

Modeling and characterization of a resonant converter from a Hamiltonian systems perspective

Agustín Sánchez-Contreras*
Oscar Miguel Rodríguez-Benítez* Isaac Ortega-Velázquez*
Gerardo Espinosa-Pérez*

* Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de
Ingeniería-UNAM 04510 Ciudad de México, México

Abstract: In this paper, Hamiltonian modeling methods for resonant converters, their advantages, properties and limitations are analyzed. The main contribution is to propose a non-extended order continuous Hamiltonian model that recovers the system signals and provides a practical scheme for model-based control. The advantages of the proposed modeling methodology is illustrated by studying the particular example given by current-fed resonant converter.

Keywords: Power converter, Resonant converter, Hamiltonian Model Systems, SSA, GSSA, Complex Harmonics.

1. INTRODUCCIÓN

Actualmente las diversas aplicaciones de los convertidores DC-DC se encuentran gobernadas por las topologías PWM, clasificados así por el control de sus interruptores a través de una señal modulada por ancho de pulso a frecuencias del orden de los kHz. Sin embargo, al aumentar la frecuencia de conmutación para reducir el peso, el tamaño de los componentes magnéticos, de condensadores e incrementar la densidad de potencia, se presentan pérdidas de potencia significativamente altas en estos convertidores Tarzarni et al. (2023). Como alternativa surgen las topologías Cuasi-resonantes y Resonantes Liu et al. (1987), que se caracterizan por su uso en altas frecuencias (MHz), en las que mediante el uso de técnicas de conmutación a corriente o voltaje cero, incrementan su potencia sin sacrificar su eficiencia Akhlaghi and Farzanehfard (2020).

Esta característica se logra agregando un tanque resonante a los convertidores PWM, modificando así las topologías usuales. Desde la perspectiva del control, debido a que se incrementa la complejidad de la dinámica del sistema, el modelado y análisis del sistema no se pueden realizar utilizando técnicas estándar como el SSA (promedio de espacio de estado, por sus siglas en inglés). Esto limita las técnicas de control basadas en modelo, como lo son las técnicas asociadas a sistemas Hamiltonianos, las cuales representan un escenario atractivo para el control de los convertidores resonantes ya que aprovechan las nociones de energía inherentes en el sistema y proporcionan herramientas formales para el análisis de estabilidad.

Actualmente existen técnicas generalizadas GSSA (promedio de espacio de estados generalizado, por sus siglas en inglés) Ayubirad and Yazdanpanah (2021), que tratan de abordar este escenario, por lo que en este documento se analizarán las diferentes técnicas de promediación, su complejidad y la viabilidad para aplicarlos en el control de los Convertidores Resonantes (CR).

En este trabajo se considera como caso de estudio un convertidor resonante alimentado en corriente (CRAC), propuesto para aplicaciones en sistemas fotovoltaicos (Ponce-Silva et al. (2010) y Rodriguez Benitez et al. (2021)).

El CRAC (Fig. 1) está conformado por una fuente de voltaje continua a la entrada (V_{dc}), dos inductores de entrada L_1 y L_2 como fuentes de corriente, dos interruptores unidireccional (S_1 y S_2) y un tanque resonante (L_r , C_r y R_{eq}), donde la carga (R_{eq}), representa la resistencia equivalente asociada a la parte de rectificación del convertidor.

Las principales contribuciones de este documento son:

- Modelar el CRAC, como un sistema Hamiltoniano con entradas discretas.
- Proponer un modelo Hamiltoniano continuo aproximando las señales de entrada a través de su expansión en serie de Fourier compleja.

Para ello, se caracterizan los modos de operación del sistema, se obtiene el modelo conmutado; y se analizan las diferentes técnicas de modelado por promediación de estados, para determinar su viabilidad. Finalmente

se propone un nuevo modelo Hamiltoniano continuo, y se compara numéricamente con el modelo GSSA y las señales del CRAC generados por su circuito electrónico.

2. OPERACIÓN DEL SISTEMA

El funcionamiento básico del CRAC consiste en generar una señal de entrada cuadrada de corriente, a través de los inductores (L_1 , L_2) y los interruptores (S_1, S_2), la frecuencia de esta señal debe coincidir con la frecuencia natural del tanque resonante, de tal forma que a la salida del tanque resonante se filtre solo la componente fundamental de la señal de entrada.

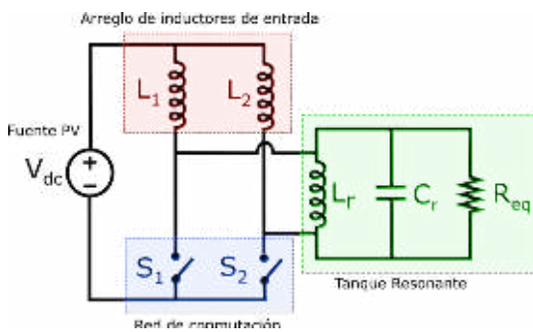


Fig. 1. Caso de estudio Convertidor Resonante Alimentado en Corriente CRAC.

El análisis de la dinámica del sistema, se puede caracterizar a través de tres modos de operación del convertidor, definidos por los estados de los interruptores ($S_1 = 0, S_2 = 1$), ($S_1 = 1, S_2 = 0$) y ($S_1 = 1, S_2 = 1$).

Modo 1. $S_1 = 0, S_2 = 1$.

El inductor L_1 se desacopla del tanque resonante quedando en paralelo a la fuente de DC por lo que se carga de manera lineal. Por otra parte el inductor L_2 se acopla al tanque resonante, el circuito equivalente se muestra en la siguiente Figura 2.

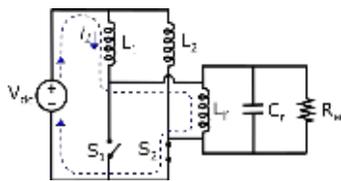


Fig. 2. Modo de operación 1 de CRAC

El análisis a través de la Ley de mallas o voltajes de Kirchoff, y la Ley de nodos o corrientes, permite establecer las ecuaciones dinámicas del sistema, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} L_1 \frac{d}{dt} i_1 + v_r &= V_{dc} \\ L_2 \frac{d}{dt} i_2 &= V_{dc} \\ C \frac{d}{dt} v_r + \frac{1}{R_{eq}} v_r + i_r - i_1 &= 0 \\ L_r \frac{d}{dt} i_r - v_r &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

donde v_r es el voltaje en las terminales del capacitor C_r , i_1 , i_2 son las corrientes en L_1 y L_2 y i_r es la corriente del inductor L_r .

Modo 2. $S_1 = 1, S_2 = 0$.

Análogamente al caso anterior, se alternan los estados de los interruptores (ver Figura 3).

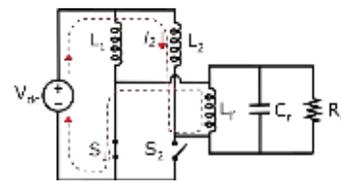


Fig. 3. Modo de operación 2 de CRAC

Sin embargo, en este caso la corriente de entrada al tanque resonante i_{L_2} toma el sentido contrario respecto a la corriente i_{L_1} del Modo 1, lo que implica que se obtiene una señal simétrica negativa respecto al Modo 1. Las ecuaciones de estado de este Modo son:

$$\begin{aligned} L_1 \frac{d}{dt} i_1 &= V_{dc} \\ L_2 \frac{d}{dt} i_2 + v_r &= V_{dc} \\ C \frac{d}{dt} v_r + \frac{1}{R_{eq}} v_r + i_r - i_2 &= 0 \\ L_r \frac{d}{dt} i_r - v_r &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Modo 3. Traslape $S_1 = 1, S_2 = 1$.

Este modo de operación se caracteriza por que ambos interruptores se mantienen encendidos, de tal manera que ambos inductores de entrada L_1 y L_2 quedan en paralelo respecto a la fuente V_{dc} , es decir, en carga lineal, desacoplando totalmente las fuentes de corriente del tanque resonante. Este modo de operación garantiza que la corriente de entrada al convertidor sea continua.

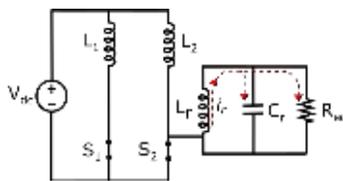


Fig. 4. Modo de operación 3 de CRAC

Las ecuaciones de estado quedan definidas como:

$$\begin{aligned} L_1 \frac{d}{dt} i_1 &= V_{dc} \\ L_2 \frac{d}{dt} i_2 &= V_{dc} \\ C \frac{d}{dt} v_r + \frac{1}{R_{eq}} v_r + i_r &= 0 \\ L_r \frac{d}{dt} i_r - v_r &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

3. MODELO HAMILTONIANO CONMUTADO

Conjuntando las ecuaciones correspondiente a los tres modos de operación se obtiene:

$$\begin{aligned} L_1 \frac{d}{dt} i_1 + \alpha_2 v_r &= V_{dc} \\ L_2 \frac{d}{dt} i_2 + \alpha_1 v_r &= V_{dc} \\ C \frac{d}{dt} v_r + \frac{1}{R_{eq}} v_r + i_r - \alpha_1 i_2 - \alpha_2 i_1 &= 0 \\ L_r \frac{d}{dt} i_r - v_r &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

donde α_1 y α_2 son funciones discretas con valores $\{0, 1\}$ que describen los estados de los interruptores S_1 y S_2 . Luego, transformando a variables Hamiltonianas de flujo y esfuerzos con las relaciones constitutivas $q = Cv_r$ y $\lambda_m = L_m i_m$, $m = 1, 2, r$, la expresión anterior toma la forma:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -\alpha_2 \frac{q}{C} + V_{dc} \\ \dot{\lambda}_2 &= -\alpha_1 \frac{q}{C} + V_{dc} \\ \dot{q} &= -\frac{1}{R_{eq}} \frac{q}{C} + \alpha_1 \frac{\lambda_2}{L_2} + \alpha_2 \frac{\lambda_1}{L_1} - \frac{\lambda_r}{L_r} \\ \dot{\lambda}_r &= \frac{q}{C} \end{aligned} \quad (5)$$

donde q es la carga en el capacitor y λ_m son los flujos en los inductores.

Al definir $x = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ q \ \lambda_r]^\top$, se obtiene la estructura Hamiltoniana:

$$\dot{x} = (J(\alpha_2, \alpha_1) - R) \nabla H + GV_{dc} \quad (6)$$

donde:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_{eq}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$J(\alpha_2, \alpha_1)$ matriz antisimétrica de interconexión, $R \geq 0$ matriz de disipación, $\nabla H = \left[\frac{\lambda_1}{L_1} \ \frac{\lambda_2}{L_2} \ \frac{q}{C} \ \frac{\lambda_r}{L_r} \right]^\top$ y $G = [1 \ 1 \ 0 \ 0]^\top$. A demás, la matriz $J(\alpha_2, \alpha_1)$ se puede separar de tal forma que las señales de entrada queden de manera afín:

$$\dot{x} = (J_0 - R) \nabla H + J_1 \nabla H \alpha_1 + J_2 \nabla H \alpha_2 + GV_{dc} \quad (8)$$

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

4. MODELO GSSA HAMILTONIANO

El método de Promediación de Estados (SSA) aplicado en convertidores se basa en obtener un modelo continuo (promediado $\langle \cdot \rangle$) de la dinámica del sistema, basado en la ecuación:

$$\langle x \rangle(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau \quad (10)$$

donde T es el período de conmutación, que se asume constante, y la frecuencia de conmutación mucho mayor que la frecuencia natural de los convertidores, es decir, la dinámica de las variables de estado se consideran lentas respecto a la conmutación del sistema. Este esquema es adecuado por sus características para las topologías PWM.

Para casos donde T no es pequeño respecto a la escala temporal de las variables de estado, topologías Resonantes y Cuasiresonantes, el enfoque se extiende a las técnicas de aproximación conocidas como Promediación Generalizada del Espacio de Estados (GSSA, por sus siglas en inglés), las cuales pueden ser:

a) **GSSA de orden reducido** Xu and Lee (1998), reduce los estados del convertidor promediando la dinámica del tanque resonante, sin embargo no recupera todas las formas de las señales del sistema perdiendo información relevante de los grados de libertad para el control.

b) **Expansión de armónicos GSSA** Sanders et al. (1991), Mahdavi et al. (1997), Green (1993). Recupera las formas de las señales de los estados, se basa en el hecho de expresar una señal, en el intervalo de conmutación a través de su expansión en serie de Fourier:

$$x(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle x \rangle_n(t) e^{jn\omega_0\tau} \quad (11)$$

donde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, el número de armónicos n se trunca a un valor que permita obtener las formas de ondas de las señales del sistema original, cada uno de los coeficientes $\langle x \rangle_n(t)$ consideran también a su complejo conjugado $\langle x \rangle_{-n}(t)$ y se desarrollan a través de los operadores de la derivada temporal y el producto bilineal, dadas por:

$$\frac{d\langle x \rangle_k(t)}{dt} = \left\langle \frac{dx}{dt} \right\rangle_k(t) - jk\omega_o \langle x \rangle_k(t)$$

$$\langle qx \rangle_k = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \langle q \rangle_{k-i} \langle x \rangle_i \quad (12)$$

donde $K \leq m$ es el armónico deseado y m el truncamiento.

Este esquema es atractivo para modelar el CRAC, por lo que se desarrolla para poder evaluar y comparar la complejidad de los grados de libertad.

Para el modelo GSSA del CRAC, se consideran que las formas de las señales de L_1 y L_2 , se aproximan bien con las componentes de orden cero y primer armónico. Esto resulta de considerar que la corriente de entrada debe ser una señal continua pero con un rizo de corriente debido a que en los modos de operación los inductores se acoplan al tanque resonante:

$$i_1(t) = \langle i_1 \rangle_0 + \langle i_1 \rangle_{-1} e^{-j\omega t} + \langle i_1 \rangle_1 e^{j\omega t}$$

$$i_2(t) = \langle i_2 \rangle_0 + \langle i_2 \rangle_{-1} e^{-j\omega t} + \langle i_2 \rangle_1 e^{j\omega t} \quad (13)$$

En variables Hamiltonianas estos coeficientes se asocian a los flujos $z_1 = \langle \lambda_1 \rangle_0$, $z_2 = \langle \lambda_1 \rangle_1^R$ y $z_3 = \langle \lambda_1 \rangle_1^I$ de L_1 y $z_4 = \langle \lambda_2 \rangle_0$, $z_5 = \langle \lambda_2 \rangle_1^R$ y $z_6 = \langle \lambda_2 \rangle_1^I$ de L_2 , donde los superíndices R y I , denotan la componente asociada a la fase compleja y a su compleja conjugada respectivamente. Para las variables del tanque, se consideran solo las componentes del primer armónico ya que en el tanque se obtendrán señales sinusoidales puras según se describió en la operación del sistema, por tanto:

$$v_r(t) = \langle v_r \rangle_{-1} e^{-j\omega t} + \langle v_r \rangle_1 e^{j\omega t}$$

$$i(t) = \langle i \rangle_{-1} e^{-j\omega t} + \langle i \rangle_1 e^{j\omega t} \quad (14)$$

donde $z_7 = \langle q \rangle_1^R$, $z_8 = \langle q \rangle_1^I$, $z_9 = \langle \lambda_r \rangle_1^R$ y $z_{10} = \langle \lambda_r \rangle_1^I$. Para las señales de entrada α_1 y α_2 , se considera el armónico de orden cero, que corresponde al ciclo de trabajo y el primer armónico para expresar el comportamiento oscilatoria de la componente fundamental

$$\alpha_1(t) = \langle \alpha_1 \rangle_0 + \langle \alpha_1 \rangle_{-1} e^{-j\omega t} + \langle \alpha_1 \rangle_1 e^{j\omega t}$$

$$\alpha_2(t) = \langle \alpha_2 \rangle_0 + \langle \alpha_2 \rangle_{-1} e^{-j\omega t} + \langle \alpha_2 \rangle_1 e^{j\omega t} \quad (15)$$

Posteriormente se aplican las ecuaciones (12), para calcular la dinámica de cada uno de los coeficientes en variables de estado Hamiltonianas, para λ_1 se tiene:

$$\frac{d}{dt} \langle \lambda_1 \rangle_0^R = -\frac{1}{C} [\langle q \rangle_1^R \langle \alpha_1 \rangle_1^R - \langle q \rangle_1^I \langle \alpha_1 \rangle_1^I] + \langle V_{dc} \rangle_0^R$$

$$\frac{d}{dt} \langle \lambda_1 \rangle_1^R = -\frac{1}{C} \langle q \rangle_1^R \langle \alpha_1 \rangle_0^R + w \langle \lambda_1 \rangle_1^I$$

$$\frac{d}{dt} \langle \lambda_1 \rangle_1^I = -\frac{1}{C} [\langle q \rangle_1^I \langle \alpha_1 \rangle_0^R] - w \langle \lambda_1 \rangle_1^R \quad (16)$$

análogamente para el flujo λ_2 se tiene:

$$\frac{d}{dt} \langle \lambda_2 \rangle_0^R = \frac{1}{C} [\langle q \rangle_1^R \langle \alpha_2 \rangle_1^R - \langle q \rangle_1^I \langle \alpha_2 \rangle_1^I] + \langle V_{dc} \rangle_0^R$$

$$\frac{d}{dt} \langle \lambda_2 \rangle_1^R = \frac{1}{C} \langle q \rangle_1^R \langle \alpha_2 \rangle_0^R + w \langle \lambda_2 \rangle_1^I$$

$$\frac{d}{dt} \langle \lambda_2 \rangle_1^I = \frac{1}{C} [\langle q \rangle_1^I \langle \alpha_2 \rangle_0^R] - w \langle \lambda_2 \rangle_1^R \quad (17)$$

para el flujo magnetico del tanque resonante λ :

$$\frac{d}{dt} \langle \lambda \rangle_1^R = \left\langle \frac{q}{c} \right\rangle_1^R + w \langle \lambda \rangle_1^I$$

$$\frac{d}{dt} \langle \lambda \rangle_1^I = \left\langle \frac{q}{c} \right\rangle_1^I - w \langle \lambda \rangle_1^R \quad (18)$$

y para la carga en el tanque resorte se tiene que la expansión GSSA de sus coeficiente a primer orden son:

$$\frac{d}{dt} \langle q \rangle_1^R = \frac{1}{L_1} [\langle \lambda_1 \rangle_1^R \langle \alpha_1 \rangle_0^R + \langle \lambda_1 \rangle_0^R \langle \alpha_1 \rangle_1^R - \langle \lambda_1 \rangle_0^I \langle \alpha_1 \rangle_1^I]$$

$$- \frac{1}{L_2} [\langle \lambda_2 \rangle_1^R \langle \alpha_2 \rangle_0^R + \langle \lambda_2 \rangle_0^R \langle \alpha_2 \rangle_1^R - \langle \lambda_2 \rangle_0^I \langle \alpha_2 \rangle_1^I] \quad (19)$$

$$- \frac{1}{L_r} \langle \lambda \rangle_1^R - \frac{1}{RC} \langle q \rangle_1^R + w \langle q \rangle_1^I$$

$$\frac{d}{dt} \langle q \rangle_1^I = \frac{1}{L_1} [\langle \lambda_1 \rangle_1^I \langle \alpha_1 \rangle_0^R + \langle \lambda_1 \rangle_0^I \langle \alpha_1 \rangle_1^R - \langle \lambda_1 \rangle_0^R \langle \alpha_1 \rangle_1^I]$$

$$- \frac{1}{L_2} [\langle \lambda_2 \rangle_1^I \langle \alpha_2 \rangle_0^R + \langle \lambda_2 \rangle_0^I \langle \alpha_2 \rangle_1^R - \langle \lambda_2 \rangle_0^R \langle \alpha_2 \rangle_1^I] \quad (20)$$

$$- \frac{1}{L_r} \langle \lambda \rangle_1^I - \frac{1}{RC} \langle q \rangle_1^I - w \langle q \rangle_1^R$$

Considerando ahora el estado como $z = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_{10}]^T$ se obtiene la estructura Hamiltoniana de la forma:

$$\dot{z} = [J(z) - R(z)]\nabla H(z) + g \quad (21)$$

donde $J(z) =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\langle \alpha_1 \rangle_1^R & \langle \alpha_1 \rangle_1^I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega L_1 & 0 & 0 & 0 & -\langle \alpha_1 \rangle_0^R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\langle \alpha_1 \rangle_0^R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \langle \alpha_2 \rangle_1^R & -\langle \alpha_2 \rangle_1^I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega L_2 & 0 & 0 & 0 & \langle \alpha_2 \rangle_0^R & 0 \\ \langle \alpha_1 \rangle_1^R & \langle \alpha_1 \rangle_0^R & 0 & -\langle \alpha_2 \rangle_1^R & -\langle \alpha_2 \rangle_0^R & 0 & 0 & 0 & \omega C & -1 \\ -\langle \alpha_1 \rangle_1^I & 0 & \langle \alpha_1 \rangle_0^R & \langle \alpha_2 \rangle_1^I & 0 & -\langle \alpha_2 \rangle_0^R & -\omega C & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \omega L_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\omega L_r & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$D = \begin{bmatrix} 1/L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/L_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/L_r \end{bmatrix} \quad (23)$$

$R = \text{Diag}[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1/R \ 1/R \ 0 \ 0]$, $\nabla H(z) = Dz$, $g = [V_{dc} \ 0 \ 0 \ V_{dc} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ y $H(z) = \frac{1}{2} z^T D z$.

Este modelo aumenta el orden y la complejidad del sistema por lo que buscar alternativas que permitan trabajar con el orden original es mas versátil.

5. MODELO HAMILTONIANO, ENTRADA CONTINUA

La principal contribución de este trabajo es proponer un modelo Hamiltoniano continuo de orden no aumentado que recupere las formas de las señales del CRAC y ofrezca un esquema práctico para el control basado en modelo. Para ello se retoma el modelo (8) donde se busca que las señales α_1 y α_2 sean continuas. Para esto, se parte por modelar a α_i , como (Ver Fig. 5):

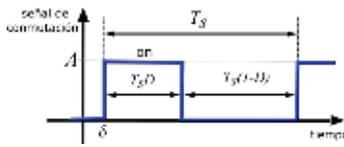


Fig. 5. Señal discreta de entrada.

$$\alpha_i(t) = \begin{cases} A & \text{si } \delta \leq t \leq \delta + T_s D \\ 0 & \text{si } \delta + T_s D < t < \delta + T_s \end{cases} \quad (24)$$

donde A es la amplitud, $\delta \geq 0$ es un retraso temporal de la señal y $T_s = 1/f_{sw}$ es el período de conmutación.

Mediante la serie de Fourier compleja, α_i se puede representar como:

$$\alpha_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_s t} \quad (25)$$

con coeficientes

$$C_n = \frac{1}{T_s} \int_{T_s} \alpha_i(t) e^{-jn\omega_s t} dt \quad (26)$$

Evaluando (24) en (26), con $A = 1$, $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ y $\delta = 0$:

$$C_n = \frac{1}{2j\pi n} (1 - e^{-2j\pi n D}) \quad (27)$$

Al sustituir los coeficientes (27) en la Ec. (25), se puede llegar a la siguiente expansión:

$$\alpha_i(t) = D + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re} [C_n e^{jn\omega_s t}] \quad (28)$$

donde D es el término de orden cero, el cual corresponde al ciclo de trabajo.

Los términos de orden n en (28), representan los armónicos de la aproximación de las señales de entrada, donde se realiza un truncamiento, es decir se elige un orden K al cual fijar la expansión, de tal manera que la señal obtenida capture de manera adecuada las características de las señales de entrada (Ver Fig. 6).

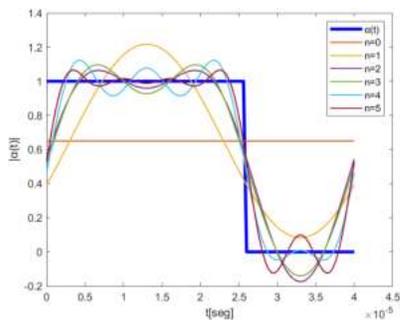


Fig. 6. Simulación en Matlab de la aproximación continua de α_i usando (28), $A = 1$, $T_s = 0.4e - 4s$ y $D=0.65$.

Considerando el modelo Hamiltoniano conmutado (8), se acopla el bloque (28) a sus entradas de tal forma que se recuperan los grados de libertad naturales con los que

se controlan los convertidores en la práctica, el ciclo de trabajo D y la frecuencia de conmutación f_{sw} , los cuales definen la forma de la señal de entrada a través de un circuito integrado de disparo que active el interruptor (MOSFET o IGBT). Además esta conexión no altera del orden del sistema original.

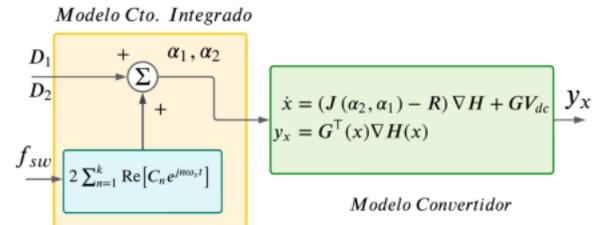


Fig. 7. Modelo Hamiltoniano propuesto.

6. COMPARACIÓN NUMÉRICA

El desarrollo de esta comparativa se realizó comparando en Simulink de Matlab el modelo Hamiltoniano GSSA, el modelo Hamiltoniano continuo propuesto en la sección 5 y el circuito eléctrico del convertidor CRAC controlado con 2 señales PWM. Las simulaciones presentan las siguientes consideraciones:

- Los parámetros de diseño del CRAC son $L_1 = L_2 = 114.8\mu H$, $L_r = 3.605\mu H$, $C_r = 175.6nF$, $R = 21.3116\Omega$ y $V_{dc} = 30V$.
- Tanto inductores como capacitores son ideales.
- D_0 , es implementado utilizando el modelo ideal considerando $V_f = 0.8V$, $R_{on} = .001 \Omega$, $L_{on} = 0 H$, $R_s = 500 \Omega$ y $C_s = 250 pF$.
- La aproximación de α_{approx} fue determinada con un valor de armónicos $n = 2$.
- El paso de integración fue de $5e - 11$

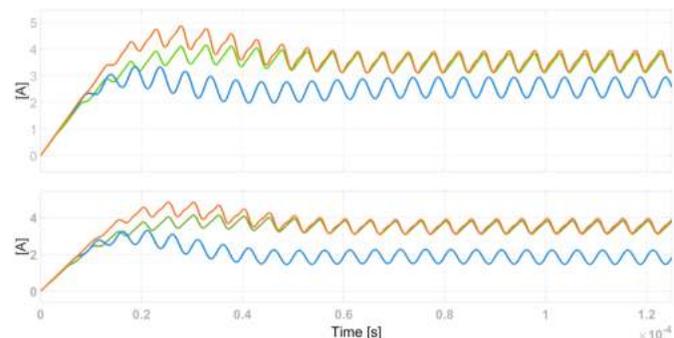


Fig. 8. Señales de corrientes en L_1 y L_2 : En verde: Circuito Eléctrico, en naranja modelo Hamiltoniano propuesto y en azul modelo GSSA

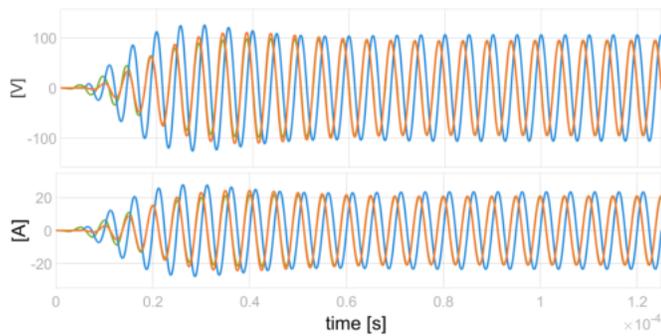


Fig. 9. Señales en el tanque resonante, en verde Circuito Eléctrico, en naranja modelo Hamiltoniano propuesto y en azul modelo GSSA

De acuerdo a las comparaciones numéricas mostradas, la señales del CRAC se recuperaran de forma adecuada mediante el uso de la técnica GSSA y con la aproximación de la entrada mediante su serie de Fourier (Sección 5.), ambos modelos se basan en aprovechar las propiedades periódicas del CRAC y describir su dinámica mediante el uso de expansión de armónicos, sin embargo:

- La técnica GSSA presenta un error en estado estacionario del 25% en amplitud para las señales de los edos. de L_1 y L_2 , y del 5% en los estados del tanque resonante. Además de un error de desfase del 2. Mientras el error del modelo de la sección 5 no supera más del 2% en amplitud y no tiene desfase por lo que recupera de forma adecuada el comportamiento del CRAC. Para corregir los errores del modelo GSSA se deben modificar directamente los estados del modelo incrementado su orden lo cual incrementa la carga numérica.
- La técnica GSSA, al expandir los estados extiende el orden del sistema a 10 variables de estados, incrementando la complejidad para diseñar algoritmos de control.
- Por otra parte el modelo de la Sección 5 al dejar la expansión sobre las señales de entrada, no altera el orden original del sistema Hamiltoniano y dada la estructura del bloque (28) se dejan como grados de libertad la variación del ciclo de trabajo D , que además es lineal a la entrada, y la frecuencia de conmutación f sobre los armónicos. Esta representación obtiene la forma natural en que se controlan los convertidores de potencia en la práctica.
- El modelo de la sección 5 presenta una forma versátil de obtener la dinámica admisible del sistema al no aumentar los estados y dejar los grados de libertad en el bloque de entrada, por lo que presenta una ventaja analítica sobre la complejidad al proponer futuros algoritmos de control basado en modelo, respecto al modelo GSSA.

7. CONCLUSIONES

El modelo Hamiltoniano continuo propuesto resultó más versátil y acertado respecto al GSSA, al no incrementar el orden del sistema original y la complejidad de las variables de estado representa un modelado atractivo para realizar algoritmos de control desde la perspectiva de sistemas Hamiltonianos, para el convertidor CRAC.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue apoyado por DGAPA-UNAM bajo las subvención PAPIIT IN109622, así como al Programa de becas doctorales del Conahcyt.

REFERENCIAS

- Akhlaghi, B. and Farzanehfard, H. (2020). High step-up quasi-resonant converter with low number of components. In *2020 11th Power Electronics, Drive Systems, and Technologies Conference (PEDSTC)*, 1–6. IEEE.
- Ayubirad, M.A. and Yazdanpanah, M.J. (2021). Analysis and robust passivity-based control of zero-voltage switching quasi-resonant cuk converter. *IET Power Electronics*, 14(8), 1409–1420.
- Green, A. (1993). Modelling a push–pull parallel resonant converter using generalised state-space averaging. In *IEE Proceedings B (Electric Power Applications)*, volume 140, 350–356. IET.
- Liu, K.H., Oruganti, R., and Lee, F.C. (1987). Quasi-resonant converters-topologies and characteristics. *IEEE Transactions on Power electronics*, (1), 62–71.
- Mahdavi, J., Emaadi, A., Bellar, M., and Ehsani, M. (1997). Analysis of power electronic converters using the generalized state-space averaging approach. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 44(8), 767–770.
- Ponce-Silva, M., Bautista, J.L., Tapia, A., Nicolas, C.I., Granados, T.R., and Araujo, I. (2010). Parallel-resonant inverter with two current sources: analysis and design methodology. In *12th IEEE International Power Electronics Congress*, 156–160. IEEE.
- Rodriguez Benitez, O.M. et al. (2021). Análisis y evaluación al uso de convertidores resonantes alimentados en corriente aplicados a sistemas fotovoltaicos.
- Sanders, S.R., Noworolski, J.M., Liu, X.Z., and Verghese, G.C. (1991). Generalized averaging method for power conversion circuits. *IEEE Transactions on power Electronics*, 6(2), 251–259.
- Tarzamni, H., Gohari, H.S., Sabahi, M., and Kyyrä, J. (2023). Non-isolated high step-up dc-dc converters: Comparative review and metrics applicability. *IEEE Transactions on Power Electronics*.
- Xu, J. and Lee, C. (1998). A unified averaging technique for the modeling of quasi-resonant converters. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 13(3), 556–563.