

Observer based trajectory tracking for a leader-follower scheme.

L.A. Castro-Romero.* H.N. García-Lozano.*
J.L. Alfonso-Jiménez.* J. Santiaguillo-Salinas.*
R.F.González-Zárte.*

* *División de Estudios de Posgrado, Universidad del Papaloapan,
68400, Loma Bonita, Oaxaca, México (e-mail:
aldaircastro2022@outlook.com, garcia.hiram@gmail.com,
jluis.01@icloud.com, jsantiaguillo@outlook.com,
rafaelfgz.unpa@gmail.com)*

Abstract:

In this paper, the design of state observer control strategy for the formation following of pair of differential robots using leader-follower scheme is presented. The mathematical model of the mobile robots is constructed from kinematic extension. The non-measurable states of system are estimated by means of Luenberger-type state observers. This proposal is based on enabling a robot *follower* to maintain a predefined formation with respect to a robot *leader*. The task of the leading robot is to follow a pre-established by the user trajectory. The theoretical results are numerically and experimentally validated.

Keywords: Esquema líder-seguidor, observador tipo Luenberger, modelo cinemático extendido, robots diferenciales, seguimiento en formación.

leader-follower scheme, Luenberger observer, extended kinematic model, differential-drive robots, formation tracking.

1. INTRODUCCIÓN

En un esquema líder-seguidor, un robot líder se encarga de guiar a otro robot, denominado seguidor, a través de un entorno. Estos robots pueden desempeñar distintas tareas como seguimiento de trayectorias, generación de caminos, evasión de obstáculos o mantener una formación, entre otras, (Lian et al., 2019). Específicamente, cuando el robot líder tiene la tarea de seguir una trayectoria deseada, mientras el seguidor realiza una formación con respecto al líder se le conoce como seguimiento de trayectoria en formación. Este es un problema abierto de los sistemas multi-robots, (Baturone, 2005), el cual ha llamado la atención de los investigadores en los últimos años.

La versatilidad del esquema líder-seguidor a dado pauta a diversas investigaciones, por ejemplo, en (Ramírez-Cárdenas et al., 2019), se presenta un esquema líder-seguidor que permite lograr un consenso en un grupo de robots móviles tipo péndulo invertido. En (Mayora-Reyes et al., 2024), se trata el problema de seguimiento de trayectorias en dos robots manipuladores de tres grados de libertad, haciendo uso del esquema líder-seguidor. En (Tiang and Mahyuddin, 2016), se emplea el esquema líder-seguidor, en donde el robot líder guía y dirige el movimiento de un conjunto de robots seguidores, en (Rodríguez-Castellanos et al., 2022), se diseña una estrategia de control linealizante y un estimador basado en redes neuronales para el seguimiento

de un robot móvil diferencial en esquema líder-seguidor. En (Bugarín-Carlos et al., 2022), se plantea una solución para el seguimiento en formación líder-seguidor de robots móviles diferenciales, utilizando un control servo-visual basado en imagen.

Para llevar a cabo el esquema líder-seguidor es necesario contar con todos los estados del sistema. En algunas ocasiones estos no son fácilmente medibles, por lo que una solución es el uso de observadores de estados.

Los observadores de estados han sido utilizados en distintos trabajos, tales como, en (Lima-Pérez et al., 2021), en donde se propone un control no lineal para un robot auto equilibrado con observadores de estados en retroalimentación con un PID no lineal. (González et al., 2012) estima los estados no medibles para controlar un helicóptero Quanser de 2 GDL. Por otro lado en (Rosaldo-Serrano et al., 2019), se da solución al seguimiento de trayectorias haciendo uso de observadores de estados para estimar las velocidades lineales y angulares de los robots aéreos.

En (Castro-Romero et al., 2024), se realiza el seguimiento de trayectorias con base en un modelo cinemático de segundo orden haciendo uso de observadores de estados.

Este trabajo se enfoca en el problema de seguimiento de trayectoria en el esquema líder-seguidor con robots móviles diferenciales, modelados con base en ecuaciones diferenciales de segundo orden. Adicionalmente se utilizan observadores de estados tipo Luenberger a fin de

estimar los estados no medibles. Con los estados estimados se utiliza una realimentación de estados vía linealización entrada/salida, de modo que el error de seguimiento, tanto en el líder como en el seguidor, decaiga asintóticamente a cero.

Este trabajo está organizado en las siguientes secciones. En la sección 2 se describe el modelo matemático de los robots obtenido a partir de una extensión cinemática. En la sección 3 y 4 se describen el diseño del observador de estados y la estrategia de control respectivamente. En la sección 5 se presenta el análisis en lazo cerrado del sistema control-observador. En la sección 6 se presentan la validación numérica y experimental. En la sección 7, unas breves conclusiones y posibles trabajos a futuro finalizan este documento.

2. PRELIMINARES

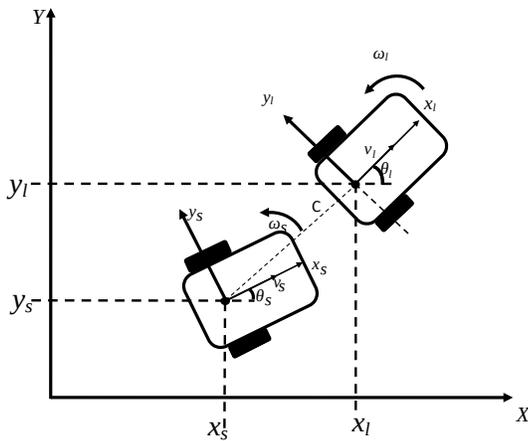


Fig. 1. Diagrama del esquema líder-seguidor

2.1 Modelo cinemático de los robots.

Una de las configuraciones más utilizadas en los robots móviles a ruedas, debido a la simplicidad de su modelo cinemático, es la diferencial. Por tal motivo, esta configuración ha sido el centro de distintas investigaciones, por ejemplo el esquema líder-seguidor. Para este esquema se requiere describir el desplazamiento y orientación de cada uno de los robots móviles, el robot líder R_l y el robot seguidor R_s , con respecto a un marco de referencia fijo como se muestra en la Fig.(1). Esto se logra mediante el modelo matemático que describe el comportamiento de un punto de control en los robots.

El punto de control se fija en el centro del eje virtual de las ruedas motorizadas de cada robot móvil diferencial (RMD), sobre el cual se encuentra posicionado el origen de su marco de referencia $(x_i, y_i; i = l, s)$. La diferencia entre el eje x del marco de referencia fijo con respecto al marco de referencia de cada robot, se define como el ángulo de orientación θ_i , $i = l, s$. La velocidad longitudinal del líder se denota por v_l y ω_l la velocidad angular. Así mismo, la velocidad lineal y angular del seguidor son denotadas por v_s y ω_s , respectivamente. El vector constante C es la posición relativa entre el robot líder y el robot seguidor.

El modelo cinemático de los RMD's esta dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{\theta}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & 0 \\ \sin(\theta_i) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ \omega_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\theta_i) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ \omega_i \end{bmatrix}, i = l, s \quad (1)$$

donde $A(\theta_i)$ es la matriz de desacoplamiento cinemático del modelo del RMD.

Para realizar el seguimiento líder-seguidor, se propone una estrategia de control basada en una linealización entrada/salida, (Siciliano et al., 2010). Esta estrategia linealiza el modelo (1) vía retroalimentación de estados, utilizando la inversa de la matriz de desacoplamiento cinemático. Sin embargo, en el modelo (1) la matriz de desacoplamiento cinemático $A(\theta_i)$ es singular, por lo cual se tiene que hacer uso de un modelo cinemático alternativo. Este modelo se construye mediante una extensión cinemática, la cual considera la aceleración longitudinal u_i como una nueva variable de control.

2.2 Modelo cinemático extendido

Considere el modelo (1) con la variable de control adicional u_i

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{\theta}_i \\ \dot{v}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_i \cos(\theta_i) \\ v_i \sin(\theta_i) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \omega_i + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_i. \quad (2)$$

Se deriva \dot{x}_i y \dot{y}_i de modo que éstas variables dependan de las entradas de control (ω_i, u_i)

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{y}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -v_i \sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & v_i \cos(\theta_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ \omega_i \end{bmatrix}, \quad (3)$$

con lo que se obtiene una dinámica de segundo orden (Ren and Beard, 2008). En el modelo (3), la matriz de desacoplamiento cinemático es no singular, siempre que $v \neq 0$. Por lo tanto, es posible utilizar la estrategia de control seleccionada.

Es importante resaltar que, las velocidades lineales en el modelo cinemático extendido (3) no son fácilmente medibles. Una solución, considerada en este trabajo, es estimar éstas velocidades con el uso de observadores de estados.

3. OBSERVADORES DE ESTADOS

Para construir un observador, el sistema debe ser de estado completo observable. Un sistema, en variables de estado, es de estado completo observable, si la matriz de observabilidad

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

tiene rango igual a la dimensión del vector de estado. Para llevar a cabo el diseño del observador se hace uso

de la representación en variables de estado del modelo cinemático extendido

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_i &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \eta_i + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \cos(\theta_i) & -v_i \sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & v_i \cos(\theta_i) \end{bmatrix} \mu_i, \quad (5) \\ \psi_i &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \eta_i. \end{aligned}$$

Aquí $\eta_i = [\eta_{1i}, \eta_{2i}, \eta_{3i}, \eta_{4i}]^T$, es el vector de estados, con $\eta_{1i} = x_i, \eta_{2i} = y_i, \eta_{3i} = \dot{x}_i, \eta_{4i} = \dot{y}_i$, μ_i las entradas y ψ_i la salida.

A fin de verificar la observabilidad del sistema (5) se calcula la matriz \mathbf{O} ,

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

la cual es de rango 4, lo que implica que es completamente observable.

Un observador de orden completo tipo Luenberger tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\eta}}_i &= A_i \hat{\eta}_i + B_i \mu_i + L_i (y_i - \hat{\psi}_i), \quad (7) \\ \hat{\psi}_i &= C_i \hat{\eta}_i. \end{aligned}$$

Donde $\hat{\eta}_i = [\hat{\eta}_{1i}, \hat{\eta}_{2i}, \hat{\eta}_{3i}, \hat{\eta}_{4i}]^T$ con $i = l, s$; es el estado estimado, μ_i las entradas de control y $\hat{\psi}_i$ las salidas observadas.

Defina el error de estimación como la diferencia entre los estados del sistema y los estados estimados $\hat{e}_i = \eta_i - \hat{\eta}_i$. La dinámica del error se obtiene mediante la diferencia de (5) y (7) $\dot{\hat{e}}_i = \dot{\eta}_i - \dot{\hat{\eta}}_i$.

La siguiente proposición garantiza la convergencia del error de estimación a cero.

Proposición 1. El error de estimación \hat{e}_i converge a cero, si se selecciona una matriz L tal que $(A_i - L_i C_i)$ sea Hurwitz, ver Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz (Ogata, 2003).

Demostración. La dinámica del error es

$$\begin{aligned} \dot{\hat{e}}_i &= \dot{\eta}_i - \dot{\hat{\eta}}_i \\ &= A_i \eta_i + B_i \mu_i - A_i \hat{\eta}_i - B_i \mu_i - L_i C_i (\eta_i - \hat{\eta}_i), \\ &= (A_i - L_i C_i) \hat{e}_i. \quad (8) \end{aligned}$$

La selección de L tal que $A_i - L_i C_i$ sea Hurwitz, implica que todos los polos se ubiquen en el semi-plano complejo izquierdo, garantizando el decaimiento asintótico del error a cero. \square

4. ESTRATEGIA DE CONTROL

Para alcanzar el seguimiento de trayectoria en esquema líder-seguidor, se utiliza la estrategia de control linealización entrada/salida. Esta estrategia hace uso de la siguiente entrada de control

$$\begin{bmatrix} u_i \\ \omega_i \end{bmatrix} = A_i^{-1}(v_i, \theta_i) \begin{bmatrix} r_{x_i} \\ r_{y_i} \end{bmatrix} \quad (9)$$

donde el vector $(r_{x_i}, r_{y_i})^T$ esta construido con las siguientes variables de control auxiliar:

$$\begin{bmatrix} r_{x_i} \\ r_{y_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{p_i} e_{x_i} - k_{d_i} \dot{e}_{x_i} + \ddot{x}_{d_i} \\ -k_{p_i} e_{y_i} - k_{d_i} \dot{e}_{y_i} + \ddot{y}_{d_i} \end{bmatrix}, \quad i = l, s, \quad (10)$$

donde

$$\begin{aligned} e_{1_i} &= e_{x_i} = x_i - x_d = \eta_{1i} - x_{d_i}, \\ e_{2_i} &= e_{y_i} = y_i - y_d = \eta_{2i} - y_{d_i}, \quad i = l, s. \quad (11) \end{aligned}$$

Aquí (x_{d_i}, y_{d_i}) es la trayectoria deseada del líder y $x_{d_s} = x_l + \mathcal{C}_x, y_{d_s} = y_l + \mathcal{C}_y$ la trayectoria deseada del seguidor.

Sustituyendo la estrategia de control (9) en el sistema (3) se obtiene

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{y}_i \end{bmatrix} &= A_i(v_i, \theta_i) \begin{bmatrix} u_i \\ \omega_i \end{bmatrix} \\ &= A_i(v_i, \theta_i) A_i^{-1}(v_i, \theta_i) \begin{bmatrix} r_{x_i} \\ r_{y_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{x_i} \\ r_{y_i} \end{bmatrix} \quad i = l, s. \quad (12) \end{aligned}$$

Esta estrategia de control linealiza el modelo del robot, reduciendo el problema de seguimiento a un control lineal en términos del error, (Siciliano et al., 2010).

Proposición 2. Considere el sistema (3) con la estrategia de control (9). La selección de $k_{p_i}, k_{d_i} > 0$ garantiza la convergencia del error a cero.

Demostración. Sustituyendo las señales auxiliares de control (10) en (12) se obtiene

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{y}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{p_i} e_{x_i} - k_{d_i} \dot{e}_{x_i} + \ddot{x}_d \\ -k_{p_i} e_{y_i} - k_{d_i} \dot{e}_{y_i} + \ddot{y}_d \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Igualando (13) a cero

$$\ddot{e}_{x_i} + k_{d_i} \dot{e}_{x_i} + k_{p_i} e_{x_i} = 0, \quad (14)$$

$$\ddot{e}_{y_i} + k_{d_i} \dot{e}_{y_i} + k_{p_i} e_{y_i} = 0. \quad (15)$$

La elección de $k_{p_i} > 0$ y $k_{d_i} > 0$, garantiza el error en e_{x_i} y e_{y_i} de las ecuaciones (14) y (15) decaigan a cero. Cuando se selecciona $k_{d_i} = 2\sqrt{k_{p_i}}$, se obtiene la forma mas rápida de aproximar el error a cero, sin sobreimpulso, ver análisis de la respuesta transitoria (Ogata, 2003). \square

5. ANÁLISIS EN LAZO CERRADO CONTROL-OBSERVADOR

En la siguiente sección se analiza el efecto de usar la estrategia de control (9) y los estados estimados, $\hat{\eta}_{3i}, \hat{\eta}_{4i}$, por el observador (7) en el modelo del robot (5).

El sistema controlador-observador, para el i -ésimo robot R_i , es el siguiente

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\hat{\eta}}_{1_i} \\ \dot{\hat{\eta}}_{2_i} \\ \dot{\hat{\eta}}_{3_i} \\ \dot{\hat{\eta}}_{4_i} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\eta}_{1_i} \\ \hat{\eta}_{2_i} \\ \hat{\eta}_{3_i} \\ \hat{\eta}_{4_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_{x_i} \\ r_{y_i} \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\eta}_{3_i} \\ \hat{\eta}_{4_i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -k_{p_i}(\hat{\eta}_{1_i} - x_{d_i}) - k_{d_i}(\hat{\eta}_{3_i} - \dot{x}_{d_i}) + \ddot{x}_{d_i} \\ -k_{p_i}(\hat{\eta}_{2_i} - y_{d_i}) - k_{d_i}(\hat{\eta}_{4_i} - \dot{y}_{d_i}) + \ddot{y}_{d_i} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (16)$$

definiendo el error entre el estado observado y la trayectoria deseada como $\tilde{e}_i = [\tilde{e}_{1_i}, \tilde{e}_{2_i}, \tilde{e}_{3_i}, \tilde{e}_{4_i}]$, donde

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{1_i} &= \tilde{e}_{x_i} = \hat{\eta}_{1_i} - x_{d_i}, \\ \tilde{e}_{2_i} &= \tilde{e}_{y_i} = \hat{\eta}_{2_i} - y_{d_i}, \\ \tilde{e}_{3_i} &= \tilde{e}_{\dot{x}_i} = \hat{\eta}_{3_i} - \dot{x}_{d_i}, \\ \tilde{e}_{4_i} &= \tilde{e}_{\dot{y}_i} = \hat{\eta}_{4_i} - \dot{y}_{d_i}. \end{aligned} \quad (17)$$

Utilizando la definición del error (11), derivando \tilde{e}_{3_i} y \tilde{e}_{4_i} de (17) y agrupando los términos diferenciales de segundo orden se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{e}}_{1_i} + \dot{x}_{d_i} \\ \dot{\tilde{e}}_{2_i} + \dot{y}_{d_i} \\ \dot{\tilde{e}}_{3_i} - \ddot{x}_{d_i} \\ \dot{\tilde{e}}_{4_i} - \ddot{y}_{d_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\eta}_{3_i} \\ \hat{\eta}_{4_i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -k_{p_i}e_{1_i} - k_{d_i}\tilde{e}_{3_i} \\ -k_{p_i}e_{2_i} - k_{d_i}\tilde{e}_{4_i} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Por lo tanto, la dinámica del error de la trayectoria deseada para el i -ésimo robot R_i es

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{e}}_{1_i} \\ \dot{\tilde{e}}_{2_i} \\ \dot{\tilde{e}}_{3_i} \\ \dot{\tilde{e}}_{4_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_{p_i} & 0 & -k_{d_i} & 0 \\ 0 & -k_{p_i} & 0 & -k_{d_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e}_{1_i} \\ \tilde{e}_{2_i} \\ \tilde{e}_{3_i} \\ \tilde{e}_{4_i} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Proposición 3. Sea (19) la dinámica del error entre la trayectoria deseada y los estados del sistema (16). Entonces el error en el seguimiento de trayectoria converge a cero siempre y cuando los valores de $k_{d_i} > 0, i = l, s$.

Demostación. Los valores propios de (19) son las raíces del polinomio

$$(s(s + k_{d_i}))^2 + 2k_{p_i}s(s + k_{d_i}) + k_{p_i}^2 = (s(s + k_{d_i}) + k_{p_i})^2,$$

si los valores de k_{d_i} son positivos, el polinomio sera Hurwitz. \square

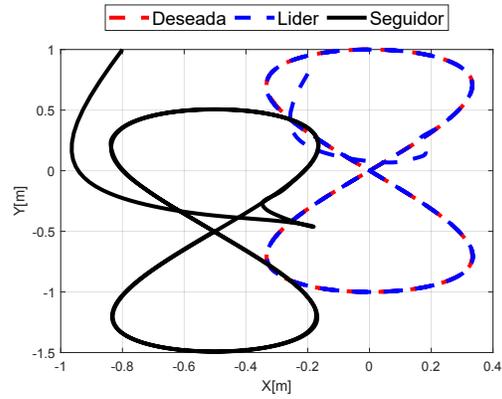


Fig. 2. Desplazamiento de los robots en el plano.

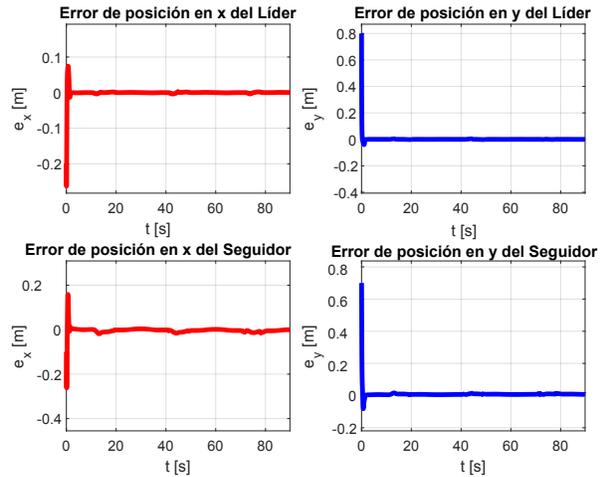


Fig. 3. Errores de posición de los robots

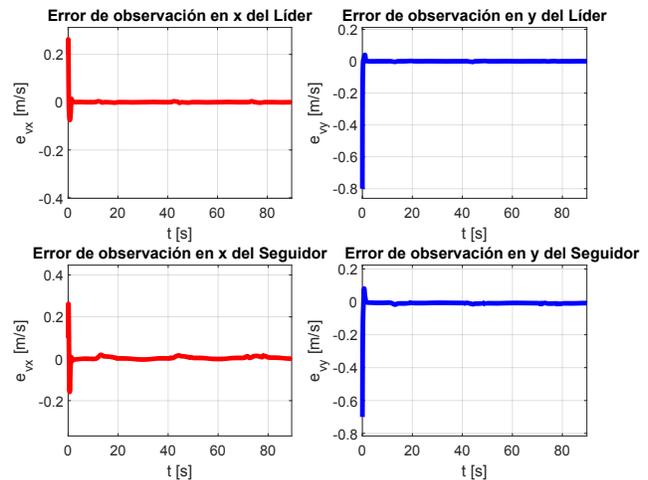


Fig. 4. Errores de observación

6. VALIDACIÓN NUMÉRICA Y EXPERIMENTAL

La estrategia de control para el líder-seguidor con observador de estados, se validó numérica y experimentalmente. La trayectoria a seguir fue una lemniscata de Bernoulli con un vector de posición relativa $C = [-0.5, 0.5]$ para el R_s . Las ganancias de control (10) para

el R_l son $k_{pl} = 4$ y $k_{dl} = 4$, mientras que para R_s son $k_{ps} = 2$ y $k_{ds} = 0.5$. El robot líder seguirá la trayectoria deseada, mientras que el seguidor se mantendrá a una distancia C con respecto al líder.

Los valores de L_i , tal que, $(A_i - L_i C_i)$ es Hurwitz, son los siguientes

$$L_i = \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 8 & 20 \\ 30 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, i = l, s.$$

La posición de los robots (x_i, y_i) se considera medible, mientras que, como se planteó en la sección anterior, las velocidades lineales \dot{x}_i y \dot{y}_i son estimadas por los observadores de estados.

A continuación se presentan los resultados obtenidos.

6.1 Simulación

Para realizar la prueba numérica se utilizó el software Matlab/SimuLink®. La Lemniscata de Bernoulli tiene las siguientes ecuaciones paramétricas,

$$yd = 1 \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right),$$

$$xd = \frac{1}{3} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right).$$

En la Fig.(2) se presentan los resultados de la simulación del sistema líder-seguidor con observador.

El robot líder inicia en $[-0.2, 0.8]$, mientras que el robot seguidor en $[-0.8, 1]$. Los errores de posición para los robots líder y seguidor se presentan en la Fig.(3). Como se puede observar en esta figura, los errores máximos se encuentran en el inicio de la trayectoria.

En la Fig.(4), se muestran los errores de observación tanto para el robot líder como el robot seguidor.

6.2 Experimentación

La plataforma experimental, Fig.(5), esta constituida por 3 etapas: Adquisición de datos, control y comunicación. La etapa de adquisición de datos, conformada por 7 cámaras infrarrojas Optitrack y el software Motive, funcionan como un sistema de posicionamiento local (LPS), por medio del cual se obtiene la posición y orientación de los robots con un tiempo de muestreo máximo de 16.7 milisegundos y una precisión máxima de 0.2 mm, lo que se considera aceptable para este experimento. Estos datos son procesados y enviados a la computadora de control, donde se calculan las entradas de control para cada uno de los RMD's. Un enrutador inalámbrico es el encargado de distribuir las señales en la plataforma experimental, que constituye la etapa de comunicación. Las entradas de control son enviadas, vía wifi, a los robots desde la computadora de control, mientras la posición y orientación del robot se envían a la computadora de adquisición de datos. Los robots diferenciales utilizados son Legos Mindstrom EV3, programados con Python.

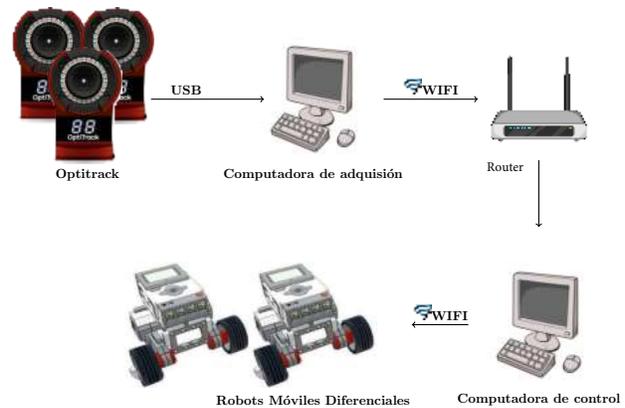


Fig. 5. Plataforma Experimental.

En la Fig.(6) se muestran los resultados obtenidos. La linealización, realizada por la estrategia de control, cancela las dinámicas del robot, sustituyéndolas por polinomios lineales de segundo orden en función del error. Esta sustitución solo garantiza la convergencia a cero del error para condiciones iniciales en la vecindad del cero, pues solo aquí la aproximación lineal es válida.

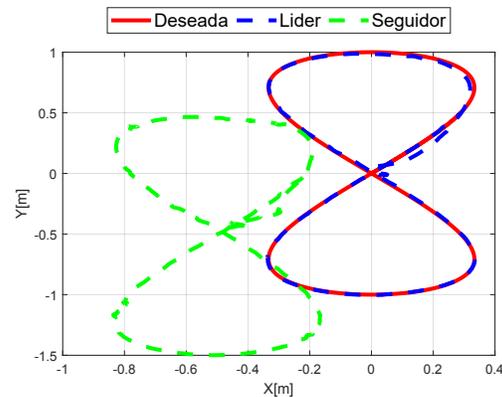


Fig. 6. Seguimiento de trayectoria en formación.

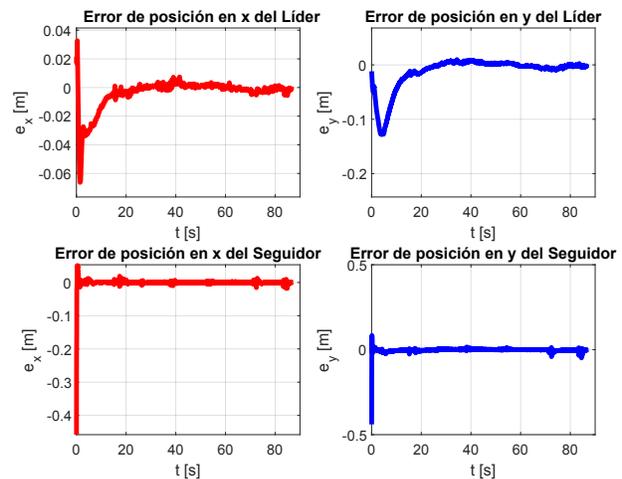


Fig. 7. Errores de posición.

Los errores de seguimiento en x y y son mostrados en la Fig.(7) para el robot líder y el seguidor.

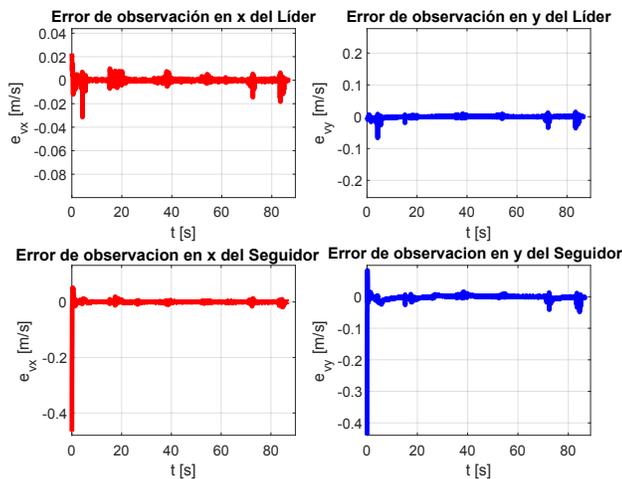


Fig. 8. Errores de Observación.

Los errores de estimación del observador de estados del robot líder y del robot seguidor se muestran en la Fig.(8).

7. CONCLUSIÓN

En este trabajo se construyó el modelo cinemático extendido para dos robots móviles diferenciales. Se hizo uso del esquema líder-seguidor. Se construyó un observador de estados para cada robot con el fin de estimar las velocidades lineales. Se implementó la estrategia de control linealización entrada/salida, para el seguimiento de la trayectoria líder-seguidor.

Para la construcción del observador de estados se seleccionó una matriz L que garantiza la convergencia de los estados estimados a los estados del robot. Se seleccionaron k_{p_i} y k_{d_i} de tal forma que el control alcance la trayectoria deseada lo más rápido posible sin sobreimpulso.

Para las pruebas numéricas y experimentales se seleccionó como trayectoria deseada una Lemniscata de Bernoulli. El robot líder converge rápidamente a la trayectoria deseada, mientras que el robot seguidor alcanza una posición deseada con respecto al líder, generando así un seguimiento asintótico en esquema líder-seguidor. A diferencia de (Castro-Romero et al., 2024) donde se sigue una trayectoria preestablecida y generada por una computadora, en este artículo se realiza el seguimiento con base a la trayectoria realizada por el robot líder. Esto genera que, las pequeñas desviaciones de la trayectoria que tiene el líder generen desviaciones mayores en el seguidor, como se puede ver en la Fig(7), sin que este error sea significativo.

Para trabajos futuros se considera implementar el esquema líder-seguidor con distintas configuraciones, por ejemplo diferencial y Ackerman, esto es un esquema líder-seguidor heterogéneo.

REFERENCES

Baturone, A.O. (2005). *Robótica: manipuladores y robots móviles*. Marcombo.
Bugarín-Carlos, E., Aguilar-Bustos, A.Y., Durazo-Acevedo, S., et al. (2022). Leader-follower scheme

for unicycle-type mobile robots with mounted camera. *Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI*, 10(Especial5), 159–164.
Castro-Romero, L.A., Garcia-Lozano, H.N., Santiaguillo-Salinas, J., Pérez-Castro, N., et al. (2024). Control-observador para seguimiento en un robot diferencial de segundo orden. *Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI*, 12(Especial2), 1–7.
González, E.C.V., Rivera, D.M., and Gómez, E.J. (2012). Model and observer-based controller design for a quanser helicopter with two dof. In *2012 IEEE Ninth Electronics, Robotics and Automotive Mechanics Conference*, 267–271. doi:10.1109/CERMA.2012.50.
Lian, K.Y., Hsu, W.H., and Tsai, T.S. (2019). Leader-follower mobile robots control based on light source detection. *IEEE Sensors Journal*, 19(23), 11142–11150.
Lima-Pérez, A., Díaz-Téllez, J., Gutiérrez-Vicente, V., Estévez-Carreón, J., Pérez-Pérez, J., García-Ramirez, R.S., and Chávez-Galán, J. (2021). Robust control of a two-wheeled self-balancing mobile robot. In *2021 International Conference on Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering (ICMEAE)*, 196–201. doi:10.1109/ICMEAE55138.2021.00038.
Mayora-Reyes, B., González-Torres, D., and Santiaguillo-Salinas, J. (2024). Esquema líder-seguidor para el control de posición de robots manipuladores de 3gdl. *Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI*, 12(Especial2), 129–134.
Ogata, K. (2003). *Ingeniería de control moderna*. Pearson Educación.
Ramírez-Cárdenas, O.D., Guerrero-Castellanos, J.F., Linares-Flores, J., Durand, S., and Guerrero-Sánchez, W.F. (2019). Control descentralizado basado en eventos para el consenso de múltiples robots tipo péndulo invertido en el esquema líder-seguidor. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, 16(4), 435–446.
Ren, W. and Beard, R.W. (2008). Consensus algorithms for double-integrator dynamics. *Distributed Consensus in Multi-vehicle Cooperative Control: Theory and Applications*, 77–104.
Rodríguez-Castellanos, D., Solís-Perales, G., Blas-Valdez, M., et al. (2022). Control neuro-robusto del sistema líder-seguidor de agentes móviles. *Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI*, 10(Especial5), 152–158.
Rosaldo-Serrano, M.A., Santiaguillo-Salinas, J., and Aranda-Bricaire, E. (2019). Observer-based time-varying backstepping control for a quadrotor multi-agent system. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 93, 135–150.
Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., and Oriolo, G. (2010). *Robotics: Modelling, Planning and Control*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Springer London.
Tiang, T.S. and Mahyuddin, M.N. (2016). Cooperative formation control algorithm of a generic multi-agent system applicable for multi-autonomous surface vehicles. In *2016 IEEE International Conference on Underwater System Technology: Theory and Applications (USYS)*, 133–138. IEEE.