado en Takegaki and Arimoto (1981). Uno de estos esquemas tiene un término de amortiguamiento de velocidad articular mientras que el otro tiene uno de velocidad cartesiana. La solución a la tarea de regulación requiere que la configuración articular deseada $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^n$ sea tal que la postura del efector final cumpla la relación $\mathbf{y}_d = \mathbf{k}(\mathbf{q}_d)$, siendo la función $\mathbf{k} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^3 \times SO(3)$ la cinemática directa que transforma las posiciones articulares en coordenadas cartesianas de posición y orientación, Kelly and Coello (1998).

A partir de los esquemas propuestos por Takegaki and Arimoto (1981). Distintas extensiones se han reportado en la literatura, Sciavicco and Siciliano (1996); Cheah and Li (2015). Por ejemplo, algunos estudios se han centrado en el análisis de estabilidad con incertidumbres en la matriz Jacobiana y en el desarrollo de esquemas adaptables para hacer frente al desconocimiento de los parámetros del vector de torques gravitacionales, Cheah and Li (2015). Aplicaciones de estos estudios a *control servo-visual* también han sido reportadas.

Los controladores mencionados brindan en el mejor de los casos regulación asintótica, lo que resulta insuficiente en la realización de tareas que requieren una alta precisión. Recientemente, se ha incrementado el interés de desarrollar leyes de control para llevar a cabo las tareas de regulación en tiempo finito. Para el control de robots en tiempo finito en el espacio articular se pueden seguir dos enfoques. Aquellos basados en modos deslizantes terminales Feng et al. (2002); Yu et al. (2005); Galicki (2015); Yu et al. (2021) y aquellos basados en pasividad junto con propiedades de homogeneidad, Hong et al. (2002); Zavala-Río and Fantoni (2014); Cruz-Zavala et al. (2017, 2021a). Comparado con los esquemas de control asintótico, los esquemas de control en tiempo finito han sido menos estudiados en el espacio cartesiano. Por ejemplo, en Galicki (2016), se propone un esquema de control en el espacio de la tarea utilizado modos deslizantes terminales que cuyo primer enfoque necesita de las mediciones de aceleración. Lo cual no es recomendable para la implementación. Cabe resaltar que los controladores basados en Jacobiano traspuesto introducidos por Takegaki and Arimoto (1981) no requieren mediciones de aceleración.

La contribución de este trabajo es extender uno de los reguladores clásicos basados en el Jacobiano transpuesto con el fin de llevar a cabo regulación en el espacio de tareas en tiempo finito. En particular, se extienden uno de los controladores reportados en Cheah et al. (1999, 2003) al caso de tiempo finito.

⋆ Este trabajo ha sido parcialmente apoyado por el Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica, PAPIIT-UNAM proyecto IN106323.

El artículo está organizado de la siguiente manera: en la sección 2 presentamos definiciones básicas y herramientas matemáticas; en la Sección 3 se establece el el problema de control; en la Sección 4 se enuncian los principales resultados y se demuestran en la Sección 6; la Sección 5 proporciona una simulación en un robot manipulador de 2 grados de libertad. Finalmente, las conclusiones se presentan en la Sección 7.

2. PRELIMINARES

Notación: $\mathbb{R}$ representa el conjunto de todos los números reales, $\mathbb{R}_{>0} := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales y para cada $n \in \mathbb{N}$, $\bar{n} := \{1, ..., n\}$, e $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ denota una matriz identidad dimensión $n \times n$. $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}$ es la norma euclidiana de un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Una función $\mathbf{f}(t)$ pertenece a la clase $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}$, si sus derivadas $\dot{\mathbf{f}}, \ddot{\mathbf{f}}, ..., \mathbf{f}^{(\mathbf{k})}$ existen y son continuas. Si $V(\cdot) \in \mathcal{C}^1$ entonces $\nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}) = [\partial_{x_1} V(\mathbf{x}), ..., \partial_{x_n} V(\mathbf{x})]^\top$, con $\partial_{x_i} := \partial/\partial x_i$ e $i \in \bar{n}$. Una matriz (o una función de valor real) que es definida positiva o semidefinida positiva se denota por $\mathbf{A} \succ 0$ y $\mathbf{A} \succeq 0$ (resp. $V(\mathbf{x}) \succ 0$ y $V(\mathbf{x}) \succeq 0$). Los valores propios más pequeño y más grande de una matriz simétrica $\mathbf{A} \succ 0$ están definidos por $\underline{\lambda}\{\mathbf{A}\}$ y $\overline{\lambda}\{\mathbf{A}\}$ y $\|\mathbf{A}\| := \sqrt{\overline{\lambda}\{\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\}}$ denota su norma inducida. La bola abierta centrada en el origen con radio $\delta > 0$ se define como $B_\delta := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \|\mathbf{x}\| < \delta\}$. Se define operador continuo que produce la potencia con signo p de z como $\lceil z \rfloor^p := |z|^p \operatorname{sign}(z)$, para cualquier $z \in \mathbb{R}$ y cualquier $p \in \mathbb{R}_{>0}$, donde $\operatorname{sign}(z)$ es la función estándar *signo*. Se define la función de (p, δ)-saturación como

$$\operatorname{sat}_\delta(\lceil x \rfloor^p) := \begin{cases} \lceil x \rfloor^p, & |x| < \delta \\ \delta^p \operatorname{sign}(x), & |x| \geq \delta \end{cases}$$

para todo $\delta, p \in \mathbb{R}_{>0}$. Cuando esta función es de variable vectorial, debe aplicarse elemento a elemento, es decir, para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\operatorname{sat}_{\boldsymbol{\delta}}(\lceil \mathbf{x} \rfloor^p) := \left[\operatorname{sat}_{\delta_1}(\lceil x_1 \rfloor^p), \ldots, \operatorname{sat}_{\delta_n}(\lceil x_n \rfloor^p)\right]^\top,$$

donde $\delta_i \in \mathbb{R}_{>0}$ es el i-ésimo elemento del vector $\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R}^n$. Cuando todos los elementos $\delta_i = d$, $d \in \mathbb{R}_{>0}$, el vector anterior de define como $\operatorname{sat}_d(\lceil \mathbf{x} \rfloor^p)$. En este sentido, también definimos el vector tangente hiperbólico como

$$\boldsymbol{\psi}_d(\mathbf{x}) := \left[\tanh(x_1/d), \ldots, \tanh(x_n/d)\right]^\top. \tag{1}$$

2.1 Estabilidad en Tiempo Finito

Considere un sistema dinámico descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \tag{2}$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ define el vector de estados y $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ es el campo vectorial (continuo).

Definición 1. Bhat and Bernstein (2000); Bacciotti and Rosier (2005). El origen de (2) es Estable en Tiempo Finito (ETF) si es estable (en el sentido de Lyapunov) y existe una función acotada localmente $T : B_\delta \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}$ (llamada función de asentamiento) tal que para cada $\mathbf{x}_0 \in B_\delta \setminus \{0\}$, cualquier solución $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ de (2) está definida en $t \in [0, T(\mathbf{x}_0))$, y $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ para toda $t \geq T(\mathbf{x}_0)$. Adicionalmente, para $B_\delta = \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es Globalmente Estable en Tiempo Finito (GETF). △

De acuerdo con Bhat and Bernstein (2000), la estabilidad en tiempo finito se puede concluir a través de una Función de Lyapunov (FL) estricta de la siguiente manera.

Lema 1. Sea $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ un punto de equilibrio de (2). Si existen $\delta, \mu \in \mathbb{R}_{>0}$, $p \in (0, 1)$ y una función de Lyapunov continuamente diferenciable $\mathcal{W}(\mathbf{x})$ tal que $\dot{\mathcal{W}}(\mathbf{x}) \leq -\mu \mathcal{W}^p(\mathbf{x})$, para todo $\mathbf{x} \in B_\delta$, entonces $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es ETF.

3. ESTABLECIMIENTO DEL PROBLEMA DE REGULACIÓN

Considere un robot manipulador no redundante de n-grados de libertad que cuenta con solo articulaciones de revolución, sin fricción, descrito por

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{U}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}, \tag{3}$$

donde $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ son las posiciones, velocidades y aceleraciones; $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz de inercia; $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ representa la matriz de Coriolis y efectos centrífugos, definida mediante los símbolos de Christoffel de primera clase; y $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ es la energía potencial debida a la gravedad. El vector de pares de entrada es $\boldsymbol{\tau}$.

El modelo (3) tiene las siguientes propiedades fundamentales Kelly et al. (2005):

Propiedad P1. La matriz de inercia $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ es definida positiva y simétrica, es decir, para todo $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, existen $m_1, m_2 \in \mathbb{R}_{>0}$, tales que $0 \prec m_1 \mathbf{I} \preceq \mathbf{M}(\mathbf{q}) \preceq m_2 \mathbf{I} \prec \infty$.

Propiedad P2. La matrices de inercia y de Coriolis están relacionadas por $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{C}^\top(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, en consecuencia la matriz $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es antisimétrica.

Propiedad 3. Para toda $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, existe $L_c \in \mathbb{R}_{>0}$, tal que el término de Coriolis satisface $\|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}\| \leq L_c \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$.

Propiedad P4. El vector $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ está acotado para todo $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, es decir, existe una constante conocida $k_g \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que, para toda $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{g}(\mathbf{q})\| \leq k_g$.

La posición deseada para el efector final generalmente se especifica en el espacio de tareas. Sea $\mathbf{k}(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la cinemática directa del robot ($n \geq m$), entonces la *pose* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ del efector final viene dada por $\mathbf{y} = \mathbf{k}(\mathbf{q})$.

Suposición 1. La descripción local de la pose del efector final considera una representación mínima de la orientación del efector final.

Como el robot es no redundante la suposición anterior implica $\mathbf{k} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$. Es decir, es posible describir la pose del efector final por medio de un vector $n \times 1$, $n \leq 6$, Kelly and Coello (1998).

La derivada temporal del modelo cinemático directo produce el modelo cinemático diferencial

Copyright© AMCA, ISSN: 2594-2492

$$\dot{\mathbf{y}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{k}(\mathbf{q}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{k}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \tag{4}$$

donde $\mathbf{J}(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz Jacobiana analítica. En general, esta matriz pierde rango en configuraciones singulares. Sin embargo, a lo largo de este documento, suponemos que la matriz $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ posee las siguientes propiedades:

Propiedad P5. La matriz $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ es de rango completo para toda $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ por lo que existen constantes $J_m, J_M \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que $J_m \leq \|\mathbf{J}(\mathbf{q})\| \leq J_M$, $\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.

Propiedad P6. La matriz $\mathrm{d}\mathbf{J}(\mathbf{q})/\mathrm{d}t := \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es globalmente Lipschitz en $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ y uniformemente acotada para toda $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, es decir, existe $L_J \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$\|\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}, \mathbf{x}_1) - \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}, \mathbf{x}_2)\| \leq L_J\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \tag{5}$$

Una vez que se especifica el movimiento en términos de la trayectoria deseada $\mathbf{y}_d$ en el espacio de la tarea, nuestro objetivo de control es lograr que:

$$\lim_{t\to T(\tilde{\mathbf{y}}(0),\dot{\mathbf{y}}(0))} \tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{0}, \qquad \lim_{t\to T(\tilde{\mathbf{y}}(0),\dot{\mathbf{y}}(0))} \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{0},$$

para cualquiera condiciones iniciales $\tilde{\mathbf{y}}(0), \dot{\mathbf{y}}(0) \in \mathbb{R}^n$. Recuerde que $T(\tilde{\mathbf{y}}(0), \dot{\mathbf{y}}(0)) < \infty$ es el tiempo de asentamiento y $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_d$ denota el error de pose en el espacio de tareas. Es decir, se busca que la tarea de regulación en coordenadas cartesianas se logre en tiempo finito.

4. RESULTADO PRINCIPAL

Sean $\mathbf{P} := \mathrm{diag}\{P_i\}$ y $\mathbf{D} := \mathrm{diag}\{D_i\}$, $i \in \bar{n}$, matrices diagonales definidas positivas y sean las constantes $p_1 := \frac{2r_2 - r_1}{r_1}$; $p_2 := \frac{2r_2 - r_1}{r_2}$, donde $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ satisfacen la condición

$$2r_2 > r_1 \geq r_2 > 0. \tag{6}$$

Para el modelo (3), considere el esquema de control que cancela los efectos de la gravedad, el controlador proporcional saturado más amortiguamiento

$$\boldsymbol{\tau}_{JD} = -\mathbf{J}^\top(\mathbf{q})(\mathbf{P}\mathrm{sat}_{\boldsymbol{\delta}_P}(\lceil\tilde{\mathbf{y}}\rfloor^{p_1}) + \mathbf{D}\lceil\dot{\mathbf{y}}\rfloor^{p_2}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \tag{7}$$

Los vectores $\boldsymbol{\delta}_P$ tienen los límites de saturación para cada término de posición cartesiana. Cuando $r_1 = r_2$, (7) se reduce al caso con términos saturados lineales, véase Cheah and Li (2015).

Sustituyendo (7) en la dinámica del robot (3) se obtiene la ecuación de lazo cerrado

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{y}}} =& \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}\\ \ddot{\mathbf{q}} =& -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})\left[\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}^\top(\mathbf{q})\mathbf{P}\mathrm{sat}_{\boldsymbol{\delta}_P}(\lceil\tilde{\mathbf{y}}\rfloor^{p_1})\right.\\ &\left. + \mathbf{J}^\top(\mathbf{q})\,\mathbf{D}\lceil\dot{\mathbf{y}}\rfloor^{p_2}\right],\end{aligned} \tag{8}$$

La prueba del siguiente resultado se presenta en la Sección 6.

Proposición 1. Bajo el conocimiento perfecto del modelo dinámico y la condición $2r_2 > r_1 > r_2$, el controlador (7) proporciona la pose deseada en tiempo finito para matrices ganancia $\mathbf{P} \succ 0$ y $\mathbf{D} \succ 0$. En particular, cuando $r_1 = r_2$, $(\tilde{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{y}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ es Asintóticamente Estable (AE) y además, local y exponencialmente estable. □

Una diferencia importante con los controladores asintóticos reportados en Cheah et al. (1999), es que el objetivo de regulación se logra en tiempo finito. Sin embargo, en Cheah et al. (1999) solo se requiere un aproximado de la matriz Jacobiana, este análisis queda pendiente para el caso de tiempo finito reportado aquí, ya que no es trivial este análisis. Al igual que la extensión y análisis de los controladores reportados Cheah et al. (2003) al caso de tiempo finito, los cuales requieren de la velocidad articular y no de la velocidad cartesiana.

5. EJEMPLO DE SIMULACIÓN

Para mostrar el desempeño del controlador propuesto, se realiza una simulación numérica utilizando un robot manipulador plano con dos grados de libertad. La dinámica del robot que describe la relación entre el movimiento de la articulación y los pares de entrada es

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12} & M_{22} \end{bmatrix}\ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & 0 \end{bmatrix}\dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

siendo $\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2]^\top$ las posiciones articulares, $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \quad \tau_2]^\top$ las entradas de control, y

$$\begin{aligned}
M_{11} &= m_1 l_{c_1}^2 + I_1 + m_2[l_1^2 + l_{c_2}^2 + 2l_1 l_{c_2}\cos(q_2)] + I_2\\
M_{22} &= m_2 l_{c_2}^2 + I_2\\
M_{12} &= m_2 l_1 l_{c_2}\cos(q_2) + m_2 l_{c_2}^2 + I_2\\
C_{11} &= -[m_2 l_1 l_{c_2}\mathrm{sen}(q_2)]\dot{q}_2\\
C_{12} &= -[m_2 l_1 l_{c_2}\mathrm{sen}(q_2)]\dot{q}_1 + C_{11}\\
C_{21} &= [m_2 l_1 l_{c_2}\mathrm{sen}(q_2)]\dot{q}_1\\
g_1 &= m_1 l_{c_1} g\cos(q_1) + m_2 g[l_{c_2}\cos(q_1 + q_2) + l_1\cos(q_1)]\\
g_2 &= m_2 g l_{c_2}\cos(q_1 + q_2)
\end{aligned}$$

siendo m_1, m_2 las masas del primer y segundo eslabón, l_1, l_2 son las longitudes de los eslabones, I_1, I_2 son las inercias, l_{c1}, l_{c2} denotan las longitudes respectivas desde el centroide de cada articulación al centro de gravedad, que para el ejemplo se consideran a la mitad de las longitudes l_1, l_2.

La ecuación cinemática directa es

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1\cos(q_1) + l_2\cos(q_1 + q_2) \\ l_1\mathrm{sen}(q_1) + l_2\mathrm{sen}(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

La matriz Jacobiana del manipulador queda descrita por

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -l_1\mathrm{sen}(q_1) - l_2\mathrm{sen}(q_1 + q_2) & -l_2\mathrm{sen}(q_1 + q_2) \\ l_1\cos(q_1) + l_2\cos(q_1 + q_2) & l_2\cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

Los parámetros reales son: $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 1$ kg, $l_1 = 0.3$ m, $l_2 = 0.2$ m, $l_{c1} = 0.15$ m, $l_{c2} = 0.1$ m, $I_1 = 0.06$ kgm^2 y $I_2 = 0.0133$ kgm^2. Las posiciones deseadas y las condiciones iniciales están dadas por $\mathbf{x}_d = [-0.3, 0.2]^\top$ y $\mathbf{x}(0) = [0.3, 0.2]^\top$. Para las simulaciones se tomó un tiempo de muestreo de $T_s = 0.001$ s y el método de integración de Euler con paso fijo. Consideramos las versiones asintóticas reportadas en Cheah et al. (1999). Comparamos los controladores:

Copyright© AMCA, ISSN: 2594-2492

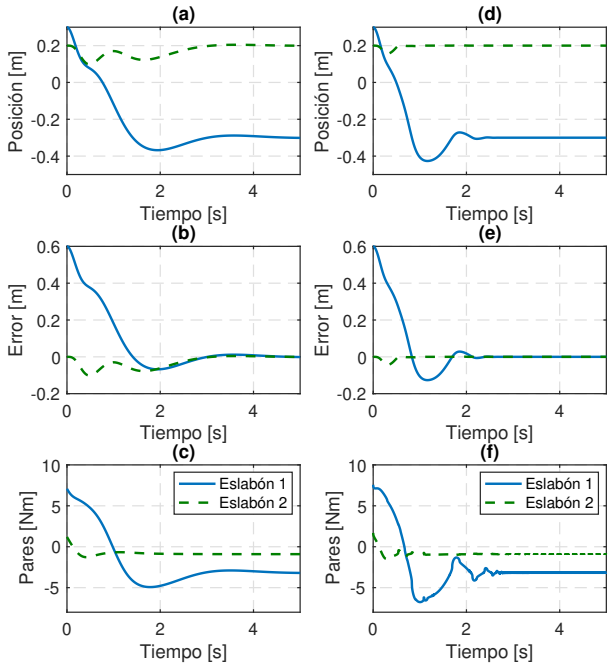


Fig. 1. Resultados: la columna izquierda muestra los resultados con el CA, la columna derecha muestra los resultados con el CF.

CF: Controlador (7) con $r_2 = 1$ y $r_1 = 3/2$. Este es un controlador de tiempo finito.

CA: Controlador (7) con $r_1 = r_2 = 1$. Este controlador coincide con el reportado en Cheah et al. (1999) con matriz Jacobiana bien conocida.

Para los controladores CF y CA se tomaron las ganancias $\mathbf{P} = 15$ y $\mathbf{D} = 5$. Para todos los controladores $\delta = 5$.

La figura 1 muestra la evolución de la posición cartesiana de la punta del segundo estabón del robot y de la posición cartesiana deseada, así como los pares aplicados a cada eslabón. Mientras que los controladores asintóticos llegan a la posición deseada cuando el tiempo tiende a infinito, veáse la fig. 1. (a)-(b), los controladores propuestos logran que la posición deseada se alcance tiempo finito, veáse la fig. 1. (d)-(e). Las figuras 1. (c) y (f) muestran los pares de control para cada eslabón. A la izquierda utilizando el controlador asintótico, y a la derecha utilizando el controlador de tiempo finito. Aunque las señales de control en la figura 1. (f) no son suaves, si son continuas por lo que pueden ser suministradas por los actuadores del robot sin dañarse.

6. PRUEBA DEL RESULTADO PRINCIPAL

Lograr la pose deseada en tiempo finito es equivalente a asegurar la estabilidad en tiempo finito del equilibrio del sistema de lazo cerrado (8). Para probar que el equilibrio $(\tilde{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{y}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ es ETF, se construye una FL estricta. Ya que el principio de Invariancia de LaSalle-Krasovskii y el análisis de homogeneidad no se pueden aplicar al campo vectorial de lazo cerrado. La FL es válida para toda posición $\mathbf{q}$ que cumpla con las propiedades **P5** y **P6**.

La prueba se divide en dos partes: primero se demuestra que el controlador (7) proporciona estabilidad asintótica en $(\tilde{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{y}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ para toda matriz Jacobiana que cumpla con las propiedades **P5** y **P6**, y luego se establece que además la convergencia es en tiempo finito. Antes de iniciar con la prueba, se introducen las propiedades de algunas funciones que son fundamentales en nuestros desarrollos.

La función de saturación posee las siguientes propiedades:

Propiedad S. Para toda $z \in \mathbb{R}$ y $p, \delta, \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}_{>0}$

Sa: $\lceil \mathrm{sat}_\delta(z) \rfloor^p = \mathrm{sat}_\delta(\lceil z \rfloor^p)$ y $\int_0^z \mathrm{sat}_\delta(\lceil x \rfloor^p) dx = s(z, \delta, p)$, donde

$$s(z,\delta,p) := \begin{cases} \frac{1}{p+1}|z|^{p+1} & \text{if } |z| < \delta, \\ \delta^p |z| - \frac{p}{p+1}\delta^{p+1} & \text{if } |z| \geq \delta. \end{cases} \tag{9}$$

Observe que $\delta^p|z| - \frac{p}{p+1}\delta^{p+1} \geq \frac{1}{p+1}\delta^p|z|$ para toda $|z| \geq \delta$.

Sb: $|\tanh(1)\mathrm{sat}_\delta(z)|^{p+1} \leq |\delta \tanh\left(\frac{z}{\delta}\right)|^{p+1} \leq |\mathrm{sat}_\delta(z)|^{p+1} \leq (p+1)s(z,\delta,p)$, donde $\tanh(\cdot)$ es la tangente hiperbólica.

Sc: (i) $|\mathrm{sat}_{\delta_1}(z)| \leq |\mathrm{sat}_{\delta_2}(z)| \leq (\delta_2/\delta_1)|\mathrm{sat}_{\delta_1}(z)|$, para cada $\delta_1 < \delta_2$; (ii) $|\mathrm{sat}_{\delta_2}(z)| \leq |\mathrm{sat}_{\delta_1}(z)| \leq (\delta_1/\delta_2)|\mathrm{sat}_{\delta_2}(z)|$, para cada $\delta_2 < \delta_1$; (iii) $|\mathrm{sat}_{\delta_1}(z)| \leq (\delta_1/\mathrm{sat}_{\delta_2}(\delta_1))|\mathrm{sat}_{\delta_2}(z)|$, para toda $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}_{>0}$. ◁

Propiedad P7. Para toda $p \in (0, 1]$, existe $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, tal que

$$|x|^{p+1} \geq \begin{cases} \delta^{p-1}|x|^2, & \text{si} \quad |x| < \delta \\ \delta^p |x|, & \text{si} \quad |x| \geq \delta. \end{cases}$$

Propiedad P8. El vector definido en (1) satisface

P8a: $\|\boldsymbol{\psi}_{\delta_m}^\top(\tilde{\mathbf{q}})\| \leq \sqrt{n}$.

P8b: $\|\delta_m \boldsymbol{\psi}_{\delta_m}^\top(\tilde{\mathbf{q}})\|^p \leq \|\mathrm{sat}_{\delta_m}(\tilde{\mathbf{q}})\|^p \leq \|\tilde{\mathbf{q}}\|^p$.

P8c: $\|\delta_m \dot{\boldsymbol{\psi}}_{\delta_m}^\top(\tilde{\mathbf{q}})\| \leq \|\dot{\mathbf{q}}\|$.

Propiedad P9. Si $s(\mathbf{x}, \boldsymbol{\delta}; p) := \sum_{i=1}^{n} s(x_i, \delta_i, p)$, entonces

$$s(\mathbf{x}, \boldsymbol{\delta}, p) \geq s_L := \begin{cases} \frac{1}{p+1}\|\mathbf{x}\|^{p+1}, & \text{si} \quad \|\mathbf{x}\| < \delta_m \\ \frac{\delta_m^p}{p+1}\|\mathbf{x}\|, & \text{si} \quad \|\mathbf{x}\| \geq \delta_m \end{cases}.$$

El siguiente resultado permite construir una función semidefinida positiva, veáse Cruz-Zavala et al. (2021b).

Lema 2. Para toda $x, y \in \mathbb{R}$ y $a, b, c, d, r_1, r_2 \in \mathbb{R}_{>0}$, la función $v_0(x,y) = (a|y|^2 + b|x|^{2r_2/r_1})^{\frac{r_1+r_2}{2r_2}} - dc|x||y|$, es no negativa si y solo si $d^2 \leq \frac{a(r_1+r_2)}{c^2 r_2}\left(\frac{b(r_1+r_2)}{r_1}\right)^{\frac{r_1}{r_2}}$. Además, $v_0(x,y) \leq 2(a|y|^2 + b|x|^{2r_2/r_1})^{(r_1+r_2)/(2r_2)}$. ◁

Recordemos la Desigualdad de Young.

Copyright© AMCA, ISSN: 2594-2492

Lema 3. (Desigualdad de Young) Para toda $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}, c > 0, a > 1, b > 1$ siendo $a^{-1} + b^{-1} = 1$, se cumple la desigualdad $xy \leq \frac{c^a}{a}x^a + \frac{1}{bc^b}y^b$. ◁

Lema 4. (Bernstein (2002)). Para toda $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, se cumplen las siguientes desigualdades: $(\sum_{i=1}^n x_i)^q \leq \sum_{i=1}^n x_i^q \leq n^{1-q}(\sum_{i=1}^n x_i)^q$, para toda $q \in (0, 1]$; y $n^{1-q}(\sum_{i=1}^n x_i)^q \leq \sum_{i=1}^n x_i^q \leq (\sum_{i=1}^n x_i)^q$, para toda $q \geq 1$. ◁

Para los análisis subsecuentes defina $P_m = \min\{P_i\}$, $P_M := \max_{i\in\bar{n}}\{K_i\}$, $D_m = \min_{i\in\bar{n}}\{D_i\}$, $D_M = \max_{i\in\bar{n}}\{D_i\}$, $\delta_{Pm} := \min_{i\in\bar{n}}\{\delta_{Pi}\}$, $\delta_m := \min_{i\in\bar{n}}\{\delta_i\}$, y $\varepsilon := pD_m\left(\frac{m_{y1}}{2}\right)^{p-1}$, $k_t := \tanh(1)$ y $\gamma := \frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}$.

Para el sistema de lazo cerrado (8) considere la siguiente candidata a función de Lyapunov (suave)

$$\mathcal{V}(\tilde{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{q}}) := \gamma_2\mathcal{H}^p + \gamma_1\Psi_1, \tag{10}$$

donde $\Psi_1 := \mathcal{H}^p + d_1\delta_{Pm}\boldsymbol{\psi}_{\delta_{Pm}}^\top(\tilde{\mathbf{y}})\,\mathbf{J}^{-\top}(\mathbf{q})\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$,

$$\mathcal{H}(\tilde{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{q}}) = \tfrac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^\top\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \textstyle\sum_{i=1}^n K_i s(\tilde{y}_i, \delta_{Pi}, p_1) \tag{11}$$

$s(\tilde{y}_i, \delta_{Pi}, p_1)$ se define en (9), y

$$d_1^2 \leq \frac{m_{y1}(r_1+r_2)}{2m_{y2}^2 r_2}\left[\frac{P_m(r_1+r_2)}{(1+p_1)r_1}\right]^{\frac{r_1}{r_2}}. \tag{12}$$

Siendo $m_{y2} = \overline{\lambda}\{\mathbf{M}_y\}$, $m_{y1} = \underline{\lambda}\{\mathbf{M}_y\}$, con $\mathbf{M}_y = \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-\top}\mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})$, constantes positivas, y el exponente p se define como

$$p := \frac{r_1+r_2}{2r_2} \geq 1. \tag{13}$$

La función $\mathcal{H}$ es definida positiva y radialmente no acotada debido a la propiedad **P1**, y a la propiedad **P9** junto con la condición $\mathbf{P} \succ 0$. Las constantes $\gamma_1, \gamma_2, d_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ solo se requieren para el análisis de estabilidad y no se emplean para la sintonización del controlador.

6.1 Parte 1: Estabilidad asintótica

Primero, se muestra que $\mathcal{V}$ es una función definida positiva y radialmente no acotada. Debido a (4) y **P5**, tenemos que (11) se puede escribir como $\mathcal{H} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{y}}^\top\mathbf{M}_y\dot{\mathbf{y}} + \sum_{i=1}^n P_i s(\tilde{y}_i, \delta_{Pi}, p_1)$. Además, $\mathcal{H} \geq \mathcal{H}_l \triangleq \frac{m_{y1}}{2}||\dot{\mathbf{y}}||^2 + \frac{P_m}{p_1+1}||\mathrm{sat}_{\delta_{Pm}}(\tilde{\mathbf{y}})||^{p_1+1}$ siendo $\mathcal{H}_{1l} \succ 0$. Con esta expresión, de (4) y la propiedad **Sb**, se obtiene que $\mathcal{V} \geq \gamma_2\mathcal{H}^p + \gamma_1 R$, donde el término $R \triangleq \mathcal{H}_l^p - d_1 m_{y2}\|\mathrm{sat}_{\delta_{Pm}}(\tilde{\mathbf{y}})\|\|\dot{\mathbf{y}}\|$. El Lema 2 asegura que el término R es no negativo eligiendo d_1 como en (12) y por lo tanto, $\mathcal{V}$ es definida positiva. Además, $\gamma_2\mathcal{H}^p \leq \mathcal{V}$, y como $\mathcal{H}^p$ es radialmente no acotada, $\mathcal{V}$ también es radialmente no acotada.

La derivada temporal de $\mathcal{V}(\tilde{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{q}})$ a lo largo de (8) es

$$\begin{aligned}\frac{\dot{\mathcal{V}}}{\gamma_1+\gamma_2} &= -p\mathcal{H}^{p-1}\dot{\mathbf{y}}^\top\mathbf{D}\lceil\dot{\mathbf{y}}\rfloor^{p_2} \\ &\quad - \gamma d_1\delta_{Pm}\boldsymbol{\psi}_{\delta_{Pm}}^\top(\tilde{\mathbf{y}})\,\mathbf{P}\mathrm{sat}_{\boldsymbol{\delta}_P}(\lceil\tilde{\mathbf{y}}\rfloor^{p_1}) \\ &\quad + \gamma d_1\delta_{Pm}\dot{\boldsymbol{\psi}}_{\delta_{Pm}}^\top(\tilde{\mathbf{y}})\,\mathbf{J}^{-\top}(\mathbf{q})\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \\ &\quad + \gamma d_1\delta_{Pm}\boldsymbol{\psi}_{\delta_{Pm}}^\top(\tilde{\mathbf{y}})\,\mathbf{J}^{-\top}(\mathbf{q})\mathbf{C}^\top(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \\ &\quad + \gamma d_1\delta_{Pm}\boldsymbol{\psi}_{\delta_{Pm}}^\top(\tilde{\mathbf{y}})\,\dot{\mathbf{J}}^{-\top}(\mathbf{q})\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \\ &\quad - \gamma d_1\delta_{Pm}\boldsymbol{\psi}_{\delta_{Pm}}^\top(\tilde{\mathbf{y}})\,\mathbf{D}\lceil\dot{\mathbf{y}}\rfloor^{p_2}.\end{aligned}$$

De la propiedad **P1** y el Lema 4 obtenemos la siguiente cota

$$p\mathcal{H}^{p-1}\dot{\mathbf{y}}^\top\mathbf{D}\lceil\dot{\mathbf{y}}\rfloor^{p_2} \geq \varepsilon\|\dot{\mathbf{y}}\|^2.$$

Usando las propiedades **Sb**,**P1**, **P3**, **PS**, **P5-P8** y el Lema 4, se acotan los términos de signo indefinido en[1] $\dot{\mathcal{V}}$ como sigue

$$\begin{aligned}&\delta_{Pm}\dot{\boldsymbol{\psi}}_{\delta_{Pm}}^\top(\tilde{\mathbf{y}})\,\mathbf{J}^{-\top}(\mathbf{q})\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \leq m_{y2}\|\dot{\mathbf{y}}\|^2, \\ &\boldsymbol{\psi}_{\delta_{Pm}}^\top(\tilde{\mathbf{y}})\,\mathbf{J}^{-\top}(\mathbf{q})\mathbf{C}^\top(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \leq \sqrt{n}L_c\|\dot{\mathbf{y}}\|^2/J_m^3, \\ &\boldsymbol{\psi}_{\delta_{Pm}}^\top(\tilde{\mathbf{y}})\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{J}^{-\top}(\mathbf{q})\right)\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \leq \sqrt{n}L_J m_{y2}\|\dot{\mathbf{y}}\|^2/J_m, \\ &\delta_{Pm}\boldsymbol{\psi}_{\delta_{Pm}}^\top(\tilde{\mathbf{y}})\,\mathbf{D}\lceil\dot{\mathbf{y}}\rfloor^{p_2} \leq n^{\frac{1-p_2}{2}}D_M\|\mathrm{sat}_{\delta_{Pm}}(\tilde{\mathbf{y}})\|\|\dot{\mathbf{y}}\|^{p_2}, \\ &\delta_{Pm}\boldsymbol{\psi}_{\delta_{Pm}}^\top(\tilde{\mathbf{y}})\,\mathbf{P}\mathrm{sat}_{\boldsymbol{\delta}_P}(\lceil\tilde{\mathbf{y}}\rfloor^{p_1}) \geq k_t P_m\|\mathrm{sat}_{\delta_{Pm}}(\tilde{\mathbf{y}})\|^{p_1+1}.\end{aligned}$$

Aplicando el Lema 3, con $a = p_1 + 1$, $b = \frac{2}{p_2}$, $x = \|\mathrm{sat}_{\delta_{Pm}}(\tilde{\mathbf{y}})\|$ y $y = \|\dot{\mathbf{y}}\|^{p_2}$, se llega a

$$\begin{aligned}\|\mathrm{sat}_{\delta_{Pm}}(\tilde{\mathbf{y}})\|\|\dot{\mathbf{y}}\|^{p_2} &\leq \frac{p_2}{2c_1^{\frac{2}{p_2}}}\|\dot{\mathbf{y}}\|^2 \\ &\quad + \frac{c_1^{p_1+1}}{p_1+1}\|\mathrm{sat}_{\delta_{Pm}}(\tilde{\mathbf{y}})\|^{p_1+1}.\end{aligned}$$

Considerando todas estas cotas y agrupando términos obtenemos $\dot{\mathcal{V}} \leq -(\gamma_1+\gamma_2)v_1$, donde

$$v_1 := \gamma d_1\mu_1\|\mathrm{sat}_{\delta_{Pm}}(\tilde{\mathbf{y}})\|^{p_1+1} + \mu_2\|\dot{\mathbf{y}}\|^2,$$

con $\mu_1 := P_m k_t - \frac{1}{p_1+1}D_M n^{\frac{1-p_2}{2}}c_1^{p_1+1}$ y $\mu_2 := \varepsilon - \gamma d_1 m_{y2} - \gamma d_1\delta_{Pm}\Lambda - \gamma\frac{1}{2c_1^{\frac{2}{p_2}}}d_1 D_M n^{\frac{1-p_2}{2}}p_2$, siendo $\Lambda := \sqrt{n}(L_c/J_m^3 + L_J m_{y2}/J_m)$.

Resolviendo simultáneamente las desigualdades con $\mu_1 > 0$ y $\mu_2 > 0$ para c_1, se obtiene

$$\begin{aligned}&\left(\frac{(p_1+1)P_m k_t}{D_M n^{\frac{1-p_2}{2}}}\right)^{\frac{1}{p_1+1}} > c_1 \\ &> \left(\frac{\gamma D_M n^{\frac{1-p_2}{2}}p_2}{2(\varepsilon/d_1 - \gamma m_{y2} - \gamma\delta_{Pm}\Lambda)}\right)^{\frac{p_2}{2}}.\end{aligned}$$

Esto implica que γ tiene que satisfacer $\gamma < \kappa_1$, donde

$$\kappa_1 := \frac{d_1}{\varepsilon}\left[\frac{D_M n^{\frac{1-p_2}{2}}p_2}{2\left(\frac{(p_1+1)P_m k_t}{D_M n^{\frac{1-p_2}{2}}}\right)^{\frac{2}{p_2(p_1+1)}}} + m_{y2} + \delta_{Pm}\Lambda\right]^{-1}.$$

[1] Debido a Propiedad **P5**, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}}\mathbf{J}^{-1}$, y $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{J}^{-\top}(\mathbf{q})\right)\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{J}^{-\top}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{J}}^\top(\mathbf{q})\mathbf{M}_y(\mathbf{q})\dot{\mathbf{y}}$

Copyright© AMCA, ISSN: 2594-2492

Finalmente, seleccionando γ_2 lo suficientemente grande se asegura que $\gamma < \kappa_1$ y por lo tanto $\mathcal{V}(\tilde{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{q}})$ es una FL estricta. Se concluye que $(\tilde{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{y}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ es AE.

6.2 Parte 2: Convergencia en tiempo finito

Para este punto, restringimos el análisis a las trayectorias contenidas en el conjunto

$$\Omega := \{\tilde{\mathbf{y}}^\top \in B_{\delta_{Pm}}\} \cap \{[\tilde{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{y}}]^\top \in \mathbb{R}^{2n} : \bar{w}_1 \leq 1\}, \quad (14)$$

donde $\bar{w}_1$ es el cota superior de $\mathcal{H} \leq \bar{w}_1$ en este conjunto, dada por

$$\bar{w}_1 := \frac{1}{2} m_{y2} \|\dot{\mathbf{y}}\|^2 + \frac{P_M}{p_1 + 1} \|\text{sat}_{\delta_{Pm}}(\tilde{\mathbf{y}})\|^{p_1+1}.$$

Usando este hecho y el Lema 2 obtenemos que

$$\mathcal{V} \leq (\gamma_2 + 2\gamma_1)\bar{w}_1^p.$$

Seleccionando $\kappa_2 := \min\{\frac{\mu_1 \gamma d_1 (p_1+1)}{P_M}, \frac{2\mu_2}{m_{y2}}\}$ se asegura que $\kappa_2 \bar{w}_1 \leq v_1$. Por lo tanto, $-\dot{\mathcal{V}}_{G1} \geq (\gamma_1 + \gamma_2) v_1 \geq (\gamma_1 + \gamma_2)\kappa_2 \bar{w}_1 \geq \frac{(\gamma_1+\gamma_2)}{(2\gamma_1+\gamma_2)^{1/p}} \kappa_2 \mathcal{V}_{G1}^{\frac{1}{p}}$. Entonces,

$$\dot{\mathcal{V}} \leq -\frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{(2\gamma_1 + \gamma_2)^{1/p}} \kappa_2 \mathcal{V}^{\frac{1}{p}}.$$

Como $r_1 > r_2$ implica $\frac{1}{p} = \frac{2r_2}{r_1+r_2} < 1$, aplicando el Lema 1 se concluye que $(\tilde{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{y}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ es ETF.

En el caso cuando $r_1 = r_2$ se tiene $p = 1$ y

$$\dot{\mathcal{V}} \leq -\frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{(2\gamma_1 + \gamma_2)} \kappa_2 \mathcal{V}$$

que demuestra que $(\tilde{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{y}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ es local y exponencialmente estable, veáse Theorem 5.2 de Bacciotti and Rosier (2005).

7. CONCLUSIÓN

Muchos de los trabajos reportados en la literatura presentan propuestas de controladores de tiempo finito diseñados para hacer regulación en el espacio articular de un robot manipulador. En este trabajo se extienden algunos de estos controladores para realizar regulación en tiempo finito en el espacio de tareas. Como trabajo futuro se consideran las extensiones de los controladores propuestos al caso en que solo se conozca un aproximado de la matriz Jacobiana, y al caso con pares acotados. Así como las versiones en las que exista retroalimentación de la velocidad articular en vez de la velocidad cartesiana.

REFERENCES

Bacciotti, A. and Rosier, L. (2005). *Liapunov functions and stability in control theory*. Springer-Verlag, New York, 2nd edition.

Bernstein, D. (2002). *Matrix Mathematics: theory, facts, and formulas*. Princeton University Press, New Jersey.

Bhat, S. and Bernstein, D. (2000). Finite-time stability of continuous autonomous systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38, 751–766.

Cheah, C.C., Hirano, M., Kawamura, S., and Arimoto, S. (2003). Approximate Jacobian control for robots with uncertain kinematics and dynamics. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 19(4), 692–702.

Cheah, C.C., Kawamura, S., and Arimoto, S. (1999). Feedback control for robotic manipulator with an uncertain Jacobian matrix. *Journal of Robotic Systems*, 16(2), 119–134.

Cheah, C.C. and Li, X. (2015). *Sensory feedback Feedback Control of Robot Manipulators*. Springer Verlag.

Craig, J. (1989). *Introduction to Robotics: Mechanics and control*. Addison Wesley, Reading, MA, second edition.

Cruz-Zavala, E., Nuño, E., and Moreno, J. (2017). Continuous finite-time regulation of Euler-Lagrange systems via energy shaping. *International Journal of Control*, 93(12), 2931–2940.

Cruz-Zavala, E., Nuño, E., and Moreno, J. (2021a). Strict Lyapunov functions for finite-time control of robot manipulators. *International Journal of Control*, 94(11), 3112–3122.

Cruz-Zavala, E., Nuño, E., and Moreno, J.A. (2021b). Robust trajectory-tracking in finite-time for robot manipulators using nonlinear proportional-derivative control plus feed-forward compensation. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 31(9), 3878–3907.

Feng, Y., Yu, X., and Man, Z. (2002). Non-singular terminal sliding mode control of rigid manipulators. *Automatica*, 38, 2159–2167.

Galicki, M. (2015). Finite-time control of robotic manipulators. *Automatica*, 51, 49–54.

Galicki, M. (2016). Finite-time trajectory tracking control in a task space of robotic manipulator. *Automatica*, 67(1), 165–170.

Hong, Y., Xu, Y., and Huang, J. (2002). Finite-time control for robot manipulators. *Systems & Control Letters*, 46, 243–253.

Kelly, R. and Coello, A. (1998). Analysis and experimentation of transpose Jacobian-based cartesian regulators. *Robotica*, 17, 303–312.

Kelly, R., Santibáñez, V., and Loría, A. (2005). *Control of Robot Manipulators in Joint Space*. Springer-Verlag, London, U.K.

Sciavicco, L. and Siciliano, B. (1996). *Modeling and Control of Robot Manipulators*. McGraw-Hill, New York, second edition.

Takegaki, M. and Arimoto, S. (1981). A new feedback method for dynamic control of manipulators. *ASME. I. Dyn. Syst. Meas. Control*, 103, 119–125.

Yu, S.H., Yu, X.H., Shirinzadeh, B., and Man, Z. (2005). Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode. *Automatica*, 41(11), 1957–1964.

Yu, X., Feng, Y., and Man, Z. (2021). Terminal sliding mode control-an overview. *IEEE Open Journal of the Industrial Electronics Society*, 2, 36–52.

Zavala-Río, A. and Fantoni, I. (2014). Global finite-time stability characterized through a local notion of homogeneity. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59(2), 471–477.

Copyright© AMCA, ISSN: 2594-2492