

# Robust control for joint position regulation of the inertial wheel pendulum affected by constant torque disturbances

Samir Cota\*, Jesús Sandoval\*, Javier Moreno-Valenzuela\*\*, Víctor Santibáñez\*\*\*, Luis Cervantes-Pérez\*\*\*

\* *Tecnológico Nacional de México, Instituto Tecnológico de La Paz, La Paz, B.C.S., 23080 México (e-mails: M22310006@lapaz.tecnm.mx, jesus.sg@lapaz.tecnm.mx)*

\*\* *Instituto Politécnico Nacional, CITEDI, Tijuana, B.C., 22435 México, (e-mail: moreno@citedi.mx)*

\*\*\* *Tecnológico Nacional de México, Instituto Tecnológico de La Laguna, Torreón, Coahuila, 27001 México, (e-mails: vasantibanezd@lalaguna.tecnm.mx, d.lecervantesp@lalaguna.tecnm.mx)*

---

**Abstract:** This paper presents the design of a robust controller for joint position regulation of the inertial wheel pendulum. The proposed controller for this underactuated mechanical system affected by an unknown constant disturbance was designed using an interesting energy shaping approach. The unknown disturbance is estimated via a nonlinear observer, and the stability analysis is based on Lyapunov's theory. Numerical simulations on the inertia wheel pendulum model illustrate the performance of the proposed controller.

*Keywords:* Energy shaping approach, robust control, Lyapunov theory, disturbances, nonlinear observer.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

El control de sistemas mecánicos subactuados –aquellos con más grados de libertad que entradas de control– se ha convertido en una intensa área de investigación desde hace tres décadas. Esto debido principalmente al desafío de no contar con el número total de actuadores en las articulaciones del sistema a controlar con el fin de dar cumplimiento a diferentes objetivos de control. Numerosos ejemplos del control de esta clase de sistemas han sido publicados en la literatura utilizando diferentes metodologías de diseño. Algunos de ellos son los siguientes trabajos Ortega et al. (2002), Spong (2005), Aneke (2003), Aminsafae and Shafiei (2020), Perrusquia and Yu (2020), y Moreno-Valenzuela and Aguilar-Avelar (2018).

Se han utilizado diferentes métodos que permiten minimizar los efectos negativos de las perturbaciones en los sistemas subactuados. Para el caso particular del péndulo con rueda inercial diversos trabajos emplean diferentes enfoques para garantizar la robustez del controlador ante perturbaciones. Algunos métodos utilizan conceptos de energía, como en Donaire et al. (2017) o Hfaiedh et al. (2020), y también otros trabajos utilizan algoritmos de control híbridos como en Alqudsi et al. (2022), donde combinan el control por modo deslizante variable en el tiempo (TVSMC), ley de alcance exponencial (ERL) y el control por realimentación no lineal (NFC). Este con-

trolador logra amortiguar la presencia de perturbaciones inciertas. También hay una variedad de trabajos que utilizan otros métodos de diseño, por ejemplo, Afkhami et al. (2003) permite realizar estudios comparativos y validar el desempeño de su controlador propuesto.

En el presente trabajo se aborda el desarrollo de un controlador robusto por moldeo de energía con perturbaciones constantes desconocidas de el péndulo con rueda inercial. Este sistema subactuado es uno de los más simples y ha sido ampliamente estudiado (Block et al., 2007). La principal contribución de este trabajo es el robustecer una ley de control diseñada con una metodología por moldeo de energía presentada en Sandoval et al. (2022) mediante un observador no lineal propuesto en Sandoval et al. (2024) y aplicarlo al péndulo con rueda inercial. Se presenta además las condiciones necesarias para garantizar la estabilidad del sistema en malla cerrada que garantiza el rechazo a perturbaciones de par constante.

El resto del trabajo está organizado de la siguiente manera. La Sección 2 presenta el método de diseño de controladores para sistemas mecánicos con perturbaciones constantes basado en el paradigma de control por moldeo de energía. En esta misma sección, la formulación del problema de control, el observador no lineal y la ley de control por moldeo de energía son mostrados en detalle. La Sección 3 muestra el modelo dinámico en formulación Hamiltoniana del péndulo con rueda inercial afectado por una perturbación constante. En esta sección se describe el diseño del controlador robusto y el análisis de estabilidad que verifica el objetivo de control de regulación de posición.

---

\* Este trabajo fue parcialmente financiado por CONACYT bajo contratos 166636, CVU 1106239 y 166654, por la Red Internacional de Control y Cómputo Aplicados (RICCA) del TecNM y por los proyectos 20021.24-P y 20827.24-P del TecNM.

Los resultados de simulaciones numéricas que ilustran el desempeño del controlador son mostrados en la Sección 4. Finalmente, en la Sección 5 se dan las conclusiones.

## 2. CONTROL POR MOLDEO DE ENERGÍA DE SISTEMAS MECÁNICOS SUBACTUADOS CON PERTURBACIONES CONSTANTES

Basado en Sandoval et al. (2024), se presenta una extensión de un método de diseño de controladores para sistemas mecánicos subactuados con perturbaciones constantes basado en el paradigma de moldeo de energía. La formulación inicia con una descripción hamiltoniana del sistema mecánico a ser controlado, donde el hamiltoniano es la suma de la energía cinética más la energía potencial de  $n$  articulaciones del sistema mecánico

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T M(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{p} + \mathcal{U}(\mathbf{q}) \quad (1)$$

donde  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  son los vectores de posiciones generalizadas y momentos, respectivamente,  $M(\mathbf{q}) = M(\mathbf{q})^T > 0$  es la llamada matriz de inercia. Una propiedad de la función de energía potencial  $\mathcal{U}(\mathbf{q})$  es que se asume como una función al menos una vez diferenciable con respecto a  $\mathbf{q}$ . El modelo dinámico de la clase de sistemas mecánicos subactuados considerados en este trabajo está dado por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -I_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \\ \nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n \\ G[\mathbf{u} + \delta] \end{bmatrix} \quad (2)$$

donde  $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$  es la matriz de distribución de las entradas de control y cuyos elementos se asumen constantes, con  $m < n$  y  $\text{rango}\{G\} = m$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  es el vector de pares de entradas de control y  $\delta \in \mathbb{R}^m$  es una perturbación constante desconocida. El momentum  $\mathbf{p}$  se define como

$$\mathbf{p} = M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (3)$$

donde  $\dot{\mathbf{q}}$  es el vector de velocidades generalizadas.

La novedad de este método consiste en proponer una malla cerrada con una estructura deseada. Para este fin, la descripción se basa en la siguiente función escalar

$$\mathcal{H}_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a) = \frac{1}{2} \mathbf{p}_a^T M_a(\mathbf{q}_a)^{-1} \mathbf{p}_a + \mathcal{U}_a(\mathbf{q}_a) \quad (4)$$

la cual se denomina hamiltoniano deseado, donde  $M_a(\mathbf{q}_a) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una función matricial simétrica, definida positiva y diferenciable para todo  $\mathbf{q}_a \in \mathbb{R}^n$ . Además, se supone que  $\mathcal{U}_a(\mathbf{q}_a)$  es una función definida localmente positiva y continuamente diferenciable con un punto mínimo aislado en  $\mathbf{q}_a = \mathbf{0}_n$ . Se introduce a continuación el siguiente cambio de coordenadas:

$$\mathbf{q}_a = \alpha(\mathbf{q}) - \phi(t), \quad (5)$$

$$\mathbf{p}_a = M_a(\mathbf{q}_a)\dot{\mathbf{q}}_a, \quad (6)$$

siendo  $\mathbf{q}_a \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{p}_a \in \mathbb{R}^n$  los vectores de posiciones ‘generalizados’ y momentos deseados. Además, los vectores  $\alpha(\mathbf{q})$  y  $\phi(t)$  tienen la estructura

$$\alpha(\mathbf{q}) = [\alpha_1(\mathbf{q}), \alpha_2(\mathbf{q}), \dots, \alpha_n(\mathbf{q})]^T, \quad (7)$$

$$\phi(t) = [\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)]^T, \quad (8)$$

respectivamente. Las funciones  $\alpha_i(\mathbf{q})$  son continuamente diferenciables con respecto a  $\mathbf{q}$ , para  $i = 1, \dots, n$ , elegidas para asegurar que el  $\text{rango}\{W(\mathbf{q})\} = n$ , para cualquier

$\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ , tal que  $W(\mathbf{q})^{-1}$  exista, donde  $W(\mathbf{q})$  es la matriz jacobiana del vector  $\alpha(\mathbf{q})$ , es decir,

$$W(\mathbf{q}) = \frac{\partial \alpha(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}. \quad (9)$$

Además, las funciones  $\phi_i(t)$  se asumen que son dos veces diferenciables. De (5), se deduce que

$$\dot{\mathbf{q}}_a = W(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \dot{\phi}(t). \quad (10)$$

Al sustituir  $\dot{\mathbf{q}}_a$  de (10) en (6), y  $\dot{\mathbf{q}} = M(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{p}$  de (3), produce

$$\mathbf{p}_a = T_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{q})\mathbf{p} - M_a(\mathbf{q}_a)\dot{\phi}(t), \quad (11)$$

donde

$$T_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}) = M_a(\mathbf{q}_a)W(\mathbf{q})M(\mathbf{q})^{-1} \quad (12)$$

con  $\text{rango}\{T_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{q})\} = n$ . Con el fin de tratar con la entrada de perturbación de par  $\delta$  se introduce la siguiente definición inspirada en Sandoval et al. (2024),

$$\tilde{\delta} = \hat{\delta} - \delta, \quad (13)$$

donde  $\hat{\delta} \in \mathbb{R}^m$  es el valor estimado de la perturbación, que se compensará mediante el controlador propuesto mostrado más adelante. Además, se define convenientemente la siguiente función escalar

$$\mathcal{S}_a(\xi_a) = \frac{1}{2} \xi_a^T \xi_a \quad (14)$$

siendo  $\xi_a \in \mathbb{R}^n$  un vector dado por

$$\xi_a = \begin{bmatrix} \tilde{\delta} \\ \mathbf{0}_{n-m} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

La matriz de inyección de amortiguación  $\mathcal{D}_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz simétrica semidefinida positiva seleccionada convenientemente. Para simplificar, la presentación de resultados, se define la siguiente notación:

$$\begin{aligned} M &= M(\mathbf{q}), & M_a &= M_a(\mathbf{q}_a), & H &= H(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \\ \mathcal{U} &= \mathcal{U}(\mathbf{q}), & \mathcal{H}_a &= \mathcal{H}_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a), & \mathcal{U}_a &= \mathcal{U}_a(\mathbf{q}_a), \\ T_a &= T_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}), & \mathcal{D}_a &= \mathcal{D}_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a), & \mathcal{S}_a &= \mathcal{S}_a(\xi_a), \\ W &= W(\mathbf{q}). \end{aligned}$$

### 2.1 Formulación del problema de control

El problema de control consiste en diseñar una entrada de control  $\mathbf{u}$ , tal que al sustituirse en el sistema de malla abierta (2) se obtenga la siguiente malla cerrada:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{p}_a \\ \xi_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ -I_{n \times n} & -\mathcal{D}_a & -\mathcal{A} \\ 0_{n \times n} & \mathcal{A}^T & -\mathcal{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a \\ \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a \\ \nabla_{\xi_a} \mathcal{S}_a \end{bmatrix} \quad (16)$$

donde  $\mathcal{H}_a$  es una función cuya estructura fue definida en (4), y  $\epsilon_o$  es una constante estrictamente positiva apropiada. Las matrices  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  tienen dimensión  $n \times n$ , ambas definidas de la siguiente manera

$$\mathcal{A} = [T_a G \quad 0_{n \times (n-m)}], \quad (17)$$

$$\mathcal{B} = [\epsilon_o G^T W M^{-1} G \quad 0_{n \times (n-m)}]. \quad (18)$$

Al tener en cuenta (17)-(18) en (16) y simplificar (16), se obtiene

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{p}_a \\ \tilde{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a \\ -\nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a - \mathcal{D}_a \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a - T_a G \tilde{\delta} \\ G^T T_a^T \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a - \epsilon_o G^T W M^{-1} G \tilde{\delta} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Se puede verificar en (19) que el origen del espacio de estados  $[\mathbf{q}_a^T \ \mathbf{p}_a^T \ \tilde{\delta}^T]^T = \mathbf{0}_{2n+m}$  es un punto de equilibrio aislado del sistema de lazo cerrado deseado.

### 2.2 Observador no lineal

A continuación, introducimos la definición de  $\hat{\delta}$  de (13) como

$$\hat{\delta} = G^T [\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{p}_a)] \quad (20)$$

es decir,  $\hat{\delta} \in \mathbb{R}^m$  depende de funciones vectoriales  $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n$ . De la derivada temporal de (13) se obtiene

$$\dot{\hat{\delta}} = \dot{\delta}. \quad (21)$$

Sustituyendo la derivada temporal de (20) en (21) se obtiene:

$$\dot{\hat{\delta}} = G^T [\dot{\boldsymbol{\gamma}} + [\nabla_{\mathbf{p}_a} \boldsymbol{\beta}] \dot{\mathbf{p}}_a], \quad (22)$$

y reemplazando  $\dot{\mathbf{p}}_a$  de la segunda fila de (16) resulta en:

$$\dot{\hat{\delta}} = G^T \left[ \dot{\boldsymbol{\gamma}} + [\nabla_{\mathbf{p}_a} \boldsymbol{\beta}] \left[ -\nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a - \mathcal{D}_a \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a - T_a G \tilde{\delta} \right] \right]. \quad (23)$$

A continuación, para obtener la tercera fila de (19) de (22), la derivada temporal de la función vectorial  $\boldsymbol{\gamma}$  debe satisfacer

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = [\nabla_{\mathbf{p}_a} \boldsymbol{\beta}] [\nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a + \mathcal{D}_a \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a] + M^{-1} W \mathbf{p}_a. \quad (24)$$

Sustituyendo (24) en (22), obtenemos:

$$\dot{\hat{\delta}} = G^T \left[ M^{-1} W \mathbf{p}_a - [\nabla_{\mathbf{p}_a} \boldsymbol{\beta}] T_a G \tilde{\delta} \right] \quad (25)$$

Finalmente, la función vectorial  $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{p}_a)$  se define convenientemente como:

$$\boldsymbol{\beta}(\mathbf{p}_a) = \epsilon_0 \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a = \epsilon_0 M_a^{-1} \mathbf{p}_a. \quad (26)$$

La selección de  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$  y  $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{p}_a)$  son cruciales para el análisis de estabilidad del sistema de lazo cerrado.

Sustituyendo (26) en (25) y reorganizando, se obtiene

$$\dot{\hat{\delta}} = G^T M^{-1} W \mathbf{p}_a - \epsilon_0 G^T W M^{-1} G \tilde{\delta} \quad (27)$$

Por lo que (27) corresponde a la tercera fila de (19).

### 2.3 Ley de control

La ley de control que resuelve el problema de control formulado se presenta a continuación:

*Proposición 2.1.* Considere el modelo dinámico (2) con (1) y (3). Donde  $M_a, \mathcal{U}_a$  y  $\phi(t)$  sean soluciones del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales (EDP)

$$G^\perp \left[ \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H} + T_a^{-1} [-\nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a - \mathcal{D}_a \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a - \dot{T}_a \mathbf{p} + \dot{M}_a \dot{\phi}(t) + M_a \ddot{\phi}(t)] \right] = \mathbf{0}_{n-m}, \quad (28)$$

donde  $G^\perp \in \mathbb{R}^{(n-m) \times n}$ , tal que  $G^\perp G = 0_{(n-m) \times m}$ . Luego, el sistema en malla cerrada (19) se obtiene mediante la ley de control

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{es} + \mathbf{u}_{di} - \hat{\delta}, \quad (29)$$

donde

$$\mathbf{u}_{es} = [G^T G]^{-1} G^T \left[ \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H} - T_a^{-1} \left[ \nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a + \dot{T}_a \mathbf{p} - \dot{M}_a \dot{\phi}(t) - M_a \ddot{\phi}(t) \right] \right], \quad (30)$$

$$\mathbf{u}_{di} = -[G^T G]^{-1} G^T \left[ T_a^{-1} \mathcal{D}_a \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a \right], \quad (31)$$

$$\hat{\delta} = G^T [\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{p}_a)], \quad (32)$$

siendo  $\mathbf{u}_{es}$  y  $\mathbf{u}_{di}$  las acciones de control llamadas moldeo de energía e inyección de amortiguación, respectivamente, y  $\hat{\delta}$  es el vector de perturbación estimado, donde  $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^n$  se calcula a partir de (24) y  $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{p}_a)$  se ha definido en (26).

**Prueba:** La derivada temporal de  $\mathbf{p}_a$  en (11) produce

$$\dot{\mathbf{p}}_a = \dot{T}_a \mathbf{p} + T_a \dot{\mathbf{p}} - \dot{M}_a \dot{\phi}(t) - M_a \ddot{\phi}(t). \quad (33)$$

Sustituyendo  $\mathbf{p}$  de (3) en (33) resulta

$$\dot{\mathbf{p}}_a = \dot{T}_a \mathbf{p} + T_a [-\nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H} + G[\mathbf{u} + \boldsymbol{\delta}]] - \dot{M}_a \dot{\phi}(t) - M_a \ddot{\phi}(t), \quad (34)$$

Igualando  $\dot{\mathbf{p}}_a$  de (33) con (19) obtenemos

$$T_a [-\nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H} + G[\mathbf{u} + \boldsymbol{\delta}]] = -\nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a - \mathcal{D}_a \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a - T_a G \tilde{\delta} - \dot{T}_a \mathbf{p} + \dot{M}_a \dot{\phi}(t) + M_a \ddot{\phi}(t) \quad (35)$$

la cual puede ser escrita como

$$G[\mathbf{u} + \boldsymbol{\delta}] = T_a^{-1} [-\nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a - \mathcal{D}_a \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a - T_a G \tilde{\delta} - \dot{T}_a \mathbf{p} + \dot{M}_a \dot{\phi}(t) + M_a \ddot{\phi}(t)] + \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H}. \quad (36)$$

Multiplicando ambos lados por la ecuación (36) por la matriz invertible  $\begin{bmatrix} G^\perp \\ G^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , resulta

$$\begin{bmatrix} G^\perp \\ G^T \end{bmatrix} G[\mathbf{u} + \boldsymbol{\delta}] = \begin{bmatrix} G^\perp \\ G^T \end{bmatrix} \left[ T_a^{-1} [-\nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a - \mathcal{D}_a \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a - T_a G \tilde{\delta} - \dot{T}_a \mathbf{p} + \dot{M}_a \dot{\phi}(t) + M_a \ddot{\phi}(t)] + \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H} \right] \quad (37)$$

y algunos cálculos conducen a la EDP definida en (28):

$$G^\perp \left[ \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H} + T_a^{-1} [-\nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a - \mathcal{D}_a \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a - T_a G \tilde{\delta} - \dot{T}_a \mathbf{p} + \dot{M}_a \dot{\phi}(t) + M_a \ddot{\phi}(t)] \right] = \mathbf{0}_{n-m}, \quad (38)$$

y la ley de control (29), eso es,

$$\mathbf{u} = [G^T G]^{-1} G^T \left[ \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H} + T_a^{-1} [-\nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a - \mathcal{D}_a \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a - T_a G \tilde{\delta} - \dot{T}_a \mathbf{p} + \dot{M}_a \dot{\phi}(t) + M_a \ddot{\phi}(t)] - \hat{\delta} \right]. \quad (39)$$

Así, la ley de control (39) está compuesta por  $M_a, \mathcal{U}_a$  y  $\phi(t)$  soluciones de (38). Sin embargo, a primera vista, no es obvio obtener directamente la segunda fila en (19) simplemente sustituyendo (39) en (48). La razón se basa en la matriz  $G$ , porque no es invertible. Por lo tanto, es necesario desarrollar (37) y encontrar soluciones en (38) tales que (39) sea válida, para lo cual se requiere que (ver (33) y (35)):

$$\dot{\mathbf{p}}_a = -\nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a - \mathcal{D}_a \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a - T_a G \tilde{\delta}. \quad (40)$$

A continuación, de (4), se puede obtener

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a &= \nabla_{\mathbf{p}_a} \left( \frac{1}{2} \mathbf{p}_a^T M_a^{-1} \mathbf{p}_a + \mathcal{U}_a \right), \\ &= M_a^{-1} \mathbf{p}_a. \end{aligned} \quad (41)$$

De la definición  $\mathbf{p}_a = M_a \dot{\mathbf{q}}_a$  en (6), entonces  $\mathbf{p}_a$  al sustituirlo en (41) resulta

$$\nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a = \dot{\mathbf{q}}_a. \quad (42)$$

Finalmente, concluimos que (40) y (42) corresponden a las dos primeras filas de (19), y la tercera fila de (19) fue demostrada previamente en (27). Esto completa la prueba de la Proposición 2.1.

### 2.4 Objetivo de control y criterio de diseño

Para regulación de posición articular, el objetivo de control es cumplir que las posiciones articulares del sistema mecánico subactuado  $\mathbf{q}$  tiendan asintóticamente a la posición constante deseada admisible  $\mathbf{q}_d$ , es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_d] = \mathbf{0}_n, \quad (43)$$

para cualquier configuración inicial  $(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0))$  del sistema mecánico subactuado “cercana” al equilibrio deseado. Por otra parte, como criterio de diseño en este trabajo se tiene interés en lograr lo siguiente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\hat{\delta}(t) - \delta] = \mathbf{0}_m. \quad (44)$$

## 3. PÉNDULO CON RUEDA INERCIAL

El péndulo de rueda de inercial accionado por par es un sistema mecánico subactuado que consiste en una varilla de péndulo rígida sin fricción física con un disco simétrico (rueda) unido al extremo final, que es libre de girar (gracias a un accionador de par ideal) alrededor de un eje paralelo al eje de rotación de la varilla del péndulo (Fig. 1).

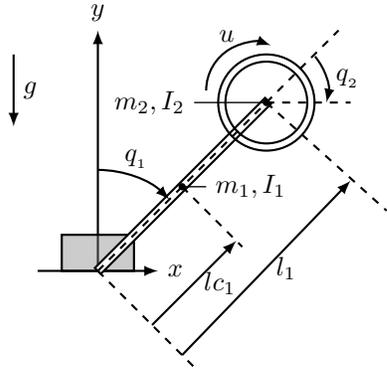


Fig. 1. Diagrama del péndulo con rueda inercial.

### 3.1 Modelo dinámico

El hamiltoniano es la suma de la función de energía cinética más la función de energía potencial del sistema y para el péndulo con rueda inercial está dado por (Ortega et al. (2002))

$$\mathcal{H} = \frac{[a_3 p_1^2 - 2a_2 p_1 p_2 + a_1 p_2^2]}{2 [\det [M]]} + m_3 [\cos(q_1) - 1], \quad (45)$$

donde  $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2]^T$  y  $\mathbf{p} = [p_1 \ p_2]^T$  son los vectores de posiciones generalizadas y momentos, respectivamente. La matriz de inercia  $M$  viene dada por

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix}, \quad (46)$$

y la función de energía potencial está dada por

$$\mathcal{U}(q_1, q_2) = m_3 [\cos(q_1) - 1] \quad (47)$$

siendo  $a_1 = I_1 + I_2$ ,  $a_2 = I_2$ ,  $a_3 = I_2$ ,  $m_3 \triangleq g(m_1 l_{c1} + m_2 l)$ , donde se considera que  $(I_1 + I_2) \gg (m_1 l_{c1}^2 + m_2 l^2)$  tal como se hizo en Ortega et al. (2002). De la Fig. 1,  $q_1$  y  $q_2$  son las posiciones articulares del péndulo y la rueda, respectivamente, y  $u$  es la entrada de par de control que

actúa en la rueda. Se asume ambas articulaciones sin fricción. La Tabla 1 muestra el significado del resto de parámetros.

Tabla 1. Parámetros del péndulo de rueda de inercial

Descripción	Notación	Unidad
Longitud del péndulo	$l_1$	m
Distancia del centro de masa del péndulo	$l_{c1}$	m
Masa del péndulo	$m_1$	kg
Masa del disco	$m_2$	kg
Momento de inercia del péndulo	$I_1$	kg·m <sup>2</sup>
Momento de inercia del disco	$I_2$	kg·m <sup>2</sup>
Aceleración de la gravedad	$g$	m/s <sup>2</sup>

El modelo dinámico del péndulo de rueda de inercial accionado por par sin fricción viscosa, es expresando de manera compacta como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [a_3 p_1 - a_2 p_2] \\ \det[M] \\ [-a_2 p_1 + a_1 p_2] \\ \det[M] \\ m_3 \sin(q_1) \\ u + \delta \end{bmatrix}. \quad (48)$$

donde  $u$  es el par de entrada de control y  $\delta$  es una perturbación constante desconocida.

### 3.2 Diseño de un control robusto

Considere el modelo (48) con  $G = [0 \ 1]^T$ . Sean  $\alpha(\mathbf{q}) = K [q_1 \ q_2]^T$  y  $\phi(t) = K [q_{d1} \ q_{d2}]^T$  las variables seleccionadas, donde  $K = \text{diag}\{k_1, k_2\}$  y  $\mathbf{q}_d = [q_{d1} \ q_{d2}]^T = [0 \ 0]^T$  es el vector de posiciones deseadas. Nótese que el término  $\nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H}$  visto en (38) puede expresarse como  $\nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{U}$  dado que  $\mathcal{H}$  cuenta con la estructura vista en (45) donde la energía potencial  $\mathcal{U}$  es el único elemento que depende de  $\mathbf{q}$ . Por tanto, si definimos  $\mathcal{D}_a$  como

$$\mathcal{D}_a = T_a G k_v G^T T_a^T, \quad (49)$$

donde  $k_v > 0$ , entonces podemos reescribir (38) de la siguiente manera

$$G^\perp [\nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{U} - T_a^{-1} \nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{U}_a] = \mathbf{0}_{n-m}, \quad (50)$$

siendo  $G^\perp = [1 \ 0]$ , tal que al desarrollar (50) se obtiene

$$[d_3 - d_2] \nabla_{\mathbf{q}_{a1}} \mathcal{U}_a + [d_1 - d_2] \nabla_{\mathbf{q}_{a2}} \mathcal{U}_a = -m_3 \text{sen}(q_1). \quad (51)$$

Para simplificar la ecuación diferencial parcial se seleccionó  $k_1 = a_1$  y  $k_2 = a_2$ . La energía potencial deseada  $\mathcal{U}_a$  es obtenida a partir del trabajo de Sandoval et al. (2020), donde la  $\mathcal{U}_a$  que satisface la EDP mostrada en (51) fue la siguiente:

$$\mathcal{U}_a = \frac{a_1 m_3 \det[M_a]}{[d_3 - d_2]} \cos\left(\frac{q_{a1}}{a_1} + q_{d1}\right) + \Phi(z(q_a)), \quad (52)$$

donde

$$z(q_a) = q_{a2} - \gamma_2 q_{a1}, \quad (53)$$

con  $\gamma_2 = \frac{(d_1 - d_2)}{(d_3 - d_2)}$  y siendo  $\Phi(z(q_a))$  una función seleccionada convenientemente para que  $\mathcal{U}_a$  sea definida positiva, por lo tanto la energía potencial deseada  $\mathcal{U}_a$  se reescribe como:

$$\mathcal{U}_a = \frac{a_1 m_3 \det[\mathbf{M}_a]}{[d_3 - d_2]} \cos\left(\frac{q_{a_1}}{a_1} + q_{d_1}\right) + \frac{k_p}{2} [q_{a_2} - \gamma_2 q_{a_1}]^2, \quad (54)$$

los elementos  $d_i$  son seleccionados a partir a las siguientes desigualdades

$$d_1 > d_3, \quad d_2 > d_3, \quad (55)$$

$$d_1 d_3 - d_2^2 > 0. \quad (56)$$

Por tanto, la entrada de control  $\mathbf{u}$  vista en (39) para este caso particular, queda

$$u = \tilde{k}_p [q_{a_2} - \gamma_2 q_{a_1}] - \tilde{k}_v [-p_{a_1} + p_{a_2}] - \alpha_3 \text{sen}\left(\frac{q_{a_1}}{a_1} + q_{d_1}\right) - \hat{\delta}, \quad (57)$$

$$\hat{\delta} = \gamma + \epsilon_0 \dot{q}_{a_2}, \quad (58)$$

$$\dot{\gamma} = \epsilon_0 [s_2 + w_2] + \sigma_2. \quad (59)$$

con

$$s_2 = [\gamma_3 \text{sen}(q_{a_1}) + k_p \gamma_2 [q_{a_2} - \gamma_2 q_{a_1}]] \frac{d_2}{\det[\mathbf{M}_a]} + k_p [q_{a_2} - \gamma_2 q_{a_1}] \frac{d_1}{\det[\mathbf{M}_a]}, \quad (60)$$

$$w_2 = k_v \left[ p_{a_2} \left[ \frac{k_2 a_1}{\det[\mathbf{M}_a]} \right]^2 - \frac{p_{a_1}}{\det[\mathbf{M}_a]} [k_1 k_2 a_1 a_2] \right], \quad (61)$$

$$\sigma_2 = -\frac{1}{\det[\mathbf{M}_a]} [p_{a_1} a_2 k_1 - p_{a_2} a_1 k_2], \quad (62)$$

donde las ganancias de (57) están definidas como

$$\tilde{k}_p = \frac{k_p}{\det[\mathbf{M}_a]} \left[ \left[ -\frac{a_2}{a_1} d_3 + \frac{a_3}{a_2} d_2 \right] + \gamma_2 \left[ \frac{a_2}{a_1} d_3 - \frac{a_3}{a_2} d_2 \right] \right], \quad (63)$$

$$\tilde{k}_v = \frac{k_v a_1 a_2}{\det[\mathbf{M}_a]}, \quad (64)$$

$$\alpha_3 = \frac{m_3}{[d_3 - d_2]} \left[ -\frac{a_2}{a_1} d_3 + \frac{a_3}{a_2} d_2 \right]. \quad (65)$$

### 3.3 Análisis de estabilidad

Sustituyendo (57)-(58) en (48) y tomando en cuenta el cambio de coordenadas visto en (5) y (6), el sistema en lazo cerrado es el siguiente

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_{a_1} \\ q_{a_2} \\ p_{a_1} \\ p_{a_2} \\ \tilde{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\det[\mathbf{M}_a]} [d_3 p_{a_1} - d_2 p_{a_2}] \\ \frac{1}{\det[\mathbf{M}_a]} [-d_2 p_{a_1} + d_1 p_{a_2}] \\ \frac{m_3 \det[\mathbf{M}_a]}{[d_3 - d_2]} \text{sen}\left(\frac{q_{a_1}}{a_1} + q_{d_1}\right) + \mathcal{X}_1 \\ -k_p [q_{a_2} - \gamma_2 q_{a_1}] - \mathcal{X}_2 \\ \frac{1}{\det[\mathbf{M}_a]} [-a_2 k_1 p_{a_1} + a_1 k_2 p_{a_2}] - \mathcal{X}_3 \end{bmatrix} \quad (66)$$

donde

$$\mathcal{X}_1 = \gamma_2 k_p [q_{a_2} - \gamma_2 q_{a_1}] - \frac{k_v [d_1 - d_2]}{\det[\mathbf{M}_a]} [-p_{a_1} + p_{a_2}]$$

$$- \left[ \frac{-d_1 k_1 a_2 + k_2 d_2 a_1}{\det[\mathbf{M}]} \right] \tilde{\delta},$$

$$\mathcal{X}_2 = \frac{k_v [d_1 - d_2]}{\det[\mathbf{M}_a]} [-p_{a_1} + p_{a_2}] - \left[ \frac{-d_2 k_1 a_2 + d_3 k_2 a_1}{\det[\mathbf{M}]} \right] \tilde{\delta},$$

$$\mathcal{X}_3 = \epsilon_0 \frac{a_1 k_2}{\det[\mathbf{M}_a]} \tilde{\delta}.$$

Se puede comprobar que el origen es un equilibrio aislado de (66). Enseguida, es conveniente definir  $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^5$  como

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{p}_a \\ \tilde{\delta} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 : |q_{a_1}| < \frac{a_1 \pi}{2}, |q_{a_2}| < \gamma_2 a_1 \pi \right\} \quad (67)$$

Entonces, el único equilibrio en  $\mathcal{B}$  es el origen del espacio de estado. Inspirado en el análisis de estabilidad presentado en Sandoval et al. (2020) podemos asegurar estabilidad asintótica del origen. A continuación se propone la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$\mathcal{V}_L = \mathcal{H}_a + \frac{1}{2} \tilde{\delta}^2, \quad (68)$$

donde  $\mathcal{H}_a$  se encuentra definida en (4). Al aplicar la derivada temporal a lo largo de (68), nos queda

$$\dot{\mathcal{V}}_L = -k_v \left[ \frac{a_1 a_2 [-p_{a_1} + p_{a_2}]}{\det[\mathbf{M}]} \right]^2 - \epsilon_0 \frac{a_1 k_2}{\det[\mathbf{M}_a]} \tilde{\delta}^2 \quad (69)$$

la cual es una función semidefinida negativa dado que  $k_v, a_1, k_2, M_a$  y  $\epsilon_0 > 0$  son constantes estrictamente positivas, tal que se concluye que el origen es un equilibrio estable. Siguiendo el procedimiento mostrado en Gandarilla et al. (2021) se puede concluir que el origen es un punto de equilibrio localmente asintóticamente estable y, por tanto, demostrar el cumplimiento del objetivo de control (43). Los detalles de esta parte del análisis se han omitido por razones de espacio.

## 4. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Los parámetros utilizados en estas simulaciones fueron recabados del trabajo de Ortega et al. (2002), los cuales son:  $I_1 = 0.1$ ,  $I_2 = 0.2$ ,  $a_1 = I_1 + I_2$ ,  $a_2 = I_2$ ,  $a_3 = I_3$  y  $m_3 = 10$ . La configuración inicial de la planta fue:  $[q_1(0) \ q_2(0) \ p_1(0) \ p_2(0)]^T = [27^\circ \ 0 \ 0 \ 0]^T$ . Las ganancias utilizadas para el controlador fueron:  $k_p = 1$ ,  $k_v = 1.6$ ,  $k_1 = 0.3$ ,  $k_2 = 0.2$ ,  $d_1 = 5$ ,  $d_2 = 2$  y  $d_3 = 1$ . Las últimas tres ganancias cumplen con las desigualdades (55)-(56). La ganancia utilizada para el observador fue  $\epsilon_0 = 0.55$ . Para validar el desempeño del controlador propuesto (57), se aplicó una perturbación  $\delta = 45$  [Nm] durante la respuesta transitoria del péndulo con rueda inercial a los 5 [s]. La sintonía de las ganancias se hizo mediante prueba y error hasta obtener el mejor desempeño posible. El método de integración utilizado para esta serie de simulación fue ODE23, con un error de tolerancia de  $1 \times 10^{-3}$ .

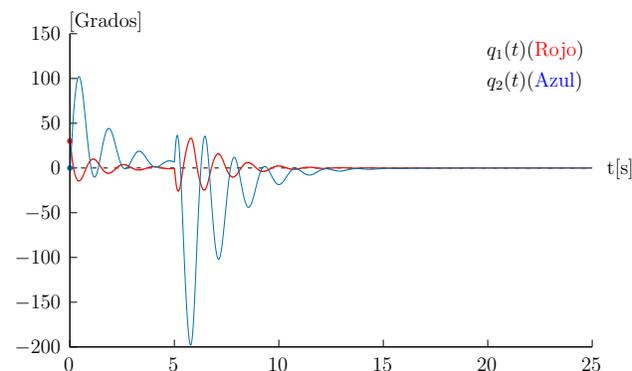


Fig. 2. Evolución temporal de las posiciones  $q_1(t)$  y  $q_2(t)$  ante una perturbación constante  $\delta = 45$  [Nm].

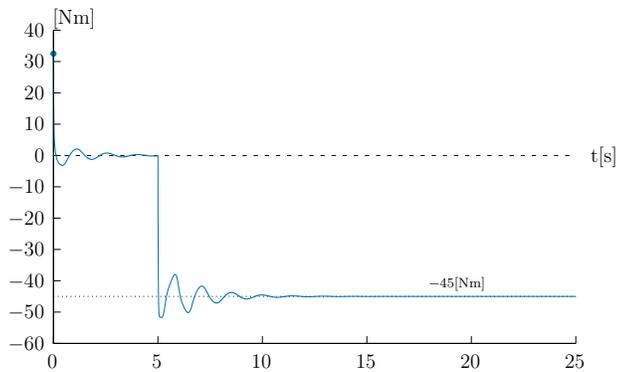


Fig. 3. Entrada de control  $u(t)$  mostrada en (57) ante una perturbación constante  $\delta = 45$  [Nm].

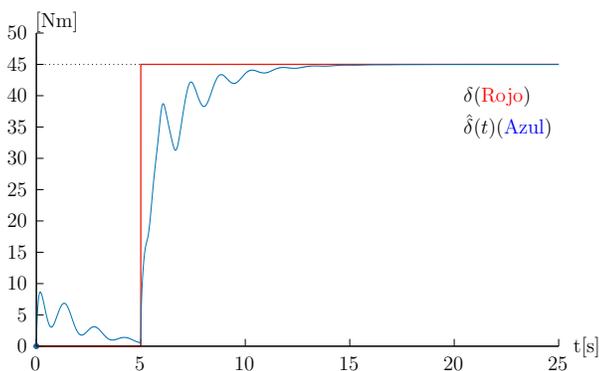


Fig. 4. Comparación entre las respuestas del observador no lineal  $\hat{\delta}$  y la perturbación  $\delta$ .

Note en la Fig. 2 que se cumple el objetivo de control (43) y el criterio de diseño (44), aún cuando la perturbación es aplicada durante la respuesta transitoria. En la Fig. 3, se presenta el desempeño de la ley de control (57), tal que después de 5 segundos su magnitud corresponde a la magnitud de la perturbación de 45 [Nm]. Finalmente, la Fig. 4 muestra la perturbación  $\delta$  y su correcta estimación  $\hat{\delta}$ .

## 5. CONCLUSIONES

Se ha presentado un control por moldeo de energía robusto para el péndulo con rueda inercial afectado por perturbaciones de par constante. El desempeño del controlador propuesto se ha ilustrado con simulaciones numéricas del modelo de un péndulo con rueda inercial. Las simulaciones fueron obtenidas usando MATLAB y Simulink. La adición de un observador no lineal es la parte novedosa del controlador y su diseño permitió compensar las perturbaciones constantes actuando sobre la rueda. Como trabajo futuro se pretende aplicar el controlador a otros sistemas mecánicos subactuados, así como mejorar el controlador para compensar perturbaciones variantes en el tiempo.

## REFERENCIAS

Afkhami, S., Yazdanpanah, M., and Maralani, P. (2003). Stabilization of inertia wheel pendulum using output feedback back-stepping. In *Proceedings of 2003 IEEE Conference on Control Applications, 2003. CCA 2003.*, volume 2, 977–982. IEEE.  
<https://doi.org/10.58571/CNCA.AMCA.2024.086>

Alqudsi, Y.S., Dorrah, H.T., Kassem, A.H., and El-Bayoumi, G.M. (2022). Robust compound control for wheeled inverted pendulum in an uncertain and disturbed environment. *Engineering Science and Technology, an International Journal*, 28, 101024.

Aminsafae, M. and Shafiei, M.H. (2020). A robust approach to stabilization of 2-dof underactuated mechanical systems. *Robotica*, 38(12), 2221–2238.

Aneke, N.P.I. (2003). Control of underactuated mechanical systems.

Block, D.J., Åström, K.J., and Spong, M.W. (2007). *The reaction wheel pendulum*. 1. Morgan & Claypool Publishers.

Donaire, A., Romero, J.G., Ortega, R., Siciliano, B., and Crespo, M. (2017). Robust ida-pbc for underactuated mechanical systems subject to matched disturbances. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 27(6), 1000–1016.

Gandarilla, I., Santibáñez, V., Sandoval, J., and Romero, J.G. (2021). Pid passivity-based control laws for joint position regulation of a self-balancing robot. *Control Engineering Practice*, 116.

Hfaiedh, A., Chemori, A., and Abdelkrim, A. (2020). Stabilization of the inertia wheel inverted pendulum by advanced ida-pbc based controllers: Comparative study and real-time experiments. In *2020 17th International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices (SSD)*, 753–760. IEEE.

Moreno-Valenzuela, J. and Aguilar-Avelar, C. (2018). *Motion control of underactuated mechanical systems*, volume 1. Springer.

Ortega, R., Spong, M.W., Gomez-Estern, F., and Blankenstein, G. (2002). Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(8), 1218–1233.

Perrusquia, A. and Yu, W. (2020). Robust control under worst-case uncertainty for unknown nonlinear systems using modified reinforcement learning. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 30(7), 2920–2936.

Sandoval, J., Cervantes-Pérez, L., Santibáñez, V., Moreno-Valenzuela, J., and Kelly, R. (2024). A ges joint position trajectory tracking smooth controller of torque-driven robot manipulators affected by disturbances. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 34(2), 1032–1053.

Sandoval, J., Kelly, R., Santibáñez, V., and Moreno-Valenzuela, J. (2020). A speed regulator for a torque-driven inertia wheel pendulum. *IFAC-PapersOnLine*, 53(2), 6293–6298.

Sandoval, J., Kelly, R., Santibáñez, V., and Villalobos-Chin, J. (2022). Energy regulation of torque-driven robot manipulators in joint space. *Journal of the Franklin Institute*, 359, 1427–1456.

Spong, M.W. (2005). Underactuated mechanical systems. In *Control problems in robotics and automation*, 135–150. Springer.