

An output-feedback homogeneous controller: robustness analysis and experiment

Javier A. Qui-Martin* Tonametl Sanchez*

* *Control and Dynamical Systems Div., IPICYT, SLP, Mexico (e-mail: javier.qui@ipicyt.edu.mx, tonametl.sanchez@ipicyt.edu.mx).*

Abstract: In this paper we consider an output-feedback homogeneous controller for a class of second order nonlinear systems subject to model uncertainties. We prove that, despite the uncertainty, the controller drives the trajectories of the system to the origin in finite time. The theoretical developments are tested in an electronic experimental set up.

Keywords: Nonlinear control systems, Output feedback control, Stability of nonlinear systems, Lyapunov methods, Robust control, Output regulation.

1. INTRODUCCIÓN

En la ingeniería de control de sistemas no lineales, las tareas de estabilización, regulación o seguimiento son en sí mismas un gran reto de diseño. Estas tareas se complican aún más cuando se imponen restricciones adicionales al diseño del sistema de control, por ejemplo: control por salida (diseño sin la disponibilidad de todas las variables de estado); desempeño (cumplimiento de especificaciones sobre la respuesta del sistema); robustez (estabilidad y desempeño a pesar de variaciones en el modelo).

La propiedad de homogeneidad ha mostrado ser muy útil para el análisis y diseño de sistemas de control. Por ejemplo: los sistemas homogéneos pueden aproximar a una amplia gama de sistemas no lineales manteniendo no linealidades relevantes en el modelo aproximado, vea (Stefani, 1985; Hermes, 1986; Kawski, 1988; Andrieu et al., 2008); una vez verificada la estabilidad asintótica del origen, el tipo de convergencia de las trayectorias al origen queda completamente determinada por el grado de homogeneidad del sistema, vea (Bacciotti and Rosier, 2005, p. 185); algunas propiedades de robustez (e.g., estabilidad entrada-estados) ante ciertas señales externas se establecen directamente por el grado de homogeneidad del sistema sin entradas (si su origen es asintóticamente estable), vea (Bernuau et al., 2013). A pesar de las aportaciones que se pueden encontrar en la literatura (vea, e.g., Kawski (1990); Grüne (2000); Levant (2005); Davila et al. (2005); Qian and Lin (2006); Moreno and Osorio (2012); Polyakov (2020)), el control basado en homogeneidad no es un tema concluido. Además del diseño de controladores y observadores se tienen los temas de desempeño, robustez y discretización, entre otros.

En este artículo, nos concentramos en el diseño de un control homogéneo basado en observador para una clase de sistemas de segundo orden. Este tipo de control y la clase de sistemas es similar a los considerados en (Bernuau et al., 2015; Sanchez et al., 2018) y (Sanchez and Moreno, 2021). Sin embargo, el presente trabajo se diferencia en lo <https://doi.org/10.58571/CNCA.AMCA.2024.085>

siguiente: aquí se considera una clase amplia de sistemas no lineales, a diferencia de (Bernuau et al., 2015) y (Sanchez et al., 2018) en los cuales solo se considera el doble integrador; el esquema de control funciona para un rango de grados de homogeneidad, a diferencia de (Sanchez et al., 2018) y (Sanchez and Moreno, 2021) en los que se fija un grado de homogeneidad específico; se considera el problema de robustez verificando convergencia en tiempo finito al origen a pesar de la incertidumbre en el modelo, a diferencia de (Bernuau et al., 2015; Sanchez et al., 2018) y (Sanchez and Moreno, 2021) en donde no se verifica esta propiedad. En síntesis, la aportación de este trabajo es un controlador homogéneo por realimentación de la salida (con grado de homogeneidad ajustable), que garantiza que las trayectorias del sistema convergen en tiempo finito al origen a pesar de la incertidumbre en el modelo. Los resultados teóricos son confirmados en un arreglo experimental consistente en un circuito electrónico analógico-digital que emula una planta no lineal.

Organización del artículo. En la Sección 2 se proporcionan algunas definiciones y resultados previos que se usarán en el trabajo; en la Sección 3 se describe el esquema de control por salida y su análisis de estabilidad se lleva a cabo en la Sección 4; los resultados experimentales se presentan en la Sección 5; finalmente, en la Sección 6 se proporcionan algunas conclusiones.

Notación. \mathbb{R} , $\mathbb{R}_{\geq 0}$ y $\mathbb{R}_{> 0}$ denotan al conjunto de los reales, los reales no negativos y los reales positivos, respectivamente. $|\cdot|$ denota a la norma euclidiana. L_{∞} denota al conjunto de funciones Lebesgue-medibles y esencialmente acotadas, y $\|\cdot\|_{\infty}$ a la norma supremo esencial. Para $x \in \mathbb{R}$ y $\rho \in \mathbb{R}_{> 0}$ denotamos $[x]^{\rho} = |x|^{\rho} \text{sign}(x)$.

2. PRELIMINARES

En esta sección se recuerdan los conceptos de homogeneidad ponderada y estabilidad entrada-estados. Asimismo se describe la clase de sistemas considerada en este trabajo.

Homogeneidad ponderada.

Definición 1. (Bacciotti and Rosier (2005)). Sea un conjunto de coordenadas fijas $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y un vector de números reales positivos $r = [r_1, \dots, r_n]^T$.

- La familia de dilataciones de un parámetro δ_ε^r está definida por

$$\delta_\varepsilon^r(x) := (\varepsilon^{r_1} x_1, \dots, \varepsilon^{r_n} x_n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0,$$

los números r_i son los pesos de las coordenadas.

- Una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es δ^r -homogénea de grado $m \in \mathbb{R}$ si

$$V(\delta_\varepsilon^r(x)) = \varepsilon^m V(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0.$$

- Un campo vectorial $f = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ es δ^r -homogéneo de grado μ si para cada i la componente f_i es una función δ^r -homogénea de grado $\mu + r_i$.

Un sistema dinámico $\dot{x} = f(x)$ es δ^r -homogéneo de grado $\mu \in \mathbb{R}$ si el campo vectorial f es δ^r -homogéneo de grado μ . Finalmente, para $x \in \mathbb{R}^n$, una norma δ^r -homogénea está

dada por $|x|_r = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{p}{r_i}} \right)^{\frac{1}{p}}$, $p \geq 1$.

Estabilidad entrada-estados. Considere el sistema

$$\dot{x} = f(x, v), \quad (1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, y $v(t) \in \mathbb{R}^m$ es una entrada externa.

Definición 2. (Sontag (1989)). El sistema (1) tiene la propiedad de estabilidad entrada-estados (ISS, por sus siglas en inglés) si existen funciones $\beta \in \mathcal{KL}$ y $\gamma \in \mathcal{K}$ tales que para cualquier entrada $v \in L_\infty$ y para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se satisface

$$|x(t; x_0, d)| \leq \beta(|x_0|, t) + \gamma(\|v\|_\infty) \quad \forall t \geq 0.$$

Defina el campo vectorial extendido asociado a (1)

$$\hat{f}(x, v) = [f^T(x, v) \ 0_m^T]^T \in \mathbb{R}^{n+m}, \quad (2)$$

donde 0_m es el vector cero de dimensión m . El siguiente resultado muestra que cuando un sistema δ^r -homogéneo cumple con ciertas condiciones dicho sistema es ISS.

Lema 1. (Bernuau et al. (2013)). Considere (1). Suponga que \hat{f} es δ^r -homogéneo con pesos $r_i > 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $r_i \geq 0$, $i \in \{n+1, \dots, m\}$ y de grado $\mu \geq -\min\{r_1, \dots, r_n\}$. Suponga también que el origen de (1) es asintóticamente estable con $v = 0$, entonces el sistema es ISS si $\min\{r_{n+1}, \dots, r_m\} > 0$.

Descripción del sistema. En este artículo consideramos la clase de sistemas no lineales descritos por

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = f(x) + U, \quad y = x_1, \quad (3)$$

donde $f, f(x) \in \mathbb{R}$, es una función incierta, $x = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ son los estados, y es la señal de salida que podemos medir y U es la entrada de control.

Suposición 1. Considere (3) y defina el conjunto $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq d\}$ para algún $d \in \mathbb{R}_{>0}$.

- (1) La función incierta $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisface: $f(0) = 0$, y f es localmente Lipschitz, i.e., para cualquier $d \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ existe una constante $d_1 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que

$$|f(x) - f(x')| \leq d_1 |x - x'| \quad \forall x, x' \in D.$$

¹ Observe que en la notación no se indica explícitamente la p , esto debido a la equivalencia entre las normas δ^r -homogéneas una vez fijo el vector de pesos r (Kawski, 1988).

- (2) Se conoce un modelo $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de f que satisface lo siguiente: es localmente Lipschitz y para cualquier $d \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ existe una constante $d_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que

$$|f(x) - \bar{f}(x)| \leq d_2 |x| \quad \forall x \in D.$$

El objetivo de control es llevar las trayectorias del sistema al origen en tiempo finito a pesar de la incertidumbre en f y utilizando solo la medición de la salida y .

3. DESCRIPCIÓN DEL CONTROLADOR

En esta sección se presenta el esquema de control usado en este trabajo, el resultado principal del artículo y el procedimiento para la selección de las ganancias de sintonización.

Esquema de control. Para (3) consideramos la ley de control

$$U = -\bar{f}([x_1, \hat{x}_2]^T) + w(x_1, \hat{x}_2), \quad (4)$$

donde w es la salida de un control dinámico (basado en un observador). La función w está dada por

$$w(x_1, \hat{x}_2) = -\bar{k}_1 [x_1]^p - \bar{k}_2 [\hat{x}_2]^q, \quad (5)$$

en conexión con el observador no lineal

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= -\bar{l}_1 [\hat{x}_1 - x_1]^{p_o} + \hat{x}_2 \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -\bar{l}_2 [\hat{x}_1 - x_1]^{q_o} + w(x_1, \hat{x}_2) \end{aligned} \quad (6)$$

con $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{l}_1, \bar{l}_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ que denominamos ganancias de sintonización del control y los exponentes $p, q, p_o, q_o \in \mathbb{R}_{>0}$ son tales que

$$p \in (0, 1), \quad q = \frac{2p}{p+1}, \quad p_o = \frac{p+1}{2}, \quad q_o = p. \quad (7)$$

Con la finalidad de facilitar el diseño y la descripción de los resultados, las ganancias de sintonización se reescriben de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \bar{k}_1 &= \gamma^{1-p} k_1, & \bar{k}_2 &= \gamma^{1-q} k_2, \\ \bar{l}_1 &= \gamma^{1-p_o} l_1, & \bar{l}_2 &= \gamma^{1-q_o} l_2, \\ l_1 &= \gamma_o^{1-p_o} l_{1o}, & l_2 &= \gamma_o^{1-q_o} l_{2o}. \end{aligned} \quad (8)$$

Aunque esta descripción de las ganancias parece algo engorrosa, se verá que en realidad facilita el análisis así como el diseño del sistema de control.

Sistema retroalimentado. Con lo definido anteriormente, el sistema (3) en lazo cerrado con (4)-(6) queda como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \tilde{f}(x, \hat{x}) - \bar{k}_1 [x_1]^p - \bar{k}_2 [\hat{x}_2]^q \\ \dot{\hat{x}}_1 &= -\bar{l}_1 [\hat{x}_1 - x_1]^{p_o} + \hat{x}_2 \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -\bar{l}_2 [\hat{x}_1 - x_1]^{q_o} + w(x_1, \hat{x}_2), \end{aligned} \quad (9)$$

donde $\tilde{f}(x, \hat{x}) = f(x) - \bar{f}([x_1, \hat{x}_2]^T)$ es el término de incertidumbre. Ahora, definiendo el error de observación como $e = \hat{x} - x$ (i.e., $e_1 = \hat{x}_1 - x_1$ y $e_2 = \hat{x}_2 - x_2$), a partir de (9) se obtiene la dinámica

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \tilde{f}(x, x + e) - \bar{k}_1 [x_1]^p - \bar{k}_2 [x_2 + e_2]^q \\ \dot{e}_1 &= -\bar{l}_1 [e_1]^{p_o} + e_2 \\ \dot{e}_2 &= -\bar{l}_2 [e_1]^{q_o} - \tilde{f}(x, x + e), \end{aligned} \quad (10)$$

Ésta dinámica es de interés debido a que al asegurar que las trayectorias convergen al origen, se asegura que el error de observación converge a cero, lo que implica que $\hat{x}_2 \rightarrow x_2$. Observe que en la segunda ecuación de (10) el estado del error e_2 se puede considerar como una perturbación que

afecta a la medición del estado x_2 , ésta particularidad se analizará más adelante.

Resultado principal. Para poder proporcionar el resultado principal del artículo, observe que el campo vectorial de (10) con $\tilde{f} = 0$ es δ^r -homogéneo con un vector de pesos $r = [2, p+1, 2, p+1]$ y un grado $\mu = p-1$. A continuación proporcionamos el resultado principal de este trabajo.

Teorema 1. Considere el sistema (3) bajo la Suposición 1, el controlador (4)-(8), y la dinámica de error (10). Defina $X = [x^\top e^\top]^\top$. Para cualquier $a \in \mathbb{R}_{>0}$, y para cualesquiera ganancias

$$k_1, k_2, l_{10}, l_{20}, \gamma_o \in \mathbb{R}_{>0},$$

existe $\gamma^* \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que para toda $\gamma \geq \gamma^*$ el origen de (10) es estable en tiempo finito, con un dominio de atracción A tal que $\{X \in \mathbb{R}^4 : |X|_r \leq a\} \subset A$.

La demostración del Teorema 1 es el contenido de la Sección 4.

Diseño de ganancias. Aunque el Teorema 1 garantiza la estabilidad para cualquier juego de ganancias $k_1, k_2, l_{10}, l_{20}, \gamma_o \in \mathbb{R}_{>0}$ y una γ suficientemente grande, no especifica nada sobre el desempeño. Por esta razón, a continuación damos un procedimiento heurístico para la sintonización de las ganancias (para los primeros dos pasos se pueden utilizar los criterios dados en (Sanchez et al., 2023), los últimos dos pueden realizarse por simulación).

- (1) Elegir k_1 y k_2 para garantizar un desempeño transitorio deseado del sistema

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -k_1[x_1]^p - k_2[x_2]^q.$$

- (2) Elegir l_{10} y l_{20} para garantizar un desempeño transitorio deseado del sistema

$$\dot{x}_1 = -l_{10}[x_1]^{p_o} + x_2, \quad \dot{x}_2 = -l_{20}[x_1]^{q_o}.$$

- (3) Aumentar (o disminuir) γ_o para aumentar (o disminuir) la velocidad de convergencia de las trayectorias del sistema

$$\dot{x}_1 = -\gamma_o^{1-p_o} l_{10}[x_1]^{p_o} + x_2, \quad \dot{x}_2 = -\gamma_o^{1-q_o} l_{20}[x_1]^{q_o}.$$

- (4) Aumentar γ para incrementar el radio de la región de atracción², esto también incrementará la velocidad de respuesta del sistema en lazo cerrado (9).

4. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD

En esta sección se da la demostración del Teorema 1, ésta se divide en dos partes: primero se realiza el análisis de estabilidad del caso particular del sistema controlado nominal (sin incertidumbre); la segunda parte es el caso del sistema con incertidumbre.

4.1 Estabilidad del sistema nominal

Considere el sistema auxiliar

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = -k_1[z_1]^p - k_2[z_2 + \hat{z}_2]^q \quad (11)$$

$$\dot{\hat{z}}_1 = \hat{z}_2 - l_1[\hat{z}_1]^{p_o}, \quad \dot{\hat{z}}_2 = -l_2[\hat{z}_1]^{q_o}. \quad (12)$$

La idea es primero analizar el sistema de manera desacoplada, es decir haciendo $\hat{z}_2 = 0$ en (11). Para el siguiente resultado vea, e.g., (Bernuau et al., 2015; Cruz-Zavala et al., 2018).

² Es complicado estimar el tamaño de γ^* , sin embargo éste depende de las cotas d_1, d_2 en la Suposición 1.

Lema 2. Considere (11)-(12) con (7). Para cualesquiera $k_1, k_2, l_1, l_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ se satisface lo siguiente:

- el origen de (11) con $\hat{z}_2 = 0$ es asintóticamente estable;
- el origen de (12) es asintóticamente estable.

Un procedimiento estándar para demostrar el anterior lema es el uso de funciones de Lyapunov no estrictas en combinación con el principio de invarianza para campos continuos (Michel et al., 2008).

Propiedad Estabilidad Entrada al Estado Se mostró que el origen de cada sistema aislado es asintóticamente estable en el sentido Lyapunov. Ahora, para verificar que el origen del sistema acoplado (11)-(12) también tiene estabilidad en el sentido de Lyapunov, utilizaremos la propiedad de ISS de (11). Primero se define el campo vectorial extendido para (11) como

$$g(z, \hat{z}_2) = \begin{bmatrix} -k_1[z_1]^p - k_2[z_2 + \hat{z}_2]^q \\ z_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Se puede verificar que g es δ^r -homogéneo de grado $\mu = p-1$ con pesos $r = [2, p+1, 2]$. Así, (como $r_3 = 2 > 0$) a partir del Lema 1 tenemos el siguiente resultado

Lema 3. El sistema (11) tiene la propiedad ISS con respecto a la entrada \hat{z}_2 .

Estamos en posición de establecer el siguiente resultado.

Lema 4. Considere (11)-(12) con (7). Para cualesquiera $k_1, k_2, l_1, l_2 \in \mathbb{R}_{>0}$, el origen del sistema es asintóticamente estable.

Demostración. Del Lema 2 y del hecho que (12) es δ^r -homogéneo de grado negativo se puede concluir que \hat{z} converge a cero en tiempo finito (Bacciotti and Rosier, 2005). Por lo tanto, considerando el Lema 3, podemos asegurar que las trayectorias del sistema (11)-(12) también convergen a cero. La estabilidad asintótica en el sentido de Lyapunov se argumenta de manera completamente análoga a la prueba del Lema 4.7 en (Khalil, 2002).

Ahora consideremos el cambio de variable

$$e = \gamma \hat{z}, \quad x = \gamma z, \quad (13)$$

con $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$. Así, de (11)-(12) obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\gamma^{1-p} k_1[x_1]^p - \gamma^{1-q} k_2[x_2 + e_2]^q, \\ \dot{e}_1 &= -\gamma^{1-p_o} l_1[e_1]^{p_o} + e_2 \\ \dot{e}_2 &= -\gamma^{1-q_o} l_2[e_1]^{q_o}. \end{aligned} \quad (14)$$

Utilizando (8), podemos reescribir (14) como

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\bar{k}_1[x_1]^p - \bar{k}_2[x_2 + e_2]^q, \quad (15)$$

$$\dot{e}_1 = -\bar{l}_1[e_1]^{p_o} + e_2, \quad \dot{e}_2 = -\bar{l}_2[e_1]^{q_o}, \quad (16)$$

que coincide con (10) para $\tilde{f} = 0$. Como el cambio de variable (13) es un difeomorfismo, las propiedades de estabilidad de (11)-(12) se heredan a (15)-(16), con lo que se demuestra el siguiente resultado.

Lema 5. Considere (10) con (7), (8) y $\tilde{f} = 0$. Para cualesquiera $k_1, k_2, l_1, l_2, \gamma \in \mathbb{R}_{>0}$, el origen del sistema es asintóticamente estable.

4.2 Estabilidad del sistema con incertidumbre

El análisis llevado a cabo en esta sección se realiza, en parte, siguiendo (Sanchez and Moreno, 2021). Observe que (11)-(12) es δ^r -homogéneo con vector de pesos $r = [2, p + 1, 2, p + 1]$ y grado $\mu = p - 1 < 0$. Además sabemos que su origen es asintóticamente estable y por lo tanto estable en tiempo finito. Así, existe una función de Lyapunov para el sistema que es estricta, diferenciable y δ^r -homogénea de grado $m > 0$ (Bacciotti and Rosier, 2005, p. 184). Definimos tal función como $V_0 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por $V_0(z, \hat{z})$. Derivando a lo largo de las trayectorias del sistema, tenemos $\dot{V}_0 = (\frac{\partial V_0}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial V_0}{\partial \hat{z}} \dot{\hat{z}}) = -W_0(z, \hat{z})$, donde W_0 es positiva definida. Observe que para cualquier $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ la función $V_\gamma : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, dada por $V_\gamma(x, e) = V_0(\gamma^{-1}x, \gamma^{-1}e)$, es una función de Lyapunov para (14). Es fácil verificar que $\dot{V}_\gamma = \dot{V}_0$ y $\dot{V}_\gamma \leq -W(x, e)$, donde $W(x, e) = W_0(\gamma^{-1}x, \gamma^{-1}e)$.

Ahora se considera V_γ como una función candidata de Lyapunov para (10). Derivamos a lo largo de las trayectorias del sistema obteniendo

$$\dot{V}_\gamma \leq -W(x, e) + \left(\frac{\partial V_\gamma}{\partial x} + \frac{\partial V_\gamma}{\partial e} \right) \tilde{f}(x, x_2 + e_2).$$

Observe que para cualquier γ , $W(x, e)$ es siempre positiva definida. Considerando el cambio de variable (13) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{V}_\gamma &\leq -W_0(z, \hat{z}) + \left(\frac{\partial V_0}{\partial z} \frac{1}{\gamma} + \frac{\partial V_0}{\partial \hat{z}} \frac{1}{\gamma} \right) \tilde{f}(x, x_2 + e_2), \\ \dot{V}_\gamma &\leq -W_0(z, \hat{z}) + \frac{1}{\gamma} \left| \frac{\partial V_0}{\partial z_2} + \frac{\partial V_0}{\partial \hat{z}_2} \right| |\tilde{f}(x, x_2 + e_2)|. \end{aligned} \quad (17)$$

Utilizando la definición de homogeneidad verificamos que W_0 es δ^r -homogéneo de grado $m + \mu$. Ahora, con el fin de encontrar una cota para $\frac{\partial V_0}{\partial z_2} + \frac{\partial V_0}{\partial \hat{z}_2}$ en función de W_0 , obtenemos su grado de homogeneidad, siendo este $m - r_2$. Así, existe una constante $c_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$\left| \frac{\partial V_0(z, \hat{z})}{\partial z_2} + \frac{\partial V_0(z, \hat{z})}{\partial \hat{z}_2} \right| \leq c_0 W_0^{\frac{m-r_2}{m+\mu}}(z, \hat{z}),$$

y, por lo tanto, de (17) obtenemos la siguiente expresión

$$\dot{V}_0 \leq -W_0(z, \hat{z}) + \frac{c_0}{\gamma} W_0^{\frac{m-r_2}{m+\mu}}(z, \hat{z}) |\tilde{f}(x, x_2 + e_2)|. \quad (18)$$

Por otro lado, el término \tilde{f} se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x_1, x_2 + e_2) &= [f(x) - f(x + e)] + \\ &\quad [f(x + e) - \tilde{f}([x_1, x_2 + e_2]^T)], \end{aligned}$$

de modo que, de acuerdo con la Suposición 1, tenemos que

$$|\tilde{f}(x, x_2 + e_2)| \leq (d_1 + L_{\tilde{f}})|e| + d_2|x + e|,$$

donde $L_{\tilde{f}}$ denota la constante de Lipschitz de \tilde{f} . Utilizando nuevamente (13) obtenemos

$$|\tilde{f}(x, x_2 + e_2)| \leq \gamma(d_1 + L_{\tilde{f}})|\hat{z}| + \gamma d_2|z + \hat{z}|. \quad (19)$$

Observe que tanto $|\hat{z}|$ como $|z + \hat{z}|$ están acotados superiormente por $|Z|$, con $Z = [z^T \hat{z}^T]^T$. Ahora, recordando que $r_1 = r_3 = 2$ y $r_2 = r_4 = p + 1$, existe $c_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que (vea, e.g., (Sanchez and Moreno, 2021, Lem. 3))

$$|Z|^2 \leq c_1 \left(W_0^{\frac{2r_1}{m+\mu}}(z, \hat{z}) + W_0^{\frac{2r_2}{m+\mu}}(z, \hat{z}) \right).$$

De esta desigualdad podemos obtener la siguiente

$$|Z| \leq \begin{cases} \sqrt{2c_1} W_0^{\frac{2}{m+\mu}}(z, \hat{z}), & W_0(z, \hat{z}) \geq 1, \\ \sqrt{2c_1} W_0^{\frac{p+1}{m+\mu}}(z, \hat{z}), & W_0(z, \hat{z}) < 1. \end{cases}$$

Así, utilizando ésta última cota y (19) en (18) tenemos (abusando de la notación, y para ahorrar espacio, obviaremos los argumentos de W_0 en algunas partes)

$$\begin{aligned} \dot{V}_\gamma &\leq -W_0 + c_2 W_0^{\frac{m-r_2}{m+\mu}} W_0^{\frac{2}{m+\mu}}, \quad W_0 \geq 1, \\ \dot{V}_\gamma &\leq -W_0 + c_2 W_0^{\frac{m-r_2}{m+\mu}} W_0^{\frac{p+1}{m+\mu}}, \quad W_0 < 1, \end{aligned}$$

donde $c_2 = c_0 \sqrt{2c_1} (d_1 + L_{\tilde{f}} + d_2)$. Equivalentemente,

$$\begin{aligned} \dot{V}_\gamma &\leq -W_0(z, \hat{z}) + c_2 W_0^\zeta(z, \hat{z}), \quad (20) \\ \zeta &= \begin{cases} \frac{m-p+1}{m+\mu}, & W_0(z, \hat{z}) \geq 1, \\ \frac{m}{m+\mu}, & W_0(z, \hat{z}) < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora, comparamos el término definido negativo de (20) con el término derivado de la incertidumbre. Para esto,

$$\dot{V}_\gamma \leq -\frac{1}{2}W_0 + \left(c_2 W_0^\zeta - \frac{1}{2}W_0 \right)$$

de aquí podemos ver que $\dot{V}_\gamma \leq -\frac{1}{2}W_0$ si $c_2 W_0^\zeta \leq \frac{1}{2}W_0$. Ésta última desigualdad se satisface si y solo si

$$W_0^{\zeta-1}(z, \hat{z}) = W_0^{\bar{\zeta}}(z, \hat{z}) \leq \frac{1}{2c_2}, \quad (21)$$

$$\bar{\zeta} = \begin{cases} \frac{2(1-p)}{m+\mu}, & W_0(z, \hat{z}) \geq 1, \\ \frac{1-p}{m+\mu}, & W_0(z, \hat{z}) < 1. \end{cases}$$

Como W_0 es δ^r -homogénea de grado $m + \mu$, existe una constante $c_3 > 0$ tal que $W_0(z, \hat{z}) \leq c_3 |Z|_r^{m+\mu}$. Utilizando (13) tenemos que $c_3 |Z|_r^{m+\mu} \leq c_2 |\frac{1}{\gamma} X|_r^{m+\mu}$. Haciendo uso del Lema 4 en (Sanchez and Moreno, 2021) obtenemos

$$c_3 \left| \frac{1}{\gamma} X \right|_r^{m+\mu} \leq \frac{1}{\alpha(\gamma)} |X|_r^{m+\mu}$$

donde α es una función de clase \mathcal{K}_∞ dada por

$$\alpha(\gamma) = \begin{cases} \gamma^{\frac{1}{p+1}}, & \gamma \leq 1, \\ \gamma^{\frac{1}{2}}, & \gamma > 1. \end{cases}$$

De este análisis obtenemos la siguiente desigualdad

$$W_0^{\bar{\zeta}}(z, \hat{z}) \leq [c_3 |Z|_r^{m+\mu}]^{\bar{\zeta}} \leq \left[\frac{c_3}{\alpha(\gamma)} |X|_r^{m+\mu} \right]^{\bar{\zeta}}.$$

De aquí tenemos que (21) se satisface si

$$\left[\frac{c_3}{\alpha(\gamma)} |X|_r^{m+\mu} \right]^{\bar{\zeta}} \leq \frac{1}{2c_2} \Leftrightarrow |X|_r^{m+\mu} \leq \frac{\alpha(\gamma)}{c_3} \nu^{-1} \left(\frac{1}{2c_2} \right),$$

donde ν es una función de clase \mathcal{K}_∞ dada por

$$\nu(s) = \begin{cases} s^{\frac{2(1-p)}{m+\mu}}, & s \leq 1, \\ s^{\frac{1-p}{m+\mu}}, & s > 1. \end{cases}$$

Por lo tanto, (como $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$) para cualesquiera $d_1, d_2, a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, γ siempre puede ser elegida de manera que (21) se cumpla.

5. RESULTADOS EXPERIMENTALES

En ésta sección consideramos la planta no lineal

$$\ddot{z} = -0.5\dot{z} - 4.54 \sin(z) + U. \quad (22)$$

Donde U es la entrada de control. Para los experimentos, el sistema (22) se emuló utilizando un arreglo electrónico consistente en un filtro analógico Sallen-Key en lazo cerrado con un microcontrolador (ATSAME51J20A de Microchip) para emular el término no lineal. El tiempo de muestreo para esta tarea es de 1ms. La señal de control se obtiene del controlador implementado en otro microcontrolador (igual que el anterior) configurado con un tiempo de muestreo $h = 10$ ms.

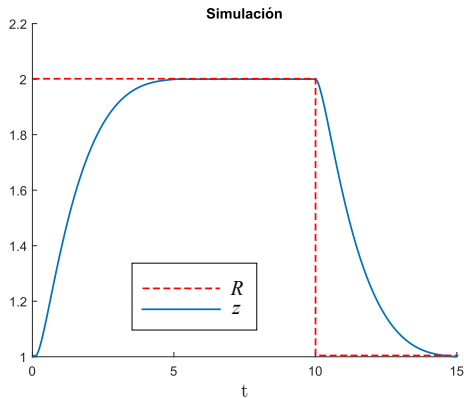


Fig. 1. Señal z . Simulación de la respuesta con realimentación de estados.

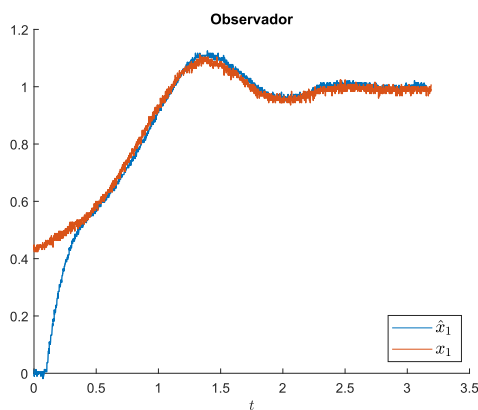


Fig. 2. Comportamiento de \hat{x}_1 con $\gamma_o = 1$.

El objetivo es que la salida z de la planta siga una referencia constante R . Definiendo $x_1 = z - R$ y $x_2 = -\dot{z}$, establecemos la entrada de control $U = -0.5\hat{x}_2 + 4.54 \sin(x_1 + R) - \bar{k}_1[x_1]^p - \bar{k}_2[\hat{x}_2]^q$, donde \hat{x}_2 se obtiene de la implementación discreta de (6). Para dicha discretización, se utilizó el método numérico de Euler explícito (vea, e.g., (Butcher, 2016, p. 55)), quedando como sigue (con $\epsilon_k = \hat{x}_{1k} - x_{1k}$)

$$\begin{aligned}\hat{x}_{1(k+1)} &= \hat{x}_{1k} + h(-\bar{l}_1[\epsilon_k]^{p_o} + \hat{x}_{2k}) \\ \hat{x}_{2(k+1)} &= \hat{x}_{2k} + h(-\bar{l}_2[\epsilon_k]^{q_o} - \bar{k}_1[x_{1k}]^p - \bar{k}_2[\hat{x}_{2k}]^q).\end{aligned}$$

Los parámetros utilizados en el experimento son: $p = 1/2$; $k_1 = 3$ y $k_2 = 5$ para tener un comportamiento sobreamortiguado de la salida de la planta; $l_{10} = 6$ y $l_{20} = 9$ para un comportamiento subamortiguado de la respuesta del observador (vea Sanchez et al. (2023)).

En la Fig. 1 se presenta la respuesta de la planta obtenida por simulación con el control por retroalimentación de los estados para $\gamma = 1$.

En la primer serie de experimentos se varía el valor de γ_o , manteniendo $\gamma = 1$, para verificar que la velocidad del observador se incrementa con γ_o . Además se verifica que el controlador lleva la salida de la planta al valor de la referencia en tiempo finito. En las figuras 2, 3 y 4 se observa la convergencia de \hat{x}_1 a x_1 para diferentes valores de γ_o (la escala vertical está desplazada en una unidad). Se observa que aumentando γ_o se mejora la velocidad de respuesta del observador, sin embargo, también se puede ver un cambio en el comportamiento de x_1 . Este cambio en la respuesta de la planta se observa mejor en la Fig. 5.

<https://doi.org/10.58571/CNCA.AMCA.2024.085>

503

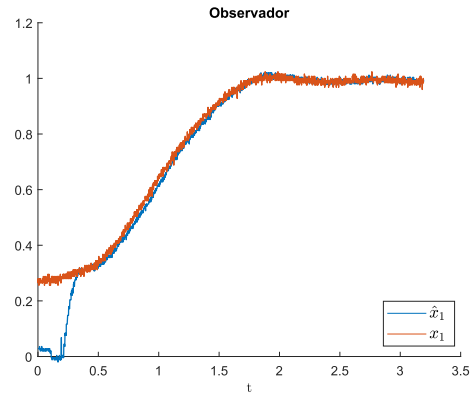


Fig. 3. Comportamiento de \hat{x}_1 con $\gamma_o = 10$.

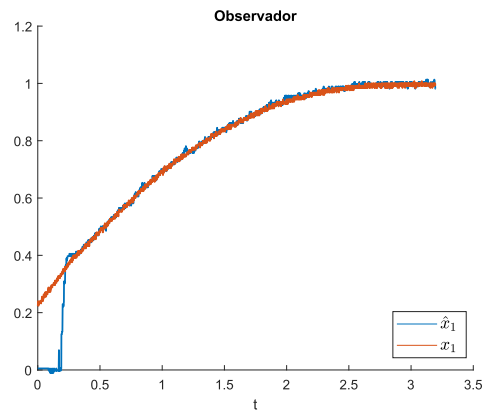


Fig. 4. Comportamiento de \hat{x}_1 con $\gamma_o = 500$.

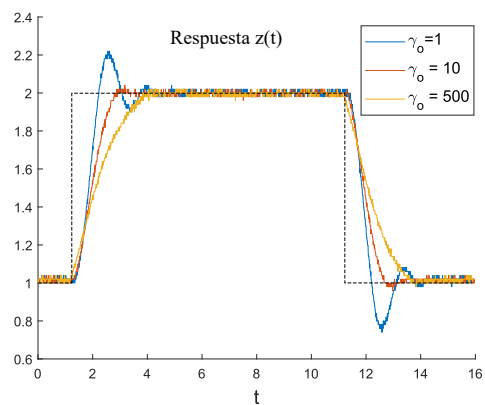


Fig. 5. Respuesta de la planta con diferentes valores de γ_o .

Se puede apreciar que el aumento de la ganancia γ_o (al producir una respuesta más rápida del observador) ayuda a que la respuesta de la planta recupere el comportamiento nominal diseñado (sobreamortiguado, que se puede ver en la simulación en la Fig. 1).

La segunda serie de experimentos consiste en variar la ganancia γ que afecta al observador y al controlador. En la Fig. 6 se puede observar que el incremento de γ mejora el tiempo de convergencia sin modificar el tipo de respuesta de la planta.

6. CONCLUSIONES

En este artículo se estudió teóricamente el diseño de un controlador homogéneo para garantizar (además de con-
Copyright© AMCA, ISSN: 2594-2492

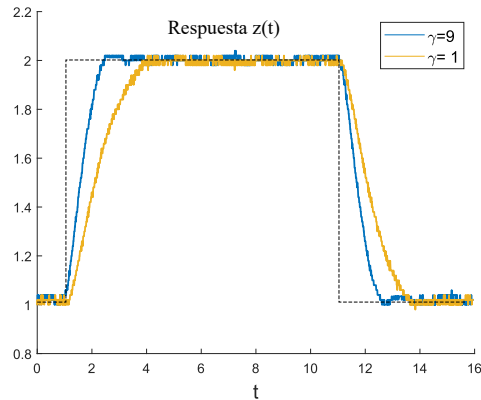


Fig. 6. Respuesta de la planta con diferentes valores de γ .

vergenza en tiempo finito) robustez ante incertidumbres en el modelo. Además, ésta propiedad se verificó experimentalmente. Es importante mencionar que en el experimento, la no linealidad es generada por un microcontrolador y se trata de cancelar por medio de la señal de control generada en otro microcontrolador, sin embargo, debe observarse que el paso de discretización para calcular la señal de control es un orden de magnitud más grande, lo que contribuye a generar mayor incertidumbre. A pesar de esto, se aprecia en los experimentos la eficacia del esquema de control. Otro aspecto relevante del esquema de control es que permite utilizar los resultados de (Sanchez et al., 2023) para el diseño tanto de las ganancias del controlador como del observador con la finalidad de buscar un comportamiento transitorio deseado de la respuesta de la planta. Una desventaja del resultado en el Teorema 1 es que no se proporciona un estimado de γ^* , sin embargo, un estimado del mínimo requerido de la ganancia γ se puede obtener por simulación.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo de Conahcyt CVU-1205859 y CVU-371652, así como el apoyo del M. en C. Crescencio Hernández Rosales en el Laboratorio de Control de la División de Control y Sistemas Dinámicos del IPICYT.

REFERENCIAS

- Andrieu, V., Praly, L., and Astolfi, A. (2008). Homogeneous Approximation, Recursive Observer Design, and Output Feedback. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 47(4), 1814–1850. doi:10.1137/060675861.
- Bacciotti, A. and Rosier, L. (2005). *Liapunov Functions and Stability in Control Theory*. Springer, Berlin, 2nd edition. doi:10.1007/b139028.
- Bernuau, E., Polyakov, A., Efimov, D., and Perruquetti, W. (2013). Verification of ISS, iISS and IOSS properties applying weighted homogeneity. *Systems & Control Letters*, 62(12), 1159 – 1167. doi:10.1016/j.sysconle.2013.09.004.
- Bernuau, E., Perruquetti, W., Efimov, D., and Moulay, E. (2015). Robust finite-time output feedback stabilisation of the double integrator. *International Journal of Control*, 88(3), 451–460. doi:10.1080/00207179.2014.956340.
- Butcher, J.C. (2016). *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 3rd edition.
<https://doi.org/10.58571/CNCA.AMCA.2024.085>

- Cruz-Zavala, E., Sanchez, T., Moreno, J.A., and Nuño, E. (2018). Strict Lyapunov functions for homogeneous finite-time second-order systems. In *2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 1530–1535. doi:10.1109/CDC.2018.8619664.
- Davila, J., Fridman, L., and Levant, A. (2005). Second-order sliding-mode observer for mechanical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(11), 1785–1789. doi:10.1109/TAC.2005.858636.
- Grüne, L. (2000). Homogeneous State Feedback Stabilization of Homogenous Systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38(4), 1288–1308. doi:10.1137/S0363012998349303.
- Hermes, H. (1986). Nilpotent approximations of control systems and distributions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 24(4), 731–736. doi:10.1137/0324045.
- Kawski, M. (1988). Stabilizability and nilpotent approximations. In *27th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, volume 2, 1244–1248. doi:10.1109/CDC.1988.194520.
- Kawski, M. (1990). Homogeneous stabilizing feedback laws. *Control-Theory and Advanced Technology*, 6(4), 497–516.
- Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 3rd. edition.
- Levant, A. (2005). Homogeneity approach to high-order sliding mode design. *Automatica*, 41(5), 823–830. doi:10.1016/j.automat.2004.11.029.
- Michel, A.N., Hou, L., and Liu, D. (2008). *Stability of Dynamical Systems*. Birkhäuser, Boston. doi:doi.org/10.1007/978-0-8176-4649-3.
- Moreno, J.A. and Osorio, M. (2012). Strict Lyapunov functions for the Super-twisting algorithm. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(4), 1035–1040. doi:10.1109/TAC.2012.2186179.
- Polyakov, A. (2020). *Generalized Homogeneity in Systems and Control*. Springer, Cham, Switzerland. doi:10.1007/978-3-030-38449-4.
- Qian, C. and Lin, W. (2006). Recursive observer design, homogeneous approx., and nonsmooth output feedback stabilization of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(9), 1457–1471.
- Sanchez, T. and Moreno, J.A. (2021). Homogeneous output-feedback control with disturbance-observer for a class of nonlinear systems. *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control*, 31(9), 3686–3707. doi:doi.org/10.1002/rnc.5207.
- Sanchez, T., Moreno, J.A., and Fridman, L.M. (2018). Output feedback continuous twisting algorithm. *Automatica*, 96, 298–305. doi:10.1016/j.automat.2018.06.049.
- Sanchez, T., Zavala-Río, A., and Zamora-Gómez, G.I. (2023). On the transient behavior and gain design for a class of second order homogeneous systems. *Automatica*, 149, 110830. doi:doi.org/10.1016/j.automat.2022.110830.
- Sontag, E.D. (1989). Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(4), 435–443. doi:10.1109/9.28018.
- Stefani, G. (1985). Polynomial approximations to control systems and local controllability. In *24th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 33–38. doi:10.1109/CDC.1985.268467.