

Integral LQR robust control for a hexarotor-UAV modeled as a qLPV system^{*}

J. Jiménez-Pérez^{*} P. Gasga^{*} S. Gómez-Peñate^{*}
I. Santos-Ruiz^{*} S. Molina-Domínguez^{*}

^{*} *Tecnológico Nacional de México, I.T. Tuxtla Gutiérrez,
TURIX-Dynamics Diagnosis and Control Group, Carretera
Panamericana km 1080 S/N, Tuxtla Gutiérrez 29050, México;*

Abstract: This paper presents a model quasi-linear parameter varying (qLPV) and an integral Linear Quadratic Regulator (LQR) controller for an unmanned aerial vehicle type hexarotor. The qLPV model is derived using the nonlinear sector approach, which can accurately represent the hexarotor nonlinear model under bounded nonlinear terms. Meanwhile, the goal of the controller is to achieve trajectory tracking despite disturbances caused by residual rotor speeds and wind disturbances. Trajectory tracking is accomplished by using an integrator comparator block which is divided into three subsystems governed by rotational, altitude and position dynamics. To guarantee robustness against disturbances and tracking error, a H_∞ performance criterion is considered. The stability condition and robust performance are formulated using the Lyapunov quadratic function, with sufficient conditions provided by linear matrix inequalities (LMIs). Finally, numerical simulations of the proposed method are illustrated using the hexarotor model.

Keywords: Robust control, trajectory tracking control, qLPV system, hexarotor-UAV.

1. INTRODUCCIÓN

Los vehículos aéreos no tripulados (VANTs) han encontrado amplias aplicaciones en diversos campos, por ejemplo; la entrega de paquetes, el monitoreo de incendios, inspección de construcciones (Sanchez-Cuevas et al., 2020). Además, los VANTs se clasifican de acuerdo al número de rotores, tal como se presenta en Mohsan et al. (2022) y cada una de estas clasificaciones tiene beneficios e inconvenientes en ciertas aplicaciones. Sin embargo, los hexarotores tienen mejor desempeño de vuelo en comparación de los cuadricópteros, trirotores, birotores y los VANTs de ala fija. Las ventajas de los hexarotores son reflejados en algunas aplicaciones como el transporte de carga útil (Hachem et al., 2023), la tolerancia a las fallas y son ágiles para compensar perturbaciones como las ráfagas de viento o para realizar maniobras agresivas (Stamate et al., 2023).

Recientemente se han presentado trabajos sobre el control de los hexarotores, por ejemplo; en Al-Mahasneh et al.

^{*} Este trabajo fue desarrollado en el marco de las actividades de la red internacional denominada Red internacional de control y cómputo aplicados soportado por el TecNM y financiado por el Tecnológico Nacional de México a través del programa Proyectos de Investigación Científica, Desarrollo Tecnológico e Innovación, con clave de proyecto 19268.24-P.

(2019) presentan un controlador adaptativo de Redes Neuronales para estabilizar el hexarotor en una posición de altitud y de actitud con dinámicas inciertas. No obstante, en la literatura se ha señalado que las perturbaciones en los hexarotores son un problema inevitable (Orozco Soto et al., 2022) y se han abordado utilizando esquemas robustos para el rechazo de perturbaciones, como en Yazid et al. (2021) diseñan un control de linealización por retroalimentación y por modos deslizantes para estabilizar el hexarotor en una posición de actitud y a su vez realizan un seguimiento de trayectoria sobre la dinámica de altitud sujeto a perturbaciones. Note que efectuar un seguimiento de trayectoria en un hexarotor se convierte en un desafío más complejo, como en Zhang et al. (2019) propone un control no lineal adaptativo por retroceso para resolver el problema de seguimiento de trayectoria y de las perturbaciones de un hexarotor; adicionalmente se considera el modelo no lineal para el diseño del controlador y obtener un control más confiable en una región más amplia.

Actualmente existen métodos no lineales que tienen una representación lineal debido a su estructura y son conocidos como modelos qLPV (López-Estrada et al., 2019). Los modelos qLPV se construyen mediante una colección de modelos lineales interpolados por funciones de ponderación (Ohtake et al., 2003) donde las funciones de

ponderación dependen de las no linealidades que contiene el modelo no lineal. Algunos trabajos recientes sobre controladores qLPV aplicados a VANTs son encontrados en Rodríguez-Guevara et al. (2023), Kazemi and Tarighi (2024), entre otros más. Debido a la poca atención de métodos basados en modelos qLPV aplicados a VANTs de tipo hexarrotor, el presente trabajo propone un esquema de control robusto LQR integral basado en un modelo qLPV para hacer seguimiento de trayectoria, el cual incluye un criterio de desempeño H_∞ para minimizar el efecto de las perturbaciones.

El documento está organizado de la siguiente manera: En la Sección 2 se describe el modelo no lineal del hexarrotor. En la Sección 3, se deduce el modelado qLPV. En la Sección 4, se diseña el controlador robusto LQR integral. Los resultados a nivel simulación se discuten en la Sección 5. Finalmente, en la Sección 6 se presentan las conclusiones.

2. MODELO NO LINEAL DEL HEXARROTOR

En la Figura 1 se muestra el diagrama de cuerpo libre del hexarrotor. El hexarrotor cuenta con seis actuadores los cuales proporcionan las fuerzas de empuje y los torques.

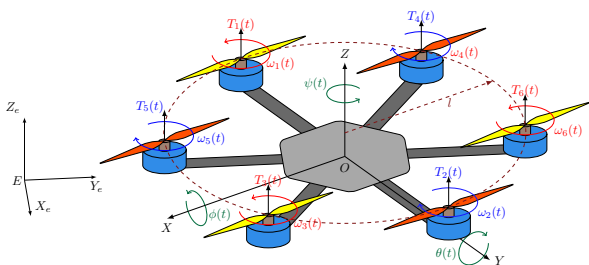


Figura 1. Diagrama de cuerpo libre del hexarrotor

Para desarrollar el modelo no lineal se emplean dos sistemas de referencia; el marco O , ubicado en el centro de masa, y el marco E , que está fijo en la tierra. Las ecuaciones diferenciales no lineales que describen el comportamiento traslacional y rotacional del hexarrotor son (Adir and Stoica, 2012):

$$\begin{aligned} \ddot{x}_b(t) &= u_x(t) \frac{1}{m} u_e(t) + d_x(t), \\ \ddot{y}_b(t) &= u_y(t) \frac{1}{m} u_e(t) + d_y(t), \\ \ddot{z}_b(t) &= -g + \cos \phi(t) \cos \theta(t) \frac{1}{m} u_e(t) + d_z(t), \\ \ddot{\phi}(t) &= \dot{\theta}(t) \dot{\psi}(t) \left(\frac{I_y - I_z}{I_x} \right) - \frac{J_p}{I_x} \dot{\theta}(t) \Omega(t) + \frac{1}{I_x} \tau_\phi(t), \\ \ddot{\theta}(t) &= \dot{\phi}(t) \dot{\psi}(t) \left(\frac{I_z - I_x}{I_y} \right) + \frac{J_p}{I_y} \dot{\phi}(t) \Omega(t) + \frac{1}{I_y} \tau_\theta(t), \\ \ddot{\psi}(t) &= \dot{\phi}(t) \dot{\theta}(t) \left(\frac{I_x - I_y}{I_z} \right) + \frac{1}{I_z} \tau_\psi(t), \end{aligned} \quad (1)$$

con:

$$u_x(t) = \cos \phi(t) \sin \theta(t) \cos \psi(t) + \sin \phi(t) \sin \psi(t),$$

$u_y(t) = \cos \phi(t) \sin \theta(t) \sin \psi(t) - \sin \phi(t) \cos \psi(t)$, donde $x_b(t)$, $y_b(t)$, $z_b(t)$ son las posiciones de traslaciones, $\phi(t)$ es el ángulo de balanceo (roll), $\theta(t)$ ángulo de inclinación (pitch), $\psi(t)$ es el ángulo de guiñada (yaw). Los valores de los parámetros del modelo no lineal son definidos en la Tabla 1. $u_e(t)$ es el empuje total, $\tau_\phi(t)$ es el momento en alabeo, $\tau_\theta(t)$ es el momento en cabeceo, $\tau_\psi(t)$ es el momento en guiñada, los cuales dependen directamente de las velocidades rotacionales de los rotores $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, \dots , $\omega_6(t)$ y están definidos de la siguiente forma:

$$u_b(t) = D_T T(t), \quad (2)$$

donde:

$$u_b(t) = [u_e(t) \ \tau_\phi(t) \ \tau_\theta(t) \ \tau_\psi(t)]^\top,$$

$$D_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{l}{2} & l & \frac{l}{2} & -\frac{l}{2} & -l & -\frac{l}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}l}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}l}{2} & \frac{\sqrt{3}l}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}l}{2} \\ \frac{k_D}{k_T} & \frac{k_D}{k_T} & \frac{k_D}{k_T} & \frac{k_D}{k_T} & -\frac{k_D}{k_T} & \frac{k_D}{k_T} \end{bmatrix},$$

$$T(t) = [T_1(t) \ T_2(t) \ T_3(t) \ T_4(t) \ T_5(t) \ T_6(t)]^\top,$$

donde k_D es el factor de arrastre, k_T es el factor de empuje, $u_b(t)$ es el vector de entradas, D_T es una matriz de distribución y $T(t)$ el vector de empuje vertical de cada rotor, y están definidos como:

$$T_i(t) = k_T \omega_i^2(t), \text{ para } i = 1, \dots, 6. \quad (3)$$

La perturbación en el sistema $\Omega(t)$ es causada por los residuos de las velocidades de los rotores y se define como:

$$\Omega(t) = \omega_2(t) + \omega_4(t) + \omega_6(t) - \omega_1(t) - \omega_3(t) - \omega_5(t),$$

donde $\Omega(t)$ se considera desconocida. Las perturbaciones producidas por el viento son denotadas como $d_x(t)$, $d_y(t)$ y $d_z(t)$ las cuales actúan sobre la dinámica traslacional del hexarrotor, similar al trabajo en Zhang et al. (2019).

3. MODELO QLPV DEL HEXARROTOR

En la Figura 2 se muestra el esquema de control de seguimiento que se conforma por un subsistema de altitud, el subsistema de posición $x - y$ y el subsistema de rotación.

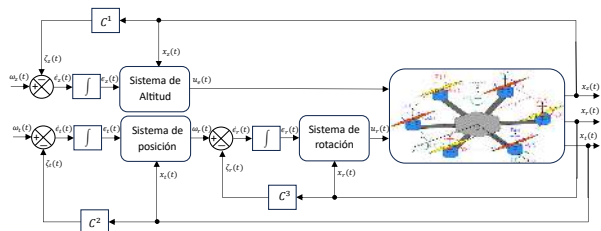


Figura 2. Esquema de control

Note que el modelo no lineal (1) se puede dividir en tres subsistemas desacoplados: altitud, traslación y rotación. Por tanto, en las siguientes subsecciones se presentan el

modelo qLPV de cada subsistema y además se considera un comparador integrador para hacer seguimiento de trayectoria.

3.1 Subsistema de altitud

El subsistema de altitud es representado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_z(t) &= A^1 x_z(t) + B^1 u_z(t) + D^1 d_z(t), \\ \dot{\epsilon}_z(t) &= \omega_z(t) - \zeta_z(t), \\ \zeta_z(t) &= C^1 x_z(t), \end{aligned} \quad (4)$$

donde $x_z(t) = [z_b(t) \dot{z}_b(t)]^\top$, $\epsilon_z(t)$ es el error de seguimiento vertical, $\omega_z(t)$ es la referencia deseada vertical, $\zeta_z(t)$ es la salida controlada sobre la coordenada Z , y la entrada virtual es:

$$u_z(t) = -g + \cos \phi(t) \cos \theta(t) \frac{1}{m} u_e(t), \quad (5)$$

las matrices lineales son:

$$A^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, D^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C^1 = [1 \ 0].$$

Por tanto, la ley de control:

$$u_z(t) = [K^z \ F^z] \begin{bmatrix} x_z(t) \\ \epsilon_z(t) \end{bmatrix} = K^1 \bar{x}_z(t), \quad (6)$$

donde K^1 es una matriz de ganancia que debe de ser calculada.

Cuando $u_z(t)$ sea calculado por la Ecuación (6), se tiene que sustituir en:

$$u_e(t) = \frac{m(u_z(t) + g)}{\cos \phi(t) \cos \theta(t)}, \quad (7)$$

cuyo objetivo es obtener el empuje total $u_e(t)$.

3.2 Subsistema de posición $x - y$

El subsistema que describe el comportamiento dinámico en el plano $X - Y$ es representado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_t(t) &= A^2 x_t(t) + B^2(\rho(t)) u_t(t) + D^2 d_t(t), \\ \dot{\epsilon}_t(t) &= \omega_t(t) - \zeta_t(t), \\ \zeta_t(t) &= C^2 x_t(t), \end{aligned} \quad (8)$$

donde $x_t(t) = [x_b(t) \dot{x}_b(t) y_b(t) \dot{y}_b(t)]^\top$, $\epsilon_t(t)$ es el error de seguimiento traslacional, $\omega_t(t)$ es la referencia deseada traslacional, $\zeta_t(t)$ es la salida controlada sobre el plano $X - Y$, las matrices y los vectores se definen como:

$$\begin{aligned} C^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, d_t(t) = \begin{bmatrix} d_x(t) \\ d_y(t) \end{bmatrix}, u_t(t) = \begin{bmatrix} u_x(t) \\ u_y(t) \end{bmatrix}, \\ A^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B^2(\rho(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \rho_1(t) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \rho_1(t) \end{bmatrix}, D^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Utilizando el método del sector no lineal (Ohtake et al., 2003), se define la variable de programación como $\rho_1(t) = \frac{g + u_z(t)}{\cos(\phi(t)) \cos(\theta(t))} \in [10, 80]$ y se construye un par de funciones de ponderación, como:

$$h_1(\rho(t)) = \frac{80 - \rho_1(t)}{80 - 10}, \quad h_2(\rho(t)) = 1 - h_1(\rho(t)),$$

de modo que, el modelo no lineal (8) se puede reescribir como un modelo qLPV, dado por:

$$\dot{x}_t(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(\rho(t)) (A^2 x_t(t) + B_i^2 u_t(t) + D^2 d_t(t)). \quad (9)$$

Las funciones de ponderación $h_i(\rho(t))$ deben de satisfacer la siguiente propiedad:

$$\sum_{i=1}^{2^p} h_i(\rho(t)) = 1, \quad 0 \leq h_i(\rho(t)) \leq 1, \quad (10)$$

donde $h_i(\rho(t)) = 1, 2, \dots, 2^p$ y $\rho_j(t) = 1, 2, \dots, p$, con $p = 1$. La ley de control para (9) se formula de la forma:

$$u_t(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(\rho(t)) K_i^2 \bar{x}_t(t), \quad (11)$$

donde $\bar{x}_t(t) = [x_t(t)^\top \ \epsilon_t(t)^\top]^\top$ y $K_i^2 = [K_i^t \ F_i^t]$ son ganancias a calcular. Con las entradas virtuales $u_x(t)$ y $u_y(t)$ las cuales son denotadas en (1) se pueden calcular los ángulos deseados $\phi_d(t)$ y $\theta_d(t)$ en el plano $X - Y$, dado por:

$$\begin{aligned} \phi_d(t) &= \arcsin(\psi(t) u_x(t) - \cos(\psi(t)) u_y(t)), \\ \theta_d(t) &= \arcsin\left(\frac{\cos(\psi(t)) u_x(t) + \sin(\psi(t)) u_y(t)}{\cos(\phi_d(t))}\right). \end{aligned}$$

3.3 Subsistema de rotación

El subsistema de rotación es representado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_r(t) &= A^3(\rho(t)) x_r(t) + B^3 u_r(t) + D^3(\rho(t)) \Omega(t), \\ \dot{\epsilon}_r(t) &= \omega_r(t) - \zeta_r(t), \\ \zeta_r(t) &= C^3 x_r(t), \end{aligned} \quad (12)$$

donde $x_r(t) = [\phi(t) \dot{\phi}(t) \theta(t) \dot{\theta}(t) \psi(t) \dot{\psi}(t)]^\top$, $\epsilon_r(t)$ es el error de seguimiento sobre las posiciones rotacionales, $\omega_r(t)$ son los ángulos deseados, $\zeta_r(t)$ es la salida controlada para las posiciones rotacionales y las matrices son:

$$\begin{aligned} A^3(\rho(t)) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho_3(t)(I_y - I_z)}{I_x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho_2(t)(I_z - I_x)}{I_y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\rho_3(t)(I_x - I_y)}{I_z} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ D^3(\rho(t)) &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{J_p \rho_3(t)}{I_x} \\ 0 \\ \frac{J_p \rho_2(t)}{I_y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \end{bmatrix}, C^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^\top, \end{aligned}$$

con $u_r(t) = [\tau_\phi(t) \ \tau_\theta(t) \ \tau_\psi(t)]^\top$. Aplicando el método del sector no lineal se identifican dos variables de programación $\rho_2(t) = \dot{\phi}(t) \in [-3, 3]$ y $\rho_3(t) = \dot{\theta}(t) \in [-3, 3]$. Se definen dos pares de funciones de pesos:

$$w_2^0(t) = \frac{3 - \rho_2(t)}{3 - (-3)}, w_2^1(t) = 1 - w_2^0(t),$$

$$w_3^0(t) = \frac{3 - \rho_3(t)}{3 - (-3)}, w_3^1(t) = 1 - w_3^0(t),$$

y realizando una combinación binaria, se construyen las funciones de ponderaciones:

$$h_1(\rho(t)) = w_2^0(t)w_3^0(t), h_2(\rho(t)) = w_2^0(t)w_3^1(t),$$

$$h_3(\rho(t)) = w_2^1(t)w_3^0(t), h_4(\rho(t)) = w_2^1(t)w_3^1(t),$$

donde $\rho(t) = [\rho_2(t) \ \rho_3(t)]^\top$ es el vector de variables de programación. Por tanto, el modelo no lineal (12) se puede reescribir como un modelo qLPV de la forma:

$$\dot{x}_r(t) = \sum_{i=1}^4 h_i(\rho(t))(A_i^3 x_r(t) + B^3 u_r(t) + D_i^3 \Omega(t)). \quad (13)$$

La ley de control para (13) se formula de la forma:

$$u_r(t) = \sum_{i=1}^4 h_i(\rho(t))K_i^3 \bar{x}_r(t), \quad (14)$$

donde $\bar{x}_r(t) = [x_r(t)^\top \ \epsilon_r(t)^\top]^\top$ y $K_i^3 = [K_i^\top \ F_i^\top]$ son ganancias a calcular.

4. DISEÑO DEL CONTROL ROBUSTO LQR INTEGRAL

Considere el modelo qLPV de la forma:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{2^p} h_i(\rho(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + D_i d(t)), \quad (15)$$

$$\dot{\epsilon}(t) = \omega(t) - \zeta(t),$$

$$\zeta(t) = C_\omega x(t),$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$, $d(t) \in \mathbb{R}^{n_d}$, $\epsilon(t) \in \mathbb{R}^{n_\omega}$, $\omega(t) \in \mathbb{R}^{n_\omega}$, $\zeta(t) \in \mathbb{R}^{n_\omega}$ son el vector de estado, vector de entrada, vector de perturbación, vector de error de seguimiento, vector de referencia, vector de salida controlada. A_i , B_i , D_i y C_ω son matrices conocidas de dimensiones apropiadas. $h_i(\rho(t))$ son las funciones de ponderación y p es el número de variables de programación $\rho_j(t)$ con $j = 1, 2, \dots, p$. Aumentado el vector de estado como $\bar{x}(t) = [x(t)^\top \ \epsilon(t)^\top]^\top$ es posible obtener:

$$\dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^{2^p} h_i(\rho(t)) (\bar{A}_i \bar{x}(t) + \bar{B}_i u(t) + \bar{D}_i d(t) + \bar{E} \omega(t)), \quad (16)$$

donde $\bar{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_a}$, $n_a = n_x + n_\omega$ y las matrices son:

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ -C_\omega & 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{D}_i = \begin{bmatrix} D_i \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{E} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_\omega \end{bmatrix}.$$

La ley de control para (16) se propone como un controlador por retroalimentación:

$$u(t) = \sum_{j=1}^{2^p} h_j(\rho(t)) \bar{K}_j \bar{x}(t), \quad (17)$$

donde $\bar{K}_j = [K_j \ F_j]$ son ganancias a calcular. Sustituyendo la ley de control (17) en (16), se obtiene el sistema en lazo cerrado:

$$\dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^{2^p} \sum_{j=1}^{2^p} h_i(\rho(t)) h_j(\rho(t)) \left((\bar{A}_i + \bar{B}_i \bar{K}_j) \bar{x}(t) + G_i v(t) \right), \quad (18)$$

con

$$G_i = [\bar{D}_i \ \bar{E}], \quad v(t) = [d(t)^\top \ \omega(t)^\top]^\top.$$

Asumiendo que el par (\bar{A}_i, \bar{B}_i) es controlable; entonces, se adopta una formulación LQR para sintetizar la señal de control (17) con el fin de minimizar la función de costo:

$$J_1(t) = \int_{-\infty}^0 \bar{z}(t)^\top \bar{z}(t) dt, \quad (19)$$

con:

$$\bar{z}(t) = Q_1 \bar{x}(t) + R_1 u(t),$$

donde $Q_1 \in \mathbb{R}^{(n_a+n_u) \times n_a}$ y $R_1 \in \mathbb{R}^{n_a+n_u \times n_u}$ son matrices simétricas y definidas positivas.

Note que el sistema en lazo cerrado (18) es afectado por el término $v(t)$ y para minimizar su efecto se plantea el siguiente problema de optimización:

$$\sup_{\|v(t)\|_{\mathcal{L}_2} \neq 0} \frac{\|\bar{x}(t)\|_{\mathcal{L}_2}}{\|v(t)\|_{\mathcal{L}_2}} < \gamma, \quad (20)$$

donde γ es el nivel de atenuación. El siguiente teorema proporciona condiciones suficientes para garantizar robustez en presencia de perturbaciones y estabilidad del error de seguimiento.

Teorema 1. El sistema en lazo cerrado (18) garantizará que el error de seguimiento sea asintóticamente estable con desempeño robusto H_∞ , si y solo si, existe un nivel de atenuación $\gamma > 0$, una matriz $P = P^\top > 0$ y matrices $Q_1 > 0$, $R_1 > 0$, $W_j \forall j \in \{1, 2, \dots, 2^p\}$, tal que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}(\bar{A}_i M + \bar{B}_i W_j) & G_i & (Q_1 M + R_1 W_j)^\top \\ G_i^\top & -\gamma^2 I & 0 \\ (Q_1 M + R_1 W_j) & 0 & -I_{n_a+n_u} \end{bmatrix} < 0, \quad (21)$$

donde las ganancias del controlador son calculadas por $\bar{K}_j = W_j M^{-1}$.

Prueba: Considere la función candidata de Lyapunov $V(\bar{x}(t)) = \bar{x}(t)^\top P \bar{x}(t) > 0$, cuya derivada es:

$$\dot{V}(\bar{x}(t)) = \dot{\bar{x}}(t)^\top P \bar{x}(t) + \bar{x}(t)^\top P \dot{\bar{x}}(t) < 0, \quad (22)$$

con $P = P^\top > 0$ tal que, el siguiente criterio de desempeño sea:

$$\dot{V}(\bar{x}(t)) + \bar{z}(t)^\top \bar{z}(t) - \gamma^2 v(t)^\top v(t) < 0. \quad (23)$$

Sustituyendo (18), (19) y (22) en (23), se obtiene:

$$\left(\sum_{i=1}^{2^p} \sum_{j=1}^{2^p} h_i(\rho(t)) h_j(\rho(t)) \left((\bar{A}_i + \bar{B}_i \bar{K}_j) \bar{x}(t) + G_i v(t) \right) \right)^\top$$

$$\times P \bar{x}(t) + \bar{x}(t)^\top P \left(\sum_{i=1}^{2^p} \sum_{j=1}^{2^p} h_i(\rho(t)) h_j(\rho(t)) \left((\bar{A}_i + \bar{B}_i \bar{K}_j) \bar{x}(t) + G_i v(t) \right) \right)$$

$$+ \left(Q_1 \bar{x}(t) + R_1 u(t) \right)^\top$$

$$\times \left(Q_1 \bar{x}(t) + R_1 u(t) \right) - \gamma^2 v(t)^\top v(t) < 0,$$

desarrollando y realizando manipulaciones algebraicas:

$$\sum_{i=1}^{2^r} \sum_{j=1}^{2^r} h_i(\rho(t))h_j(\rho(t)) \left(\bar{x}(t)^\top \left(\bar{A}_i^\top P + \bar{K}_j^\top \bar{B}_i^\top P + P\bar{A}_i + P\bar{B}_i\bar{K}_j + Q_1^\top Q_1 + Q_1^\top R_1\bar{K}_j + \bar{K}_j^\top R_1^\top Q_1 + \bar{K}_j^\top R_1^\top R_1\bar{K}_j \right) \bar{x}(t) + v(t)^\top G_i^\top P\bar{x}(t) + \bar{x}(t)^\top P G_i v(t) \right) - \gamma^2 v(t)^\top v(t) < 0,$$

aplicando la propiedad en (10), factorizando el vector $\bar{X}(t) = [\bar{x}(t)^\top v(t)^\top]^\top$ y su transpuesta $\bar{X}(t)^\top$, se tiene:

$$\bar{X}(t)^\top \begin{bmatrix} \Phi_{ij} & P G_i \\ G_i^\top P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \bar{X}(t) < 0, \quad (24)$$

donde:

$$\Phi_{ij} = \bar{A}_i^\top P + \bar{K}_j^\top \bar{B}_i^\top P + P\bar{A}_i + P\bar{B}_i\bar{K}_j + Q_1^\top Q_1 + Q_1^\top R_1\bar{K}_j + \bar{K}_j^\top R_1^\top Q_1 + \bar{K}_j^\top R_1^\top R_1\bar{K}_j.$$

Pre y post-multiplicando la matriz $\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ en (24), con $M = P^{-1}$, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}(\bar{A}_i M + \bar{B}_i W_j) + \Lambda_j & G_i \\ G_i^\top & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (25)$$

donde:

$$\Lambda_j = (Q_1 M + R_1 W_j)^\top (Q_1 M + R_1 W_j),$$

y el término cuadrático en (25) puede ser eliminado con $W_j = \bar{K}_j M$. Finalmente, aplicando el complemento de Schur se obtienen las LMIs en (21) por el Teorema 1. Esto completa la prueba.

5. RESULTADOS

En esta Sección se presentan los resultados a nivel simulación del controlador para seguimiento de trayectoria, estos parámetros fueron caracterizados en el laboratorio de sistemas mecatrónicos del instituto tecnológico de Tuxtla Gutiérrez, los cuales se usaron para efectuar el experimento y se encuentran en la Tabla 1.

Tabla 1. Parámetros del hexarrotor

Descripción	Parámetro	Valor	Unidad
Masa del hexarrotor	m	1.839	kg
Longitud del hexarrotor	l	0.275	m
Factor de empuje	k_T	7.9×10^{-6}	—
Factor de arrastre	k_D	4.4×10^{-7}	—
Momento de inercia en X	I_x	0.03401	kg m^2
Momento de inercia en Y	I_y	0.03668	kg m^2
Momento de inercia en Z	I_z	0.04918	kg m^2
Inercia de los motores	J_p	5.5×10^{-6}	kg m^2
Constante de gravedad	g	9.81	m/s ²

Resolviendo el Teorema 1 a través de la herramienta YALMIP y del solucionador SEDUMI se obtuvieron los siguientes valores de ganancias para cada subsistema:

$$\bar{K}^1 = [-0.8707 \quad -1.3735 \quad 0.2951],$$

$$\bar{K}_1^2 = \begin{bmatrix} -1.10 & -0.623 & 0 & 0 & 0.65 & 0 \\ 0 & 0 & -1.1053 & -0.623 & 0 & 0.6590 \end{bmatrix},$$

$$\bar{K}_2^2 = \begin{bmatrix} -1.13 & -0.077 & 0 & 0 & 0.0821 & 0 \\ 0 & 0 & -0.13 & -0.077 & 0 & 0.0821 \end{bmatrix},$$

$$F_1^r = \begin{bmatrix} 811.57 & -0.064 \\ 0.052 & 895.030 \\ 5.362 & -29.002 \end{bmatrix}, F_2^r = \begin{bmatrix} 811.5 & 0.064 \\ -0.052 & 895.03 \\ -5.362 & -29.002 \end{bmatrix},$$

$$F_3^r = \begin{bmatrix} 811.5753 & 0.0645 \\ -0.0525 & 895.0302 \\ 5.3629 & 29.0024 \end{bmatrix}, F_4^r = \begin{bmatrix} 811.5753 & -0.0645 \\ 0.0526 & 895.0302 \\ -5.3629 & 29.0024 \end{bmatrix},$$

$$K_1^r = \begin{bmatrix} -101.3 & -3.466 & 0.0081 & 0.0003 & 0.159 & -0.03 \\ -0.006 & -0.0002 & -111.8 & -3.823 & -0.729 & -0.001 \\ -0.669 & -0.0318 & 3.625 & 0.122 & -25.18 & -1.81 \end{bmatrix},$$

$$K_2^r = \begin{bmatrix} -101.3 & -3.466 & -0.0081 & -0.0003 & -0.159 & 0.03 \\ 0.006 & 0.0002 & -111.8 & -3.823 & -0.729 & -0.001 \\ 0.669 & 0.0318 & 3.625 & 0.122 & -25.18 & -1.81 \end{bmatrix},$$

$$K_3^r = \begin{bmatrix} -101.3 & -3.466 & -0.0081 & -0.0003 & 0.159 & -0.03 \\ 0.006 & 0.0002 & -111.8 & -3.823 & 0.729 & 0.001 \\ -0.669 & -0.0318 & -3.625 & -0.122 & -25.18 & -1.81 \end{bmatrix},$$

$$K_4^r = \begin{bmatrix} -101.3 & -3.466 & 0.0081 & 0.0003 & -0.159 & 0.03 \\ -0.006 & -0.0002 & -111.8 & -3.823 & 0.729 & 0.001 \\ 0.669 & -0.0318 & -3.625 & -0.122 & -25.18 & -1.81 \end{bmatrix},$$

las cuales corresponden a las ecuaciones (6), (11) y (14). Para evaluar la solidez del controlador, se tienen en cuenta tres perturbaciones provocadas por viento y son denotadas como $d_x(t) = 1.5 \sin(2t)$, en $30s \leq t \leq 40s$, $d_y(t) = 1.8 \sin(3t)$, en $140s \leq t \leq 145s$ y $d_z(t) = 0.5 \sin(1.5t)$, en $85s \leq t \leq 90s$.

En la Figura 3 se muestra el seguimiento de trayectoria en el espacio 3-D del hexarrotor; el comportamiento dinámico del hexarrotor en los ejes X, Y, Z demuestra desempeño robusto a pesar de las perturbaciones provocadas por los residuos de las velocidades $\Omega(t)$ y las perturbaciones por viento, donde el efecto de $d_x(t)$, $d_y(t)$ y $d_z(t)$ son señalados mediante una flecha. Como se observa en la Figura 3, el hexarrotor realiza un desplazamiento circular con radio de 5 m sobre los ejes X_e y Y_e , mientras que en el eje Z_e alcanza una altura de 10 m con respecto al marco E . En la Figura 4 se muestran los momentos y las fuerzas de empuje los cuales son afectados por las perturbaciones del viento.

6. CONCLUSIÓN

El artículo presenta un control robusto LQR integral para un seguimiento de trayectoria basado en un modelo qLPV. Para simplificar la síntesis del control y ampliar la aplicabilidad del método se diseñó un controlador para cada subsistema, el cual incluye un comparador integrador para garantizar el seguimiento. La metodología demostró un desempeño robusto durante el seguimiento de trayectoria a pesar de las perturbaciones. Como un trabajo futuro es realizar un escenario experimental para validar la solidez del controlador.

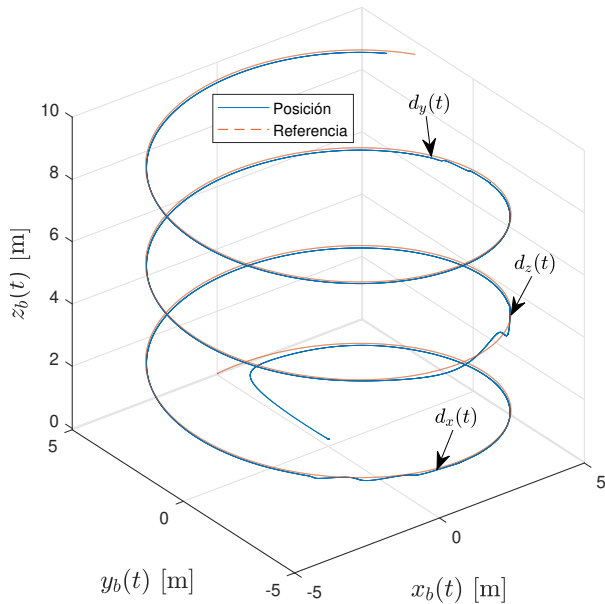


Figura 3. Seguimiento de trayectoria en el espacio 3-D

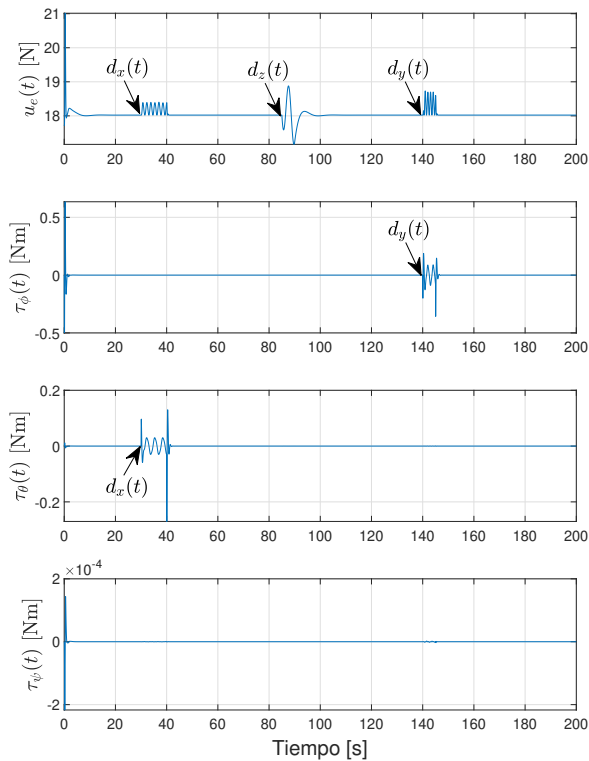


Figura 4. El comportamiento total de los momentos y las fuerzas de empuje

REFERENCIAS

Adir, V.G. and Stoica, A.M. (2012). Integral lqr control of a star-shaped octorotor. *Incas Bulletin*, 4(2), 3.
Al-Mahasneh, A.J., Anavatti, S.G., Ferdous, M., and Garratt, M.A. (2019). Adaptive neural altitude control and attitude stabilization of a hexacopter with uncer-

tain dynamics. In *2019 IEEE International Conference on Industry 4.0, Artificial Intelligence, and Communications Technology (IAICT)*, 44–49. IEEE.
Hachem, M., Miquel, T., Bronz, M., and Roos, C. (2023). Trajectory optimization for fully actuated hexacopters: Enhancing maneuverability and applications. In *14th ANNUAL INTERNATIONAL MICRO AIR VEHICLE CONFERENCE AND COMPETITION*.
Kazemi, M.H. and Tarighi, R. (2024). Pid-based attitude control of quadrotor using robust pole assignment and lpv modeling. *International Journal of Dynamics and Control*, 1–13.
López-Estrada, F.R., Rotondo, D., and Valencia-Palomo, G. (2019). A review of convex approaches for control, observation and safety of linear parameter varying and takagi-sugeno systems. *Processes*, 7(11), 814.
Mohsan, S.A.H., Khan, M.A., Noor, F., Ullah, I., and Alsharif, M.H. (2022). Towards the unmanned aerial vehicles (uavs): A comprehensive review. *Drones*, 6(6), 147.
Ohtake, H., Tanaka, K., and Wang, H.O. (2003). Fuzzy modeling via sector nonlinearity concept. *Integrated Computer-Aided Engineering*, 10(4), 333–341.
Orozco Soto, S.M., Cacace, J., Ruggiero, F., and Lippello, V. (2022). Active disturbance rejection control for the robust flight of a passively tilted hexarotor. *Drones*, 6(9), 258.
Rodríguez-Guevara, D., Favela-Contreras, A., and González-Villarreal, O.J. (2023). A qlpv-mpc control strategy for trajectory tracking of quadrotors. *Machines*, 11(7), 755.
Sanchez-Cuevas, P.J., Gonzalez-Morgado, A., Cortes, N., Gayango, D.B., Jimenez-Cano, A.E., Ollero, A., and Heredia, G. (2020). Fully-actuated aerial manipulator for infrastructure contact inspection: Design, modeling, localization, and control. *Sensors*, 20(17), 4708.
Stamate, M.A., Pupăză, C., Nicolescu, F.A., and Moldoveanu, C.E. (2023). Improvement of hexacopter uavs attitude parameters employing control and decision support systems. *Sensors*, 23(3), 1446.
Yazid, M., Bouadi, H., Hamdadou, N., and Hebablia, N. (2021). Hexarotor attitude stabilization based feedback linearization and sliding mode controllers. In *2021 29th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*, 1143–1148. IEEE.
Zhang, J., Gu, D., Deng, C., and Wen, B. (2019). Robust and adaptive backstepping control for hexacopter uavs. *Ieee Access*, 7, 163502–163514.