

# Sampled Robust Control for Constrained Unicycle Mobile Robots <sup>\*</sup>

A. Gutiérrez <sup>\*</sup> H. Ríos <sup>\*,\*\*\*</sup> M. Mera <sup>\*\*</sup> D. Efimov <sup>\*\*\*\*</sup>  
and R. Ushirobira <sup>\*\*\*\*</sup>

<sup>\*</sup> *Tecnológico Nacional de México/I.T. La Laguna, 27000, México.  
(e-mails: m.agutierrez@correo.itlalaguna.edu.mx,  
hriosb@lalaguna.tecnm.mx).*

<sup>\*\*</sup> *Instituto Politécnico Nacional, ESIME-UPT, 07340, México.  
(e-mail: mmerah@ipn.mx)*

<sup>\*\*\*</sup> *CONAHCYT, Investigadoras e Investigadores por México, 03940,  
México.*

<sup>\*\*\*\*</sup> *Inria-Lille Nord Europe, Université de Lille CNRS, UMR  
9189-CRISTAL, F-59000, France. (e-mails: denis.efimov@inria.fr,  
andrey.polyakov@inria.fr and rosane.ushirobira@inria.fr).*

---

**Abstract:** The aim of this paper is to design a sampled robust controller for the trajectory tracking problem in constrained unicycle mobile robots. The proposed switched controller is composed by an aperiodic control law and a periodic control law. The aperiodic control consists on an state-feedback-based event-triggered control which is designed by means of the attractive ellipsoid method and the barrier Lyapunov function. The periodic sampled control part is designed taking into account a maximum sampling time. A safe set where the state constraints are not violated, and a switching set that determines the region where each part of the controller is active are provided. The proposed strategy guarantees the input-to-state stability of the tracking error dynamics with respect to external disturbances. The feasibility of the proposed approach is demonstrated through simulation results.

*Keywords:* Unicycle Mobile Robots; Sampled Control; State Constraints.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Los robots móviles unicycle (UMRs) han sido ampliamente estudiados debido a su capacidad de moverse libremente de un punto a otro y a que pueden ser utilizados en una gran diversidad de tareas (ver, *e.g.*, Zhang and Liu (2014) y Khaledyan et al. (2015)). Sin embargo, al tratarse de un sistema real, los UMRs se mueven en espacios de trabajo restringidos y pueden tener limitaciones de energía, *i.e.*, deben lidiar con restricciones en los estado y en la entrada de control (ver, *e.g.*, Chen et al. (2014) y Dai et al. (2021)). En la mayoría de los casos, se utiliza una plataforma digital para el control de los UMRs lo que implica que existe un ancho de banda limitado, y por lo tanto se limitan la cantidad de actualizaciones de la entrada de control para ahorrar recursos de comunicación. Para lidiar con este problema, una técnica conocida es

el control activado por eventos (ver, *e.g.*, Huang et al. (2019), Liu and Jiang (2015), y Zhu (2018)). Su principal característica es que las acciones de control se actualizan solo cuando ocurren eventos bien definidos, lo que implica un tiempo de muestreo aperiódico Tabuada (2007).

Con respecto al diseño de controladores para UMRs con restricciones en la entrada de control, en Thomas et al. (2021), se resuelve el problema de estabilización de un UMR con saturación en los actuadores. Se propone un control por modos deslizante en tiempo discreto. Se garantiza que las trayectorias del sistema convergen en tiempo finito al origen. En Zhang et al. (2022), se propone un controlador muestreado basado en una técnica de linealización por realimentación dinámica para UMRs con errores de medición y saturación en la entrada de control. Sin embargo, no se toman en cuenta perturbaciones externas. Por otro lado, el control por modelo predictivo (MPC) es una técnica que se utiliza para resolver el problema de seguimiento de trayectoria en UMRs restringidos. Por ejemplo, en Sun et al. (2018), se propone MPC para el seguimiento de trayectorias de un UMR con restricciones en la entrada de control y afectado por perturbaciones aditivas. Este algoritmo proporciona

---

<sup>\*</sup> Este trabajo fue apoyado por los proyectos SEP-CONACYT-ANUIES-ECOS NORD 315597 y ECOS NORD M20M04. A. Gutiérrez agradece el apoyo de CONAHCYT CVU 932774. H. Ríos agradece el apoyo de CONAHCYT IxM CVU 270504 Proyecto 922, y de Proyectos TecNM. M. Mera agradece el apoyo del proyecto IPN-SIP 20240338.

estabilidad Entrada-Estado (ISS) de la dinámica de error de seguimiento. En Ke et al. (2017), se propone un MPC para el problema de estabilización de un UMR restringido. Sin embargo, es necesario transformar el sistema a una forma de cadena de integradores para garantizar convergencia exponencial a cero de las trayectorias del sistema. En los trabajos mencionados anteriormente, se necesita una gran demanda computacional debido a la implementación del MPC. Además, en la mayoría de los trabajos anteriores no se consideran perturbaciones externas, y cuando se consideran, estas no tienen un significado físico en los UMRs, además que no se toman en cuenta restricciones de comunicación.

Con respecto al diseño de controladores para UMRs con restricciones de comunicación, en Xie et al. (2020), se propone un controlador activado por eventos para el problema de seguimiento de trayectoria. Sin embargo, para garantizar la estabilidad exponencial de la dinámica del error de seguimiento es necesario linealizar el sistema. Además, este trabajo no considera perturbaciones externas ni restricciones en los estados ni en la entrada de control. En Postoyan et al. (2015), se propone un controlador activado por eventos para estabilizar las trayectorias de un UMR. El enfoque propuesto se compone de la síntesis de un controlador y de definir una condición de activación mientras se garantiza que existe un tiempo mínimo entre las actualizaciones de la ley de control. Sin embargo, los trabajos anteriores no toman en cuenta restricciones en los estados ni en la entrada de control, además solo consideran el caso no perturbado.

Motivado por los problemas mencionados anteriormente, *i.e.*, la presencia de perturbaciones externas, restricciones del sistema y de comunicación, se propone un controlador robusto muestreado conmutado para resolver el problema de seguimiento de trayectoria en UMRs con perturbaciones, restricciones de comunicación, en los estados y en la entrada de control. El esquema de control propuesto está compuesto por un controlador con muestreo aperiódico y un controlador con muestreo periódico. El controlador aperiódico se basa en un controlador por realimentación de estado activado por eventos diseñado a través del método del elipsoide atractivo (AEM) y la función barrera de Lyapunov. Mientras que control con muestreo periódico se basa en un controlador de realimentación de estado que se diseña utilizando una función Lyapunov-Krasovskii. Además, se caracteriza un conjunto seguro, donde no se transgreden las restricciones en los estados, así como un conjunto de conmutación que define la región donde cada parte del control está activa. Se garantiza que el error de seguimiento es ISS con respecto a las perturbaciones externas.

**Notación:** Se denominan las funciones trigonométricas  $\sin(\theta)$ ,  $\cos(\theta)$ , y  $\text{sinc}(\theta)$  como  $s(\theta)$ ,  $c(\theta)$ , y  $sc(\theta)$ , respectivamente. El valor absoluto de un número entero se representa como  $|\cdot|$ , mientras que la norma Euclídeana de un vector  $z \in \mathbb{R}^n$  se denomina como  $\|z\|$ , y para una matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , la norma espectral es  $\|A\| =$

$\sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$ , donde  $\lambda_{\max}$  es el máximo eigenvalor de la matriz simétrica  $A^T A$ . Una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es Metzler cuando todos sus elementos fuera de la diagonal son no negativos. El término  $\text{He}(A)$  denota  $A + A^T$ , para  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . El conjunto  $\mathcal{E}(R) := \{x(t) \in \mathbb{R}^n : x^T(t) R x(t) \leq 1\}$  es un elipsoide centrado en el origen caracterizado por la matriz  $0 < R^T = R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Se considera el modelo cinemático perturbado de un UMR (ver, Fig. 1):

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{d}_1(t) & 0 \\ 0 & \bar{d}_2(t)c(\theta(t)) \\ 0 & \bar{d}_2(t)s(\theta(t)) \end{pmatrix} u(t), \quad (1a)$$

$$u(t) = u(t_k), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (1b)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}$  y  $y(t) \in \mathbb{R}$  corresponden al punto medio entre las ruedas y  $\theta(t) \in \mathbb{R}$  representa el ángulo de orientación del UMR. El vector  $u(t) = (\omega(t) \ v(t))^T$  representa las entradas de control muestreadas, en cada instante de tiempo  $t_k$ , para todo  $k \in N$ ; donde los términos  $v(t)$  y  $\omega(t)$  son la velocidad lineal y angular del UMR. Los instantes de muestreo  $t_k$  aumentan de manera monótona, tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = +\infty$ , y  $h(t) := t_{k+1} - t_k \in [h_{\min}, h_{\max}]$ , donde  $h_{\min}, h_{\max} > 0$  son el mínimo y máximo intervalo de muestreo, respectivamente; y  $t_0 = 0$ . Note que  $h_{\min}$  es el mínimo intervalo de muestreo permitido por la plataforma del UMR mientras que el instante de muestreo  $t_k$  será definido por el control muestreado propuesto. Se toma en cuenta que  $\bar{d}_1(t) = 1 + d_1(t)$  y  $\bar{d}_2(t) = 1 + d_2(t)$ , donde  $d_1(t)$  y  $d_2(t)$  representan perturbaciones variantes en el tiempo, que multiplican a las entradas de control. Se asume que las perturbaciones  $d_i(t)$  son desconocidas pero acotadas, *i.e.*,  $-1 < d_i(t) \leq d_{\max} < 1$ , para  $i = 1, 2$ , con una constante  $d_{\max} > 0$ . La restricción  $d_i(t) > -1$  asegura que la perturbación no genere un cambio de signo en las señales de control.

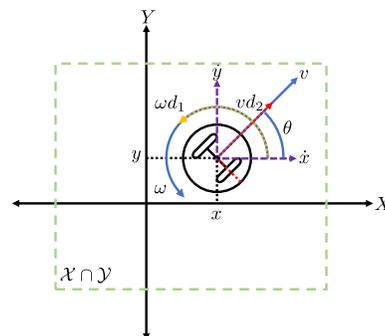


Fig. 1. Diagrama esquemático de un UMR perturbado

El objetivo es diseñar un control muestreado para el seguimiento de trayectoria en un UMR afectado por perturbaciones multiplicativas y teniendo en cuenta restricciones de comunicación, *i.e.*, un tiempo de muestreo mínimo  $h_{\min}$  en el que la señal de control puede ser

enviada al UMR; restricciones en los estados y en la entrada de control, *i.e.*,  $x(t) \in \mathcal{X} := [x_{\min}, x_{\max}] \subset \mathbb{R}$ ,  $y(t) \in \mathcal{Y} := [y_{\min}, y_{\max}] \subset \mathbb{R}$ ,  $v(t) \in \mathcal{V} := [-v_{\max}, v_{\max}] \subset \mathbb{R}$ , y  $\omega(t) \in \mathcal{W} := [-\omega_{\max}, \omega_{\max}] \subset \mathbb{R}$ , para todo  $t \geq t_0$ , para unos conjuntos dados  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$ ,  $\mathcal{V}$ , y  $\mathcal{W}$ .

### 3. PRELIMINARES

Se considera el siguiente sistema

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad (2)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el estado y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continua con respecto a  $x$ .

**Definición 1.** (Tee et al., 2009). Sea  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto con frontera  $\partial\mathcal{D}$ , y  $V : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}_+$  una función positiva definida y continuamente diferenciable. Si  $V(x(t)) \leq b$  para todo  $t \geq 0$  a lo largo de la solución del sistema (2), para algún  $b \in \mathbb{R}_+$  y cualquier  $x(0) \in \mathcal{D}$ , y  $\lim_{x \rightarrow \partial\mathcal{D}} V(x) \rightarrow +\infty$ , entonces  $V$  es una función barrera de Lyapunov (BLF).

Si  $\dot{V} \leq 0$ , entonces  $b = V(x(0))$ , y cualquier trayectoria permanecerá dentro de  $\mathcal{D}$ .

Para el caso de múltiples entradas, la función saturación se aplica a cada elemento del vector de entrada  $u \in \mathbb{R}^p$ , *i.e.*,

$$\sigma_j(u_j) = \begin{cases} u_{\max_j}, & \text{if } u_{\max_j} \leq u_j, \\ u_j, & \text{if } -u_{\max_j} < u_j < u_{\max_j}, \\ -u_{\max_j}, & \text{if } u_j \leq -u_{\max_j}. \end{cases} \quad (3)$$

y por lo tanto,  $\sigma(u) := (\sigma_1(u_1) \dots \sigma_p(u_p))^\top$ , donde  $u_j$  es el  $j$ -ésimo elemento del vector  $u$  y  $u_{\max_j} > 0$  es el valor máximo que puede tomar  $u_j$ .

Debido a su estructura existe una región lineal, donde  $\sigma(u) = u$ , se caracteriza por el conjunto  $\mathcal{U} := \{u \in \mathbb{R}^p \mid -u_{\max_j} \leq u_j \leq u_{\max_j}, j = \overline{1, p}\}$ . Se define la función  $\phi_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como  $\phi_j(u_j) := \sigma_j(u_j) - u_j$  y  $\phi(u) := (\phi_1(u_1) \dots \phi_p(u_p))^\top$ . Se tiene el siguiente Lema

**Lema 1.** (Tarbouriech et al., 2011). Si  $\bar{\alpha} - \bar{\beta}$  es un elemento de  $\mathcal{U}$ , entonces la función  $\phi_j(\alpha)$  cumple con  $\phi^\top(\bar{\alpha})\Delta[\phi(\bar{\alpha}) + \bar{\beta}] \leq 0$ , con  $\Delta = \text{diag}(\delta_1 \dots \delta_p)$ , para cualquier  $\delta_j > 0$ ,  $j = \overline{1, p}$ .

### 4. DINÁMICA DEL ERROR DE SEGUIMIENTO

Se definen los errores de seguimiento como

$$e_1(t) = \theta_d(t) - \theta(t), \quad (4a)$$

$$e_2(t) = c(\theta(t))\bar{x}(t) + s(\theta(t))\bar{y}(t), \quad (4b)$$

$$e_3(t) = c(\theta(t))\bar{y}(t) - s(\theta(t))\bar{x}(t), \quad (4c)$$

con  $\bar{x}(t) = x_d(t) - x(t)$  y  $\bar{y}(t) = y_d(t) - y(t)$ , donde  $x_d(t)$ ,  $y_d(t)$ , y  $\theta_d(t)$  se obtienen del modelo cinemático del UMR, *i.e.*,

$$\dot{\theta}_d(t) = \omega_d(t), \quad (5a)$$

$$\dot{x}_d(t) = c(\theta_d(t))v_d(t), \quad (5b)$$

$$\dot{y}_d(t) = s(\theta_d(t))v_d(t), \quad (5c)$$

donde  $v_d$  y  $\omega_d$  son la velocidad lineal y angular deseadas, respectivamente. Se asume que son continuas y acotadas por constantes positivas  $\underline{v}_d$ ,  $\bar{v}_d$ , y  $\bar{\omega}_d$ , *i.e.*,  $0 < \underline{v}_d < v_d(t) \leq \bar{v}_d$ , y  $\|\omega_d\|_\infty \leq \bar{\omega}_d$ , tal que  $v_d(t) \in \mathcal{V}$  y  $\omega_d(t) \in \mathcal{W}$ , para todo  $t \geq 0$ . Además, las trayectorias del modelo de referencia también cumplen con las restricciones en los estados, *i.e.*,  $x_d(t) \in \mathcal{X}$  y  $y_d(t) \in \mathcal{Y}$ , para todo  $t \geq 0$ .

Por lo tanto, la dinámica del error de seguimiento está dada como

$$\dot{e}_1(t) = -\omega(t)d_1(t) + \tau_1(t), \quad (6a)$$

$$\dot{e}_2(t) = \bar{d}_1(t)\omega(t)e_3(t) - v(t)d_2(t) + \tau_2(t), \quad (6b)$$

$$\dot{e}_3(t) = -\bar{d}_1(t)\omega(t)e_2(t) + v_d(t)s(e_1(t)), \quad (6c)$$

con las siguientes entradas de control

$$\tau_1(t) = \omega_d(t) - \omega(t), \quad (7a)$$

$$\tau_2(t) = v_d(t)c(e_1(t)) - v(t). \quad (7b)$$

La dinámica (6) se puede reescribir como:

$$\dot{e}(t) = A(\rho_1)e(t) + B[\tau(t) + F(\rho_2)d(t)], \quad (8)$$

donde  $\tau(t) = (\tau_1(t) \ \tau_2(t))^\top \in \mathbb{R}^2$ ,  $d(t) = (d_1(t) \ d_2(t))^\top \in \mathbb{R}^2$ ,  $e(t) = (e_1(t) \ e_2(t) \ e_3(t))^\top \in \mathbb{R}^3$ , y

$$A(\rho_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{d}_1(t)\omega(t) \\ v_d(t)s(c(e_1(t))) & -\bar{d}_1(t)\omega(t) & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(\rho_2) = \begin{pmatrix} -\omega(t) & 0 \\ 0 & -v(t) \end{pmatrix},$$

donde  $\rho_1 = (v_d(t)s(c(e_1(t))) \ \bar{d}_1(t)\omega(t))^\top \in \mathbb{R}^2$  y  $\rho_2 = (v(t) \ \omega(t))^\top \in \mathbb{R}^2$  son los parámetros desconocidos y conocidos del sistema, respectivamente. Entonces se tiene que (8) se encuentra en una forma LPV y por lo tanto los conjuntos de restricciones pueden ser reescritos como:

$$\mathcal{E} = \{e \in \mathbb{R}^3 : (e_1, e_2, e_3) \in \mathbb{R} \times [-\bar{x}y, \bar{x}y] \times [-\bar{x}y, \bar{x}y]\}, \quad (9)$$

$$\mathcal{U} = \{\tau \in \mathbb{R}^2 : (\tau_1, \tau_2) \in [-\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_1] \times [-\bar{\tau}_2, \bar{\tau}_2]\}, \quad (10)$$

donde  $\bar{x}y = (x_{\max} - x_{\min}) + (y_{\max} - y_{\min})$ ,  $\bar{\tau}_1 = \bar{\omega}_d + \omega_{\max}$ , y  $\bar{\tau}_2 = \bar{v}_d + v_{\max}$ . Además, siempre existirá una matriz Metzler  $A_0 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , unas matrices  $A_j \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  y  $F_j \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , para  $j = \overline{1, 4}$ , tal que

$$A(\rho_1) = A_0 + \sum_{j=1}^4 \alpha_j(\rho_1)A_j, \quad F(\rho_2) = \sum_{j=1}^4 \alpha_j(\rho_2)F_j, \quad (11a)$$

$$\sum_{j=1}^4 \alpha_j(\rho_1) = \sum_{j=1}^4 \alpha_j(\rho_2) = 1, \quad \alpha_j(\rho_1), \alpha_j(\rho_2) \in [0, 1], \quad (11b)$$

se cumple para (8). Por lo tanto

$$\dot{e}(t) = \left[ A_0 + \sum_{j=1}^4 \alpha_j(\rho_1)A_j \right] e(t) + B \left[ \tau(t) + \sum_{j=1}^4 \alpha_j(\rho_2)F_j d \right]. \quad (12)$$

Por lo tanto, ahora el problema es diseñar una ley de control muestreada  $\tau$  tal que las trayectorias del sistema (12) converjan a cero, a pesar de la presencia de perturbaciones, considerando las restricciones de comunicación, *i.e.*,  $h(t) \in [h_{\min}, h_{\max}]$ , y las restricciones en los estados y en la entrada de control, *i.e.*,  $e(t) \in \mathcal{E}$  and  $\tau(t) \in \mathcal{U}$ .

## 5. DISEÑO DEL CONTROL ROBUSTO

Se propone la siguiente ley de control:

$$\tau(t) = \begin{cases} \tilde{\tau}(t), & \text{if } e(t) \notin \mathcal{E}(P), \\ \hat{\tau}(t), & \text{if } e(t) \in \mathcal{E}(P), \end{cases} \quad (13)$$

donde  $\tilde{\tau}$  es un controlador activado por eventos,  $\hat{\tau}$  es un controlador por realimentación de estados con muestreo constante, y el elipsoide  $\mathcal{E}(P)$ , que se definirá más adelante, es el conjunto de conmutación.

### 5.1 Diseño del Controlador Lineal

El control activado por eventos se basa en un control por realimentación de estados, por lo que se propone la siguiente ley de control

$$\tilde{\tau}(t) = \sigma(\tau_0(t)), \quad (14)$$

con  $\tau_0(t) = Ke(t)$ , donde  $K \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$  es la ganancia de realimentación, tal que las restricciones en los estados y en la entrada de control no son violadas.

En el siguiente lema se obtienen el conjunto seguro  $\mathcal{E}(R)$ , el conjunto de conmutación  $\mathcal{E}(P)$ , y una manera de diseñar  $K$ .

**Lema 2.** *Se aplica el control (14) al sistema (12), i.e.,  $\tau(t) = \tilde{\tau}(t)$ . Se asume que existe una matriz definida positiva  $X_1 = X_1^\top \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , matrices  $Y \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ ,  $Z = (Z_1^\top \ Z_2^\top) \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ ,  $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $\Delta = \text{diag}(\delta_1, \delta_2)$ , con  $\delta_1, \delta_2 > 0$ , y una constante  $\gamma > 0$ , tal que el siguiente conjunto de LMIs*

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} \chi_{11} & B\Delta - Y^\top + Z^\top & X_1 B F_{\max} \\ * & -2\Delta & 0 \\ * & * & -\gamma Q_d \end{pmatrix} \leq 0, \quad (15a)$$

$$\chi_{11} = A_\psi X_1 + X_1 A_\psi + BY + Y^\top B^\top + M, \quad (15b)$$

$$\chi_{2i} = \begin{pmatrix} X_1 & Z_i^\top \\ Z_i & \bar{\tau}_i^2 \end{pmatrix} \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad (15c)$$

$$\chi_3 = \begin{pmatrix} M & \gamma X_1 \\ \gamma X_1 & \gamma X_2 \end{pmatrix} > 0, \quad (15d)$$

$$X_2 < X_1, \quad (15e)$$

$$\chi_{4j} = \bar{b}_j^\top X_1 \bar{b}_j \leq 1, \quad j = \overline{1, 4}, \quad (15f)$$

$$\bar{b}_1 = (0, \overline{xy}^{-1}, 0)^\top, \quad \bar{b}_2 = -\bar{b}_1, \quad \bar{b}_3 = (0, 0, \overline{xy}^{-1})^\top, \quad \bar{b}_4 = -\bar{b}_3,$$

con  $A_\psi = A_0 + A_{\max} I_3$ , se cumple para  $\overline{xy}$ ,  $F_{\max} = d_{\max} \max(v_{\max}, \omega_{\max})$ , y  $A_{\max} = \sum_{j=1}^4 \alpha^* \|A_j\|$ ,  $\alpha^* = \arg \max_{\alpha \in \Gamma} \sum_{j=1}^4 \alpha_j \|A_j\|$ , y  $\Gamma \subset \mathbb{R}^4$  el conjunto de todos los vectores de peso  $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_4)^\top \in \mathbb{R}^4$  tal que se cumple (11). Si  $e(0) \in \mathcal{E}(R)$ , con  $R = X_1^{-1}$ , y  $K = YR$ , entonces  $\mathcal{E}(P)$ , con  $P = X_2^{-1}$ , es asintóticamente atractivo para el sistema (12).

### 5.2 Controlador Activado por Eventos

Debido a las restricciones de comunicación de la plataforma del UMR, es necesario implementar el controlador (14) de manera muestreada, i.e.,

$$\tilde{\tau}(t) = \sigma(\tau_0(t_k)), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (16)$$

En el siguiente lema se muestra una manera de implementar el controlador activado por eventos.

**Lema 3.** *Se aplica el control (16) al sistema (12), i.e.,  $\tau(t) = \tilde{\tau}(t)$ , con los parámetros del control diseñado de acuerdo al lema 2, i.e.,  $K = YR$ , y se asume que  $e(0) \in \mathcal{E}(R) \setminus \mathcal{E}(P)$ . Por lo tanto, la ley de control se diseña como*

$$\tilde{\tau}(t) = \begin{cases} \sigma(\tau_0(t)), & t = t_{k+1}, \text{ if } W_1 > \varrho W_2 \\ & \& h(t) \geq h_{\min}, \\ \sigma(\tau_0(t_k)), & \text{if } W_1 \leq \varrho W_2, \end{cases} \quad (17)$$

para todo  $t \in [t_k, t_{k+1})$ , donde

$$W_1(e(t), \tau_0(t_k)) = 2S_e e^\top(t) R B \sigma(\tau_0(t_k)),$$

$$W_2(e(t), \tau_0(t)) = 2S_e e^\top(t) R B \sigma(\tau_0(t)),$$

y  $\varrho > 0$ , entonces  $\mathcal{E}(P)$ , con  $P$  dada como en el lema 2, es asintóticamente atractivo para el sistema (12).

El control (14) asegura que el error de seguimiento converge asintóticamente a  $\mathcal{E}(P)$ . Una vez en  $\mathcal{E}(P)$ , la ley de control conmuta al controlador periódico, el cual toma en cuenta el máximo tiempo de muestreo.

### 5.3 Controlador con Muestreo Constante

Se propone el siguiente control por realimentación de estados

$$\hat{\tau}(t) = K_2 e(t_k), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (18)$$

con  $h(t) = t_{k+1} - t_k = \bar{h}$ , con algún  $\bar{h} > h_{\min} > 0$ .

El siguiente Lema brinda una manera de diseñar  $K_2$ .

**Lema 4.** *Se aplica el control (18) al sistema (12), i.e.,  $\tau(t) = \hat{\tau}(t)$ . Se asume que existen matrices definidas positivas  $P_1 = P_1^\top \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $P_2 = P_2^\top \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $R_1 = R_1^\top \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $S = S^\top \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , y  $Y \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ , tal que la siguiente LMI*

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & R_1 + BY & B F_{\max} \\ * & \psi_{22} & \epsilon B Y & \epsilon B F_{\max} \\ * & * & -R_1 - S & 0 \\ * & * & * & -\gamma_2 I \end{pmatrix} \leq 0, \quad (19)$$

$$\psi_{11} = P_2^\top A_\psi^\top + A_\psi P_2 + S - R_1 + \gamma_2 P_1,$$

$$\psi_{12} = P_1 - P_2 + \epsilon A_\psi P_2, \quad \psi_{22} = -2\epsilon P_2 + \bar{h}^2 R_1,$$

se cumple para  $\epsilon, \gamma_2 > 0$ ,  $\bar{h} > h_{\min} > 0$ , y  $K_2$  se diseña como  $K_2 = Y P_2$ , entonces el sistema (12) es ISS con respecto a  $d$ , y las trayectorias cumplen con  $e(t) \in \mathcal{E}(P_c)$ , con  $P_c = 2^{-1} P_2^{-1} P_1 P_2^{-1} d_{\max}^2$ . Además, si

$$X_2^{-1} \leq P_c, \quad (20)$$

se cumple para  $d_{\max} > 0$ , y  $X_2$  dada como en el lema 2, entonces  $\mathcal{E}(P_c) \subset \mathcal{E}(P)$ .

Se usa (20) para verificar que la región de convergencia, dada cuando se aplica el control (18), es completamente contenido en el conjunto  $\mathcal{E}(P)$ . Si esta condición no se cumple, el parámetro  $\gamma_2$  puede ser modificado para recalcular  $K_2$  de manera que la región de convergencia esté completamente contenido en  $\mathcal{E}(P)$ .

Finalmente, considerando los resultados de los lemas 2 y 4, se obtiene el resultado principal.

**Teorema 1.** Se aplica el control (13) al sistema (12), con (17) y (18), i.e., los parámetros del controlador se diseñan de acuerdo al Lema 2 y el Lema 4, respectivamente. Entonces, el sistema (12) es ISS con respecto a  $d$ .

## 6. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

La solución de las LMIs se obtienen mediante el solver SDPT3 y YALMIP en MATLAB. Las simulaciones se realizan en MATLAB con el método de discretización de Euler, con un tiempo de integración de 0.001 y con un tiempo de muestreo mínimo  $h_{\min} = 0.001$  [s].

La trayectoria deseada está dada como  $\omega_d(t) = (\dot{x}_d(t)\dot{y}_d(t) - \dot{y}_d(t)\dot{x}_d(t))/(\dot{x}_d^2(t) + \dot{y}_d^2(t))$ ,  $v_d = \sqrt{\dot{x}_d^2(t) + \dot{y}_d^2(t)}$ ,  $x_d(t) = \cos(\omega_0 t)$ ,  $y_d(t) = \sin(2\omega_0 t)$ ,  $\theta_d(t) = \int_0^t \omega_d(\tau) d\tau$ ,  $\omega_0 = 0.15$ , por lo tanto,  $\bar{\omega}_d = 1.1663$ ,  $\underline{v}_d = 0.1392$ , y  $\bar{v}_d = 0.4472$ . Las condiciones iniciales son  $x_0 = 1$  [m],  $y_0 = 1.5$  [m] y  $\theta_0 = -2$  [rad], por lo tanto,  $e_1(0) = 3.5708$ ,  $e_2(0) = 1.3639$ , y  $e_3(0) = 0.6242$ . Los conjuntos de restricciones en los estados y en las entradas de control están dados como  $\mathcal{X} = [-1.5, 1.5]$ ,  $\mathcal{Y} = [-1.5, 1.5]$ ,  $\mathcal{V} = [-0.7, 0.7]$ ,  $\mathcal{W} = [-3, 3]$ , y por lo tanto,  $\bar{x}_y = 6$ ,  $\bar{\tau}_1 = 4.1663$ , y  $\bar{\tau}_2 = 1.4472$ . Note que  $e(0) \in \mathcal{E}$  y  $\tau(0) \in \mathcal{U}$ .

Se toman las perturbaciones de la siguiente manera  $d_1(t) = 0.25 \sin(3t) + 0.3$  y  $d_2(t) = 0.25 \cos(3t) + 0$ , por lo tanto  $d_{\max} = 0.55$ . Es posible fijar la matriz  $A_0$  para obtener las matrices  $A_j$  por medio de un enfoque politopico convexo Nagy et al. (2010) utilizando  $\omega_{\max}$ ,  $d_{\max}$ ,  $\underline{v}_d$ , y  $\bar{v}_d$ , entonces, se obtiene  $F_{\max} = 1.65$  y  $A_{\max} = 0.5261$ .

Para calcular las ganancias para la ley de control aperiódica, se considera las desigualdades dadas en el Lema 2. Se considera  $\delta_1 = 1.8602$ ,  $\delta_2 = 1.5634$ ,  $\gamma = 0.2$ ,  $\tau_{1\max} = 4.1663$ , and  $\tau_{2\max} = 1.1472$ , entonces, se obtienen las siguientes ganancias:

$$R = \begin{pmatrix} 0.33 & 0.00 & 0.14 \\ 0.00 & 0.37 & 0.00 \\ 0.14 & 0.00 & 0.32 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0.62 & -0.01 & 0.27 \\ -0.01 & 0.66 & -0.01 \\ 0.27 & -0.01 & 0.56 \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} -1.6165 & 0.0069 & -1.2105 \\ 0.0080 & -0.9458 & 0.0022 \end{pmatrix}.$$

Para calcular las ganancias para la ley de control periódica, se considera las desigualdades dadas en el Lema 4. Se considera  $h_{\min} = 0.001$  [s],  $\gamma_2 = 0.2$ ,  $\epsilon = 0.5$ , entonces, se obtienen las siguientes ganancias:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.76 & -0.02 & -0.44 \\ -0.02 & 0.90 & -0.01 \\ -0.44 & -0.01 & 1.18 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0.83 & 0.00 & -0.38 \\ 0.00 & 0.95 & -0.01 \\ -0.38 & -0.01 & 1.14 \end{pmatrix},$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} -2.5744 & 0.0254 & -0.7018 \\ 0.0374 & -2.3971 & 0.0059 \end{pmatrix}, \bar{h} = 0.5.$$

Las trayectorias del sistema se muestran en la Fig. 2, donde se observa que las trayectorias del sistema convergen a la referencia deseada a pesar de la presencia de perturbaciones. Es posible ver que las trayectorias  $x$  y  $y$  nunca violan las restricciones en los estados. La señales de control  $\omega$  y  $v$  se muestran en la Fig. 3. Se observa que tanto  $\omega$  como  $v$  se saturan al inicio de la tarea de

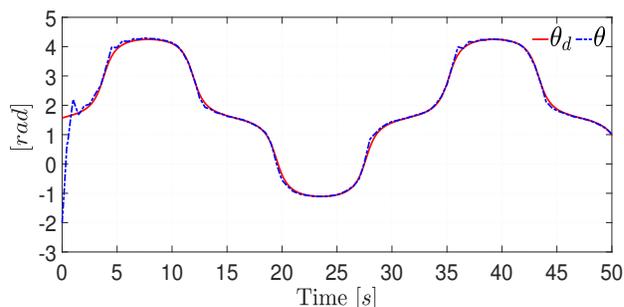
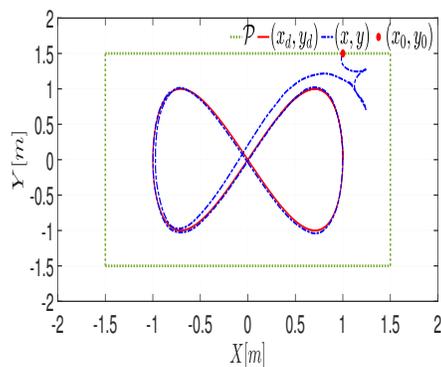


Fig. 2. Trayectorias del sistema

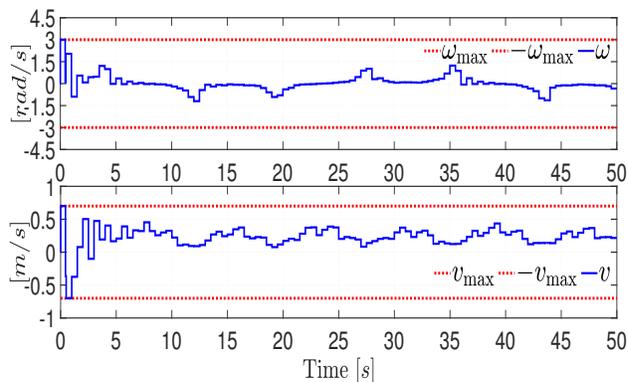


Fig. 3. Señales de Control

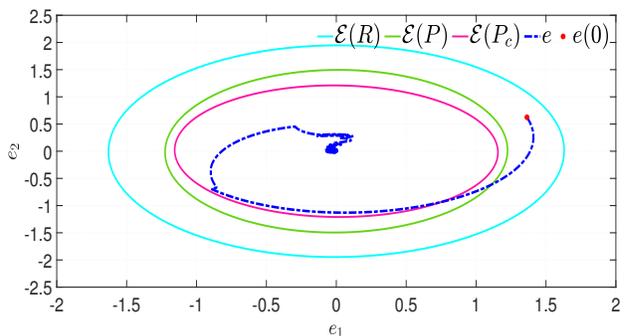


Fig. 4. Trayectorias del error de seguimiento y elipsoides

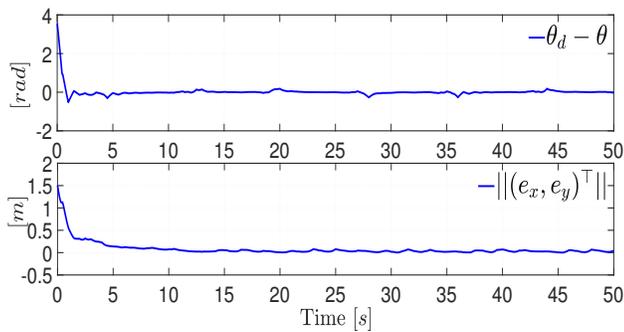


Fig. 5. Norma del error de seguimiento, donde  $e_x = x_d - x$  y  $e_y = y_d - y$

control y permanece dentro de la región lineal. En la Fig. 4 se muestran las proyecciones de los elipsoides  $\mathcal{E}(R)$ ,  $\mathcal{E}(P)$ , y  $\mathcal{E}(P_c)$ , en el plano  $e_2$ - $e_3$ . Se puede ver que las trayectorias del error de seguimiento están contenidas en  $\mathcal{E}(R)$ , luego convergen a  $\mathcal{E}(P)$ , y finalmente permanecen dentro de  $\mathcal{E}(P_c)$ . No se muestra la proyección de  $e_1$  debido a que  $e_1$  no tiene restricciones. Entonces, es evidente que las trayectorias del error de seguimiento no violan las restricciones dadas por el conjunto (10). Finalmente, en Fig. 5, se observa que la norma de los errores converge a una región cercana al origen.

## 7. CONCLUSIONES

En este artículo, se propone el diseño de un controlador robusto para el problema de seguimiento de trayectorias en UMRs restringidos. El controlador propuesto comprende el diseño de un controlador activado por eventos y un controlador por realimentación de estado con un muestreo constante. El control activado por eventos se diseña mediante el AEM y la BLF que proporciona un conjunto seguro, y un conjunto de conmutación que define la región donde cada parte del controlador se encontrara activa. La parte de control periódica se diseña considerando un tiempo de muestreo máximo, la cual se activa dentro del conjunto de conmutación. La estrategia de control propuesta garantiza que la dinámica de error de seguimiento es ISS con respecto a las perturbaciones externas. Los resultados de simulación ilustran la factibilidad del enfoque propuesto.

## REFERENCIAS

Chen, X., Jia, Y., and Matsuno, F. (2014). Tracking control for differential-drive mobile robots with diamond-shaped input constraints. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 22(5), 1999–2006.

Dai, S.L., Lu, K., and Jin, X. (2021). Fixed-time formation control of unicycle-type mobile robots with visibility and performance constraints. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 68(12), 12615–12625.

Huang, J., Wang, W., Wen, C., and Li, G. (2019). Adaptive event-triggered control of nonlinear systems

with controller and parameter estimator triggering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 65(1), 318–324.

Ke, F., Li, Z., and Yang, C. (2017). Robust tube-based predictive control for visual servoing of constrained differential-drive mobile robots. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 65(4), 3437–3446.

Khaledyan, M., Liu, T., Fernandez-Kim, V., and de Queiroz, M. (2015). Flocking and target interception control for formations of nonholonomic kinematic agents. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 28(4), 1603–1610.

Liu, T. and Jiang, Z.P. (2015). A small-gain approach to robust event-triggered control of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(8), 2072–2085.

Nagy, A.M., Mourot, G., Marx, B., Ragot, J., and Schutz, G. (2010). Systematic multimodeling methodology applied to an activated sludge reactor model. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 49(6), 2790–2799.

Postoyan, R., Bragagnolo, M.C., Galbrun, E., Daafouz, J., Nešić, D., and Castelan, E.B. (2015). Event-triggered tracking control of unicycle mobile robots. *Automatica*, 52, 302–308.

Sun, Z., Dai, L., Liu, K., Xia, Y., and Johansson, K.H. (2018). Robust MPC for tracking constrained unicycle robots with additive disturbances. *Automatica*, 90, 172–184.

Tabuada, P. (2007). Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks. *IEEE Transactions on Automatic control*, 52(9), 1680–1685.

Tarbouriech, S., Garcia, G., da Silva Jr, J.M., and Queinnec, I. (2011). *Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators*. Springer Science & Business Media.

Tee, K.P., Ge, S.S., and Tay, E.H. (2009). Barrier Lyapunov functions for the control of output-constrained nonlinear systems. *Automatica*, 45(4), 918–927.

Thomas, M., Bandyopadhyay, B., and Vachhani, L. (2021). Discrete-time sliding mode control design for unicycle robot with bounded inputs. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 68(8), 2912–2916.

Xie, C., Fan, Y., and Qiu, J. (2020). Event-based tracking control for nonholonomic mobile robots. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 38, 100945.

Zhang, M. and Liu, H. (2014). Game-theoretical persistent tracking of a moving target using a unicycle-type mobile vehicle. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 61(11), 6222–6233.

Zhang, P., Liu, T., and Jiang, Z.P. (2022). Tracking control of unicycle mobile robots with event-triggered and self-triggered feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 68(4), 2261–2276.

Zhu, Q. (2018). Stabilization of stochastic nonlinear delay systems with exogenous disturbances and the event-triggered feedback control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64(9), 3764–3771.