

Development and validation of the mathematical model of an experimental platform for heat transfer processes

Rodrigo Robledo-Castillo* Hoover Mujica-Ortega*
Jesús Morales-Valdez**

* Facultad de Ingeniería - UNAM, Departamento de Control y Robótica, Lab. Automatización, C.U., 04510, México CDMX e-mail: rodrig99@live.com.mx, hmujica@unam.mx

** Colegio de Ciencia y Tecnología, Universidad Autónoma de la Ciudad de México, Calzada Ermita Iztapalapa No. 4163, Col. Lomas de Zaragoza, C.P. 09620, CDMX, México e-mail: jesus.morales@uacm.edu.mx

Resumen: In this article, the development of a mathematical model expressed in a system of nonlinear ordinary differential equations that describes the dynamics of an experimental platform for heat transfer processes is presented. To validate how closely the model's dynamics approximate reality, 10 experiments were conducted under different scenarios where both the mathematical model and the real platform received the same stimulus. Using the values acquired by the industrial controller as a reference and comparing them with the simulated values, validation was performed using the CV (RMSE) error as a metric. It was established that, for the simulation of each temperature to be acceptable, this error should not exceed the 20% limit in the experiments conducted. Based on the validation metric values obtained, it was concluded that the mathematical model developed in this work adequately represents the real process and allows simulation of the system's two most relevant states. Therefore, the model can be used to evaluate control strategies on the platform and understand physical behaviors in heat transfer processes.

Palabras clave: Heat transfer, Dynamical system, Digital twin.

1. INTRODUCCIÓN

En la industria los sistemas de transferencia de calor están presentes en áreas de alta relevancia, por nombrar algunas, la industria del plástico, metalúrgica, automotriz, en procesamiento de alimentos y sistemas de refrigeración (Kulacki, 2008), donde frecuentemente se busca controlar niveles de temperatura para garantizar que los procesos se lleven a cabo adecuadamente. En la actualidad, existe la necesidad de optimizar los costos y el consumo de energía en estos procesos (Hermundsottir and Aspelund, 2021; Jamwal et al., 2021) lo cual en gran parte puede lograrse con mejores estrategias de control y un mayor entendimiento de este tipo de sistemas.

Dada la importancia de estos procesos, en el Laboratorio de Automatización de la Facultad de Ingeniería se desarrolló en (Macías-Bejarano, 2018) y en (González-Salgado, 2021) una plataforma de transferencia de calor que, siguiendo un enfoque industrial, permite reforzar el aprendizaje en temas de control y automatización, así como explorar de forma práctica el desempeño y cualidades de distintas estrategias.

Una posibilidad reciente que permite complementar el aprendizaje son las simulaciones y laboratorios virtuales que gracias al crecimiento del poder computacional de los últimos años se han convertido en una alternativa viable. Un modelo representativo de un sistema ofrece la oportunidad de acceder al experimento repetidamente y en los momentos que le sean convenientes al estudiante (Balamuralithara and Woods, 2009). Más ventajas de tra-

bajar con estas simulaciones son que los costos y tiempos de simulación son muy bajos a comparación trabajar con experimentos reales, y la existencia de una simulación ayuda a reducir las restricciones de tiempo que provoca trabajar con equipos reales (Gibbins and Perkin, 2013).

Otra ventaja de contar con un modelo representativo que permita la simulación es el desarrollo de un gemelo digital. Este es un concepto que recientemente ha adquirido fuerza y busca cubrir diversas áreas de mejora en sistemas industriales. Un gemelo digital se puede definir como la representación virtual de un recurso físico, habilitada a través de datos y simuladores para predicción en tiempo real, optimización, monitoreo, control y toma de decisiones mejorada (Rasheed et al., 2020). De acuerdo con la clasificación propuesta en (Kritzinger et al., 2018) una característica necesaria de un gemelo digital es contar con un objeto modelado digitalmente que interactúe a través de un flujo de datos automático y bidireccional con un objeto físico. El desarrollo de un gemelo digital es algo en lo que se ha trabajado previamente para esta misma plataforma en (Macías-Bejarano, 2018), donde se trabajó en el *software* de simulación de sistemas dinámicos EmulPro, que por medio del estándar OPC tiene la posibilidad de comunicarse bidireccionalmente con el PAC (controlador de automatización programable) que controla al proceso de transferencia de calor en el que se centra este trabajo.

Por el interés que se tiene en desarrollar las posibilidades mencionadas, un paso necesario para consolidar la plataforma es un modelo matemático del sistema en el que se

pueda simular su respuesta de forma suficientemente representativa y que mantenga validez en distintos escenarios, una de las características que debe tener el modelo es estar expresado en parámetros concentrados para simularlo y aprovecharlo con facilidad.

2. PLATAFORMA DE TRANSFERENCIA DE CALOR

La plataforma está conformada por un sensor de temperatura IFM TD2231, el cual se calienta por la acción de una lámpara de halógeno de 20 Watts que está adyacente a él. Estos componentes están montados y contenidos en una estructura de MDF, de forma que además es posible regular la distancia de la lámpara al sensor con un micrómetro de profundidad y enfriar al sistema con un ventilador de golpe radial. Las temperaturas en el vidrio de la lámpara, el aire y las paredes de MDF se miden por medio de termopares tipo K. Todos los componentes están debidamente acondicionados en un circuito electrónico para interactuar con el sistema a través del controlador de automatización programable *ControlLogix L81E*. En la Figura 1 se puede observar esta plataforma y se señalan los componentes visibles.

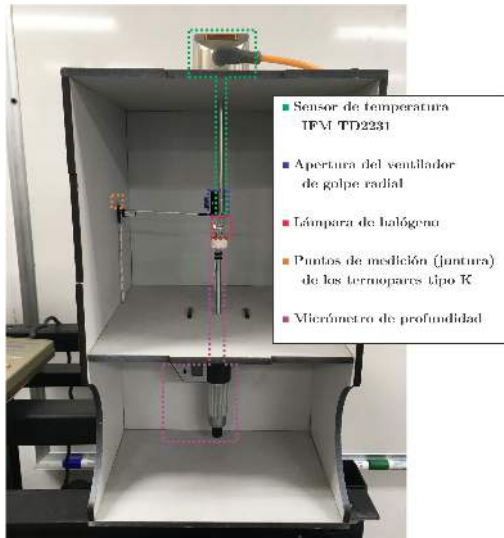


Figura 1. Plataforma de transferencia de calor

3. MODELADO EN PARÁMETROS CONCENTRADOS

Un sistema de transferencia de calor es de **parámetros concentrados** cuando se considera que un cuerpo está a una misma temperatura independientemente del punto en el espacio en que esta se mida, de forma que la temperatura de ese cuerpo solo varía con el tiempo. Su contraparte es el modelo de **parámetros distribuidos** en el que para un mismo cuerpo la temperatura se considera distinta en función de la ubicación espacial del punto en que se tome la medición. A diferencia de su contraparte, el sistema de parámetros concentrados se modela con ecuaciones diferenciales ordinarias, lo que facilita su análisis y simulación.

Si existe transferencia de calor entre dos cuerpos “a” y “b” que se encuentren a temperaturas T_a y T_b respectivamente, se puede expresar el índice de transferencia de calor \dot{Q} con la ecuación de alguno de los tres mecanismos de transfe-

rencia de calor (conducción, convección y radiación). La ley de Fourier de conducción del calor se expresa como

$$\dot{Q}_{\text{Cond,ab}} = \frac{k_m A_m}{L_m} (T_a - T_b) \quad (1)$$

donde $k_m \frac{W}{\text{C}\cdot\text{m}}$ es la conductividad térmica del material a través del cual se propaga el calor, A_m el área perpendicular a la dirección de la transferencia de calor y L_m la distancia entre “a” y “b” que normalmente es el espesor del material. Si es por convección, la transferencia de calor se puede expresar con la ley de enfriamiento de Newton:

$$\dot{Q}_{\text{Conv,ab}} = h_f A_s (T_a - T_b) \quad (2)$$

en donde $h_f \frac{W}{\text{m}^2 \cdot \text{C}}$ es el coeficiente de convección del fluido y A_s el área de la superficie. Finalmente, la transferencia de calor por radiación se expresa con la ley de Stefan-Boltzmann como

$$\dot{Q}_{\text{Rad,ab}} = A_a F_{ab} \epsilon_a \alpha_b \sigma (T_a^4 - T_b^4) \quad (3)$$

donde A_a es el área superficial de “a”, F_{ab} es el factor de visión de “a” hacia “b”, ϵ_a es la emisividad de “a”, α_b es la absorptividad de “b” y $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$ es la constante de Stefan-Boltzmann.

Partiendo de las ecuaciones de flujo de calor, un sistema se puede expresar con los parámetros de resistencia y capacitancia térmica. Para los fenómenos de conducción y convección, es posible expresar el flujo de calor en términos de resistencias. La resistencia se puede definir como

$$R = \frac{\text{Diferencia de temperatura}}{\text{Tasa de flujo de calor}} = \frac{\Delta T}{\dot{Q}} \text{ } ^\circ\text{C}/\text{W} \quad (4)$$

Que despejando para el fenómeno de conducción es

$$R_k = \frac{L}{kA} \quad (5)$$

Y en el caso de la convección

$$R_c = \frac{1}{hA} \quad (6)$$

Dado que la ecuación 3 se expresa con valores de temperatura elevados a la cuarta potencia, no es posible expresar una resistencia constante para el fenómeno de radiación y se utiliza la expresión original.

El comportamiento de la temperatura con respecto al calor almacenado por cada cuerpo se define con la capacitancia térmica, de forma que

$$C = \frac{\text{Cambio en el calor almacenado}}{\text{Cambio en la temperatura}} = \frac{\dot{Q}}{\dot{T}}$$

Y se puede obtener conociendo la masa m y el calor específico c de la sustancia

$$C = mc \frac{J}{\text{ } ^\circ\text{C}} \quad (7)$$

4. CONSIDERACIONES PARA EL DESARROLLO DEL MODELO

Para modelar los comportamientos de los elementos del sistema con las ecuaciones mencionadas en la Sección 3, fue necesaria una revisión de literatura para entender las propiedades de los materiales así como una medición o aproximación de las dimensiones de los cuerpos. Se modelaron además algunas dinámicas particulares explicadas a continuación.

4.1 Disipación de calor en el filamento de tungsteno

La resistencia eléctrica del filamento $R_f(T_f)$ se obtiene a partir de la ecuación de la resistencia de un alambre

conductor $R = \frac{\rho l}{A}$ donde l es la longitud del alambre, A su área transversal y ρ la resistividad eléctrica del material. La longitud l_f y el radio del filamento r_f son valores conocidos de mediciones, el área transversal se puede obtener como $A_{t,f} = \pi \times r_f^2$. La resistividad eléctrica del tungsteno se expresa como $\rho_{e,f} = (0.000002324296133T_f^2 + 0.025409706621387T_f - 2.97091378161673)10^{-8} \Omega \cdot m$ (Desai et al., 1984), con lo que se puede calcular la resistencia del filamento R_f . La potencia disipada por el filamento P_f se obtiene de la ley de Joule en conjunto con la ley de Ohm:

$$P_f = \frac{(u \times \frac{V_{m\acute{a}x}}{u_{m\acute{a}x}})^2}{R_f} \quad (8)$$

En donde $V_{m\acute{a}x}$ es el voltaje nominal de la lámpara y u es un valor de 0 a 100 que envía el controlador, $u_{m\acute{a}x}$ corresponde a la señal máxima de 100 definida en el PAC.

4.2 Resistencia térmica entre el filamento y el vidrio

Dado que una lámpara de halógeno contiene gas a alta presión, la transferencia de calor entre el tungsteno y el vidrio ocurre principalmente por convección. Debido a la dificultad de encontrar fórmulas empíricas que permitieran calcular la convección en este espacio particular, la resistencia térmica se calculó analizando al sistema en estado estacionario con lo que se puede considerar que no hay variaciones en las temperaturas de los cuerpos. Para obtener la resistencia de esta manera se midieron las condiciones de estado estacionario con la lámpara encendida al 100 % y una separación entre la sonda y el vidrio de la lámpara de $d = 0.5$ cm. En estado estacionario, la resistencia del filamento a la parte externa del vidrio es:

$$R_{fv} = \frac{T_{f,ss} - T_{v,int,ss}}{\dot{Q}_{Conv,fv,ss}} + R_{vv} \quad (9)$$

En donde el subíndice ss indica un valor medido o calculado para estado estacionario, R_{vv} es la resistencia entre el interior y el exterior del vidrio y $T_{v,int}$ es la temperatura del vidrio en su lado interno.

La temperatura del filamento se estima de acuerdo a la literatura como $T_{f,ss} = 2750^\circ C$, la temperatura al exterior del vidrio se mide directamente con uno de los termopares, obteniendo $T_{v,ss} = 292.4^\circ C$ y la temperatura al interior del vidrio se estima que será solo $10^\circ C$ mayor, por lo que $T_{v,int,ss} = 302.4^\circ C$. La resistencia R_{vv} se calcula con la geometría y características del vidrio de la lámpara.

El valor restante $\dot{Q}_{Conv,fv,ss}$ se obtiene de saber que por la ley de la conservación de la energía, la potencia que disipa el filamento por efecto Joule debe ser igual al calor que este transfiere a sus alrededores, eso es, por convección al vidrio y por radiación a las paredes de MDF:

$$\dot{Q}_{Conv,fv,ss} = P_{f,ss} - \dot{Q}_{Rad,fp,ss} \quad (10)$$

$P_{f,ss}$ es la potencia disipada por el filamento en estado estacionario. Evaluando para un voltaje de 12 V y a la temperatura $T_{f,ss}$ en la ecuación 8, se obtiene un resultado muy cercano al indicado por el fabricante $P_{f,ss} \approx 20$ W. $\dot{Q}_{Rad,fp,ss}$ se calcula con la ecuación de Stefan-Boltzmann, asumiendo que todo el calor que irradie el filamento desde su superficie será recibido por las paredes de MDF que para este experimento estuvieron a temperatura $T_{p,ss} = 32.24^\circ C$. La superficie del filamento que irradia calor a sus alrededores se estima como la superficie de un cilindro sólido multiplicada por un factor menor a 1 para tomar en

cuenta los espacios huecos entre espiras del filamento. Se estima que este valor es aproximadamente 0.6.

$$\dot{Q}_{Rad,fp,ss} = \sigma e_f A_f (T_{f,ss}^4 - T_{p,ss}^4) \times F_f \quad (11)$$

De esta forma, en la ecuación 10 queda expresada $\dot{Q}_{Conv,fv,ss}$ en términos de funciones y valores conocidos por lo que también se puede obtener R_{fv} de la ecuación 9.

4.3 Resistencia térmica entre el vidrio y el aire

Siguiendo también el análisis en estado estacionario se obtiene la resistencia por convección entre el vidrio y el aire que se considera como una constante. Partiendo de que en estado estacionario, el calor que recibe el vidrio es el mismo que transmite a sus alrededores se tiene que

$$\dot{Q}_{Conv,va,ss} = \dot{Q}_{Conv,fv,ss} \quad (12)$$

Y la resistencia entre el vidrio y el aire se expresa como

$$R_{va} = \frac{T_{v,ss} - T_{a,ss}}{\dot{Q}_{Conv,va,ss}} \quad (13)$$

donde $\dot{Q}_{Conv,fv,ss}$ se calculó en la ecuación 10 y la temperatura del aire en estado estacionario $T_{a,ss} = 40^\circ C$ es un valor que se obtuvo de la medición en su termopar.

4.4 Resistencia entre el vidrio, el aire cercano y el sensor

Para el aire que se encuentra muy cercano al vidrio y al sensor se toma una consideración particular. Debido a que la distancia de separación de la lámpara se puede modificar con el micrómetro de profundidad, existen dos escenarios: uno donde la transferencia de calor a la sonda es por conducción del vidrio y convección del aire y otro donde únicamente existe convección entre el aire y la sonda. Esto se distingue en la Figura 2 y es importante para considerar que el calor no proviene exclusivamente del vidrio. Esta situación se modeló con un arreglo de resistencias térmicas en paralelo, que consideran la resistencia del aire en función de la distancia entre el vidrio y la sonda como se observa en la Figura 3. En la Figura 3, $R_{acs,int}$ es

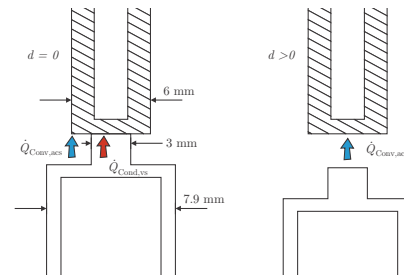


Figura 2. El índice de transferencia de calor a la sonda tiene un comportamiento distinto según la distancia

la resistencia por convección entre el aire caliente y la parte inferior de la sonda solo en el área donde la sonda puede estar en contacto con el vidrio, cuando el vidrio se encuentra a pleno contacto esta resistencia es 0 y el calor es transferido directamente desde la capacitancia térmica del vidrio mientras que a una distancia mayor a cero el calor sería transferido desde la capacitancia térmica del aire; $R_{acs,ext}$ es la resistencia por convección entre el aire caliente y la parte inferior de la sonda donde la sonda no puede estar en contacto con el vidrio; $R_{s,int}$ es la resistencia de la pared metálica inferior de la sonda, para el área de la sonda que puede estar en contacto con el vidrio y $R_{s,ext}$

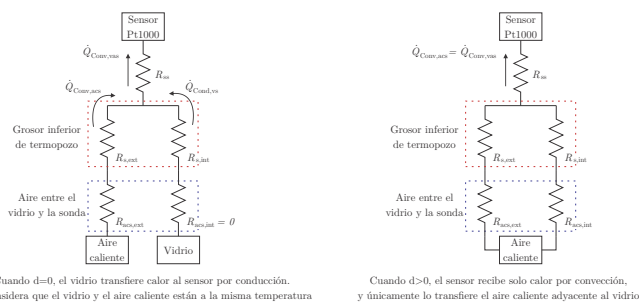


Figura 3. Representación de la resistencia entre el vidrio, el aire cercano y el sensor

es también una resistencia para la pared metálica inferior de la sonda, pero solo para el área que no puede estar en contacto con el vidrio; por último, R_{ss} es la resistencia de la parte lateral de la sonda (verticalmente) hasta el punto donde se asume que se encuentra el centro del sensor Pt1000. Estas resistencias se obtienen en las ecuaciones 14. Las ecuaciones 14a y 14b representan resistencias por convección, para tomar en cuenta la distancia d en esas ecuaciones se describe la convección h en función del número de Nusselt ($h = \frac{Nu k}{L}$) y se sustituye en la ecuación de resistencia por convección.

$$R_{acs,int} = \frac{d}{k_a A_{vs} Nu_{vas}} \quad (14a)$$

$$R_{acs,ext} = \frac{d + 1.6 \times 10^{-3}}{k_a (A_{sac} - A_{vs}) Nu_{vas}} \quad (14b)$$

$$R_{s,int} = \frac{w_s}{A_{vs} k_s} \quad (14c)$$

$$R_{s,ext} = \frac{w_s}{(A_{sac} - A_{vs}) k_s} \quad (14d)$$

$$R_{ss} = \frac{l_{vs}}{A_{st} k_s} \quad (14e)$$

donde Nu_{vas} es el número de Nusselt entre el vidrio, aire y la sonda, k_a es la conductividad térmica del aire, k_s es la conductividad térmica del acero, A_{vs} es el área del vidrio que puede estar en contacto con el sensor, A_{sac} es el área en la cara inferior de la sonda, A_{st} es el área transversal (horizontal) de la sonda, w_s es el grosor del acero y d es la distancia de separación entre la lámpara y la sonda que se ajusta con el micrómetro de profundidad. Estas son constantes obtenidas previamente. La transferencia de calor total se obtiene de las siguientes ecuaciones

$$R_{eq,vas} = \left(\frac{1}{R_{acs,int} + R_{s,int}} + \frac{1}{R_{acs,ext} + R_{s,ext}} \right)^{-1} + R_{ss} \quad (15)$$

$$\dot{Q}_{Conv,vas} = \frac{T_v - T_s}{R_{eq,vas}} \quad (16)$$

donde se considera que el aire cercano se encuentra a la misma temperatura T_v que el vidrio. Para el escenario donde el vidrio está en contacto con la sonda, los índices de transferencia de calor se calculan con un “divisor de corriente” en las ecuaciones 17

$$\dot{Q}_{Conv,acs} = [(R_{eq,vas} - R_{ss}) / (R_{acs,ext} + R_{s,ext})] \dot{Q}_{Conv,vas} \quad (17a)$$

$$\dot{Q}_{Cond,vs} = [(R_{eq,vas} - R_{ss}) / (R_{acs,int} + R_{s,int})] \dot{Q}_{Conv,vas} \quad (17b)$$

y para $d > 0$ en las ecuaciones 18

$$\dot{Q}_{Conv,acs} = \dot{Q}_{Conv,vas} \quad (18a)$$

$$\dot{Q}_{Cond,vs} = 0 \quad (18b)$$

Esto generaría dos modelos distintos según la distancia, por lo que se agrega una multiplicación por un parámetro $\left[1 - \frac{d}{d+d_m}\right]$ para considerar ambos escenarios como un cambio gradual, donde se definió $d_m = 0.5$ mm. Así, los índices de transferencia de calor son, para cualquier $d \geq 0$

$$\dot{Q}_{Cond,vs} = \left[1 - \frac{d}{d+d_m}\right] \left[\frac{(R_{eq,vas} - R_{ss})}{(R_{acs,int} + R_{s,int})} \right] \dot{Q}_{Conv,vas} \quad (19a)$$

$$\dot{Q}_{Conv,acs} = \dot{Q}_{Conv,vas} - \dot{Q}_{Cond,vs} \quad (19b)$$

5. MODELO MATEMÁTICO

La estrategia para integrar el sistema de ecuaciones que permita conocer la temperatura en función del tiempo fue:

1. Expresar los **índices de transferencia de calor** \dot{Q} substituyendo las transferencias de calor con **resistencias térmicas** o su respectiva ecuación de radiación, recordando que en general se pueden expresar como $\dot{Q}_{ab} = \frac{T_a - T_b}{R_{ab}}$
2. Posteriormente, dividir esos índices sobre la **capacitancia térmica** de cada cuerpo para obtener el sistema de ecuaciones expresado en términos de temperatura.

El modelo quedó expresado en el sistema de ecuaciones 20

$$\dot{T}_p = \left(\frac{T_a - T_p}{R_{ap} C_p} \right) - \left(\frac{T_p - T_{amb}}{R_{pamb} C_p} \right) + \sigma \epsilon_f A_f F_f \left(\frac{(T_{abs} + T_f)^4 - (T_{abs} + T_p)^4}{C_p} \right) \quad (20a)$$

$$\dot{T}_a = \left(\frac{T_p - T_a}{R_{ap} C_a} \right) + \left(\frac{T_s - T_a}{R_{sa} C_a} \right) + \left(\frac{T_t - T_a}{R_{ta} C_a} \right) + \left(\frac{T_v - T_a}{R_{va} C_a} \right) - \left(\frac{T_v - T_s}{R_{eq,vas} C_a} \right) + \left[1 - \frac{d}{d+d_m} \right] \left(\frac{(R_{eq,vas} - R_{ss})(T_v - T_s)}{(R_{acs,int} + R_{s,int}) C_a} \right) \quad (20b)$$

$$\dot{T}_t = \left(\frac{T_s - T_t}{R_{st} C_t} \right) - \left(\frac{T_t - T_a}{R_{ta} C_t} \right) - \left(\frac{T_t - T_{amb}}{R_{tamb} C_t} \right) \quad (20c)$$

$$\dot{T}_s = \left(\frac{T_v - T_s}{R_{eq,vas} C_s} \right) - \left(\frac{T_s - T_t}{R_{st} C_s} \right) - \left(\frac{T_s - T_a}{R_{sa} C_s} \right) \quad (20d)$$

$$\dot{T}_v = \left(\frac{T_f - T_v}{R_{fv} C_v} \right) - \left(\frac{T_v - T_a}{R_{va} C_v} \right) - \left[1 - \frac{d}{d+d_m} \right] \left(\frac{(R_{eq,vas} - R_{ss})(T_v - T_s)}{(R_{acs,int} + R_{s,int}) C_v} \right) \quad (20e)$$

$$\dot{T}_f = \left(\frac{(V_{m\acute{a}x} u)^2}{R_f C_f} \right) - \left(\frac{T_f - T_v}{R_{fv} C_f} \right) - \sigma \epsilon_f A_f F_f \left(\frac{(T_{abs} + T_f)^4 - (T_{abs} + T_p)^4}{C_f} \right) \quad (20f)$$

donde el subíndice p corresponde a las paredes de MDF, el a al aire cercano a la lámpara de halógeno, el v al vidrio de la lámpara y el f al filamento de tungsteno en el interior de la lámpara. La sonda se dividió en dos secciones que se consideran con dos subíndices distintos, el primero es el s que se encuentra más cercano a la lámpara de halógeno y que contiene al RTD Pt1000 del sensor, el segundo es el t

que toma en cuenta al cuerpo de la sonda que almacena temperatura pero se encuentra considerablemente alejado de la lámpara y el RTD.

6. EVALUACIÓN Y VALIDACIÓN

Para evaluar el desempeño del modelo matemático realizaron experimentos bajo 9 distintos escenarios con entrada escalón y uno con una entrada variante en el tiempo. Con el micrómetro de profundidad se reguló la distancia entre la lámpara y la sonda a tres distancias distintas, estas fueron de 0, 2 y 5 mm, con la acción de la lámpara en lazo abierto, trabajando al 25, 50 y 100%. Los experimentos partieron con todos los cuerpos a temperatura ambiente y se tomaron medidas del sensor y termopares mientras:

1. La entrada escalón estuvo activa en la lámpara por 10 minutos.
2. Por 10 minutos más mientras la lámpara estaba apagada y el sistema volvía a enfriarse.

Se realizó un experimento adicional para probar el comportamiento del modelo con una entrada variante en el tiempo, proveniente del controlador del proceso real. A través del software *Studio 5000 Logix Designer* se programó el PAC *ControlLogix L81E*, sintonizando el bloque PID del programa con los valores $K_p = 5$, $K_i = 0.012$, $K_d = 0$. El punto de operación fue con la temperatura de la sonda en $80\text{ }^\circ\text{C}$.

En los experimentos, la adquisición de mediciones de la plataforma térmica se realizó con la configuración de equipos ilustrada en la Figura 4. Los datos se registraron en una gráfica de tendencias con un periodo de muestreo de 5 ms y posteriormente se exportaron como archivos en formato .csv.

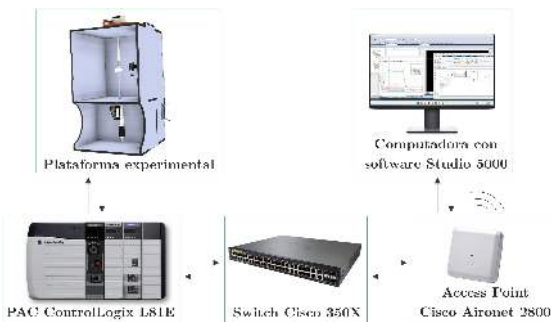


Figura 4. Configuración de equipos para los experimentos

Este formato permitió importar los datos en MATLAB - Simulink, para obtener la respuesta simulada usando la misma señal del actuador e intentando mantener las mismas condiciones iniciales. Dos de los resultados graficados de estos experimentos se presentan en las Figuras 5 y 6.

6.1 Métrica de validación

La cuantificación del error se basó en el RMSE, los motivos son que este error parte de la desviación estándar que es una medida de dispersión ampliamente utilizada en estadística, además de que tiene una mayor sensibilidad a errores de mayor magnitud, lo cual usualmente ayuda a comparar diferencias de desempeño en modelos (Chai and Draxler, 2014; Weisstein, 2023)

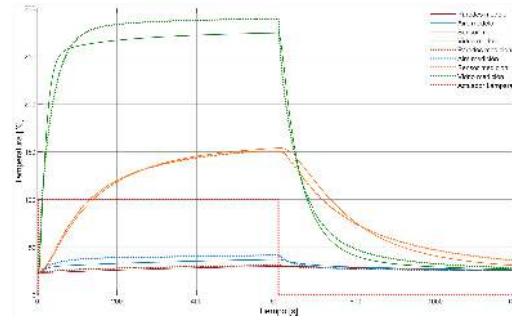


Figura 5. Exp. 1 - Actuador al 100% por 10 minutos con la lámpara en contacto con el sensor TD2231

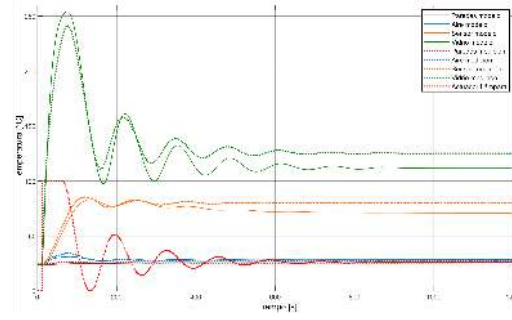


Figura 6. Prueba con señal PI proveniente del PAC, aplicada a la simulación y al sistema real

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} (T_{\text{medida}}(t) - T_{\text{simulada}}(t))^2 dt} \quad (21)$$

donde t_f es la duración del periodo de tiempo para el que se calcula el error.

Partiendo de lo anterior, se eligió como métrica de desempeño al coeficiente de variación de la raíz del error cuadrático medio, este valor se denota como $\text{CV}(\text{RMSE})$ y se ha incluido en lineamientos para cuantificar el desempeño en modelos que buscan predecir el consumo de energía en edificios (Hong et al., 2016; ASHRAE, 2014). Esta métrica se define como $\text{CV}(\text{RMSE}) = \frac{\text{RMSE}}{\bar{y}_{\text{medida}}}$ donde \bar{y}_{medida} es el promedio de los datos medidos. En este caso no se usa directamente el promedio de la temperatura medida en el denominador ya que la ubicación del 0 en la escala tiene un impacto importante en la cuantificación del error, es notorio que un error de la misma cantidad de temperatura sería menor midiéndose en Kelvin que en grados Celsius. Para que esta métrica sea significativa se midió el error referido al cambio con respecto a la temperatura medida inicial, y por simplicidad se mantiene la métrica con signo positivo en la ecuación 22.

$$\text{CV}(\text{RMSE}) = \left| \frac{\text{RMSE}}{\frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} T_{\text{medida}}(t) dt - T_{\text{medida}}(0)} \right| \quad (22)$$

Las ventajas de definir el error de esta manera son que el valor del error es relativo, representativo de un periodo de tiempo, y no depende de la escala de temperatura.

6.2 Obtención del error $\text{CV}(\text{RMSE})$

Por las diferencias que se observaron en los experimentos con entrada escalón durante el encendido y apagado de la lámpara, la medición del error se separó en esos dos casos para distinguir la cantidad de error en ambos eventos.

Los resultados se muestran en la Figura 7 donde del lado izquierdo se tabuló el CV(RMSE) durante los 10 minutos que la lámpara estuvo encendida mientras que del lado derecho se tabularon los resultados durante los 10 minutos que la lámpara estaba apagada. Para el experimento con

| CV(RMSE) en escalón vidrio | | | | CV(RMSE) en apagado vidrio | | | | CV(RMSE) en escalón aire | | | | CV(RMSE) en apagado aire | | | |
|----------------------------|--------------------|---------|---------|----------------------------|--------------------|---------|---------|--------------------------|--------------------|---------|--------|--------------------------|--------------------|--------|--------|
| t [min.] | Señal de activador | | | t [min.] | Señal de activador | | | t [min.] | Señal de activador | | | t [min.] | Señal de activador | | |
| | 25% | 50% | 100% | | 25% | 50% | 100% | | 25% | 50% | 100% | | 25% | 50% | 100% |
| 0 | 0.1943 | 0.04843 | 0.06333 | 0 | 0.0098 | 0.03092 | 0.02734 | 0 | 0.3203 | 0.1691 | 0.33 | 0 | 0.413 | 0.1493 | 0.0765 |
| 2 | 0.1015 | 0.07359 | 0.05019 | 2 | 0.0421 | 0.04163 | 0.03029 | 2 | 0.344 | 0.04397 | 0.1973 | 2 | 0.382 | 0.0692 | 0.1773 |
| 5 | 0.0900 | 0.0722 | 0.0507 | 5 | 0.03703 | 0.04019 | 0.04043 | 5 | 0.782 | 0.1895 | 0.1844 | 5 | 0.6817 | 0.2172 | 0.1424 |

| CV(RMSE) en escalón sensor | | | | CV(RMSE) en apagado sensor | | | | CV(RMSE) en escalón pared | | | | CV(RMSE) en apagado pared | | | |
|----------------------------|--------------------|---------|---------|----------------------------|--------------------|---------|---------|---------------------------|--------------------|--------|--------|---------------------------|--------------------|--------|--------|
| t [min.] | Señal de activador | | | t [min.] | Señal de activador | | | t [min.] | Señal de activador | | | t [min.] | Señal de activador | | |
| | 25% | 50% | 100% | | 25% | 50% | 100% | | 25% | 50% | 100% | | 25% | 50% | 100% |
| 0 | 0.1792 | 0.08454 | 0.03024 | 0 | 0.08702 | 0.07477 | 0.07969 | 0 | 0.4495 | 0.3284 | 0.8720 | 0 | 0.6185 | 0.3810 | 0.2978 |
| 2 | 0.03773 | 0.1419 | 0.1314 | 2 | 0.0753 | 0.1384 | 0.130 | 2 | 0.3884 | 0.4180 | 0.2903 | 2 | 0.3528 | 0.1941 | 0.2140 |
| 5 | 0.04372 | 0.06042 | 0.08557 | 5 | 0.04219 | 0.1095 | 0.1004 | 5 | 0.9069 | 0.5070 | 0.8331 | 5 | 1.115 | 0.4437 | 0.1637 |

Figura 7. Errores CV(RMSE) con entrada escalón

la señal variante en el tiempo, los valores de CV(RMSE) están descritos en la Tabla 1. Los valores de error al igual que con los experimentos usando entrada escalón, fueron menores para la temperatura del vidrio y la sonda.

| | CV(RMSE) |
|-----------------------------------|----------|
| Temperatura del vidrio | 0.1204 |
| Temperatura del sensor TD2231 | 0.1309 |
| Temperatura del aire | 0.3522 |
| Temperatura de las paredes de MDF | 0.2524 |

Tabla 1. Errores CV(RMSE) para controlador PI

6.3 Validación con coeficiente RMSE

Habiendo obtenido las cantidades de error en CV(RMSE) representadas en la Figura 7 y en la Tabla 1, para determinar que el modelo sea suficientemente representativo, se define un valor máximo de 0.2 (o 20%), que es el valor de CV(RMSE) con el que un modelo de simulación debe cumplir para ser aceptable en (ASHRAE, 2014). Bajo estas condiciones se verificó que, en los experimentos realizados, el modelo tiene un comportamiento aceptable para conocer la temperatura del sensor y del vidrio, aunque no así para la temperatura del aire y las paredes. Esto en parte se debe a que la métrica aumenta en los estados con variaciones de temperatura pequeñas y a que el efecto de la temperatura ambiente tiene un mayor efecto en esos estados.

7. CONCLUSIONES

El modelo matemático obtenido, definido con un sistema de parámetros concentrados en el sistema de ecuaciones 20, es satisfactorio como modelo de simulación para la dinámica de temperatura en la sonda y la lámpara de halógeno, que son las dos variables de mayor interés del sistema en cuestión. El modelo es un avance en el desarrollo de la plataforma experimental y da la posibilidad de evaluar estrategias de control por medio de la simulación de forma más rápida antes de trabajar directamente con la plataforma física.

En este trabajo se consideran los tres mecanismos de transferencia de calor, así como la naturaleza de la resistencia y capacitancia térmica; integrar este conocimiento ayuda a tener un mejor entendimiento de las dinámicas de transferencia de calor y puede brindar un punto de partida al trabajar con estos sistemas en la industria.

Usar el CV(RMSE) como métrica de validación mostró ser realmente útil en este modelo y podría aplicarse para otros trabajos en los que se desee saber qué tan efectivo es un modelo para simular un sistema. Finalmente, se logró implementar el modelo en el controlador *ControlLogix L81E*, definiéndolo en una rutina de texto estructurado (ST) en la cual el sistema de ecuaciones se integra numéricamente usando el método de Euler con un paso fijo de 10 ms. El método numérico se resuelve en el mismo controlador y esto da la posibilidad de interactuar con el modelo en el mismo entorno en el que se configuró la plataforma física.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la DGAPA-UNAM por el apoyo brindado en el Programa UNAM-PAPIME PE109121. Rodrigo Robledo-Castillo agradece la beca de licenciatura recibida.

REFERENCIAS

ASHRAE (2014). *Ashrae Guideline 14-2014: Measurement of Energy, Demand and Water Savings*. ASHRAE. American Society of Heating, Refrigerating, and Air-Conditioning Engineers.

Balamuralithara, B. and Woods, P.C. (2009). Virtual laboratories in engineering education: The simulation lab and remote lab. *Computer Applications in Engineering Education*, 17(1), 108–118.

Chai, T. and Draxler, R.R. (2014). Root mean square error (rmse) or mean absolute error (mae)? - arguments against avoiding rmse in the literature. *Geoscientific Model Development*, 7(3), 1247–1250.

Desai, P.D., Chu, T.K., James, H.M., and Ho, C.Y. (1984). Electrical resistivity of selected elements. *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, 13(4), 1069–1096, 10.1063/1.555723.

Gibbins, L. and Perkin, G. (2013). Laboratories for the 21st century in STEM higher education: a compendium of current UK practice and an insight into future directions for laboratory-based teaching and learning.

González-Salgado, U. (2021). *Rediseño y control de una plataforma experimental para procesos de transferencia de calor*. Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, CDMX.

Hermundsdottir, F. and Aspelund, A. (2021). Sustainability innovations and firm competitiveness: A review. *Journal of Cleaner Production*, 280, 124715.

Hong, T., Kim, C.J., Jeong, J., Kim, J., Koo, C., Jeong, K., and Lee, M. (2016). Framework for approaching the minimum cv(rmse) using energy simulation and optimization tool. *Energy Procedia*, 88, 265–270. CUE 2015 - Applied Energy Symposium and Summit 2015: Low carbon cities and urban energy systems.

Jamwal, A., Agrawal, R., Sharma, M., Kumar, V., and Kumar, S. (2021). Developing a sustainability framework for industry 4.0. *Procedia CIRP*, 98, 430–435. The 28th CIRP Conference on Life Cycle Engineering, March 10 - 12, 2021, Jaipur, India.

Kritzinger, W., Karner, M., Traar, G., Henjes, J., and Sihm, W. (2018). Digital twin in manufacturing: A categorical literature review and classification. *IFAC-PapersOnLine*, 51(11), 1016–1022. 16th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing INCOM 2018.

Kulacki, F. (2008). *Handbook of Thermal Science and Engineering (1st Ed.)*, 220–222.

Macías-Bejarano, C. (2018). *Diseño y desarrollo de una plataforma experimental para evaluar estrategias de control en procesos térmicos industriales*. Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, CDMX.

Rasheed, A., San, O., and Kvamsdal, T. (2020). Digital twin: Values, challenges and enablers from a modeling perspective. *IEEE Access*, 8, 21980–22012.

Weisstein, E.W. (2023). Root-mean-square. <https://mathworld.wolfram.com/Root-Mean-Square.html>. Accessed: 2023-08-08.