

Data-Driven Modeling of a Bioreactor Using a Takagi-Sugeno Type Approach

Algemiroy J. Gil* Ixbalank Torres*

* *Departamento de Ingeniería Electrónica, Universidad de Guanajuato, Carretera Salamanca - Valle de Santiago km 3.5 + 1.8 Comunidad de, Palo Blanco, 36787 Salamanca, Gto., México, e-mail: jose.gil@ugto.mx, ixbalank_torres@ifac-mail.org*

Abstract: In this article, we explore an analytical approach to generate Takagi-Sugeno (TS) type models from 'experimental' data using the Sparse Identification of Nonlinear Dynamics (SINDy) technique. Our method combines the approximation of reduced nonlinear models with the linearization of the same model at specific operating points, allowing us to capture the dynamics of complex systems under variable conditions for each point of interest. We then present a detailed implementation of this approach, highlighting its application in a real-world scenario of modeling a biotechnological process.

Keywords: Dynamic systems modeling, Polytopic models, Sparse Identification, Bioreactor.

1. INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, los modelos Takagi-Sugeno (TS) se han consolidado como una herramienta poderosa en el campo del modelado y control de sistemas complejos. Su capacidad para manejar no linealidades y la incertidumbre los ha hecho particularmente útiles en una variedad de aplicaciones industriales y de ingeniería. Varios de los estudios revisados han demostrado su eficacia en áreas como la robótica, el control de procesos químicos (Mehran, 2008), y la gestión de sistemas de energía, destacando su flexibilidad y precisión en la representación de dinámicas complejas. Los modelos TS se han utilizado en diversas áreas de aplicación para el desarrollo de controladores. Por ejemplo, en (Abyad et al., 2017), se implementó un modelo TS para modelar y controlar un proceso biológico no lineal mediante controladores difusos en el que se consideran dos enfoques de control, el primero es el control de compensación distribuida paralela (PDC) con respecto a las restricciones de las entradas manipuladas y el segundo es el control integral cuadrático lineal óptimo. En (Goh et al., 2023), se utilizaron modelos TS para desarrollar estrategias de control en microrredes navales de corriente continua (CC). En (Tinh et al., 1990), mostraron cómo los modelos TS pueden ser utilizados para diseñar controladores de base difusa para estabilizar automáticamente misiles con un sistema de control combinado de reacción aerodinámica y de impulso lateral.

En este artículo, exploramos un enfoque basado en datos para la creación de modelos Takagi-Sugeno utilizando la técnica de identificación de sistemas no lineales Sparse, donde se busca mejorar la precisión y la eficiencia del

proceso de identificación de parámetros, reduciendo la complejidad computacional y facilitando la implementación práctica en diversos contextos industriales y de ingeniería. Se considera además, que parte de este método logra transformar la aproximación de modelos no lineales en modelos reducidos con estructuras más simples que permiten capturar la dinámica de sistemas complejos alrededor de puntos de operación. Cabe resaltar que se presenta un estudio detallado de esta metodología, destacando su uso en el modelo de un biorreactor, en el cual se modelan sus dinámicas a partir de datos creados artificialmente por su modelo mecanístico.

2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Cuando se busca modelar un sistema dinámico existen diversos enfoques a considerar. Entre los más tradicionales se encuentra el modelado mecanístico, que se basa en la comprensión profunda de los principios físicos y la derivación de ecuaciones que describen el comportamiento del sistema. Este método, aunque poderoso, puede ser limitado por la complejidad de los sistemas y la dificultad de obtener información precisa sobre todos los mecanismos involucrados (Ariyur et al., 2003). Sin embargo, el modelado basado en datos experimentales a diferencia de los enfoques mecanísticos, no se asume una estructura de modelo específica desde el principio. En su lugar, el objetivo es descubrir esta estructura directamente a partir de los datos, lo que puede ser considerablemente más complejo y laborioso. Este tipo de modelado debe manejar grandes volúmenes de datos, capturar dinámicas no lineales y ser robusto frente a ruido e imprecisiones en los datos experimentales (Brunton

et al., 2015). Para abordar estos desafíos, proponemos el uso de técnicas de identificación Sparse (Rudy et al., 2017) y modelos politópicos de tipo Takagi-Sugeno, donde la identificación Sparse de modelos dinámicos no lineales permite seleccionar automáticamente los términos más relevantes del modelo a partir de un conjunto amplio de posibles descriptores, reduciendo la complejidad del modelo sin sacrificar precisión y utilizando métodos de regularización como LASSO y SID para manejar la sobreabundancia de información (Brunton et al., 2015).

2.1 Modelo del Biorreactor

En esta sección se muestra el modelo dinámico no lineal normalizado de un biorreactor. Las dinámicas del biorreactor se describen por la ecuaciones (1) y (2) como se muestra a continuación:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 \left(\frac{x_2}{K_1 + x_2} - u \right) \quad (1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = u(w - x_2) - \frac{x_1 x_2}{K_1 + x_2} \quad (2)$$

donde x_1 y x_2 representan los estados del sistema conformados por la biomasa x_1 y el sustrato x_2 respectivamente, mientras que K_1 representa la constante de saturación media normalizada (Ariyur et al., 2003). Por otra parte, las entradas del sistema son la tasa de dilución D como entrada controlada u y el sustrato de entrada S_{In} como la entrada no controlada w (Ariyur et al., 2003).

Los rangos de operación de las entradas son descritos en la expresiones (3).

$$0,1 \leq D \leq 1 \quad \& \quad 1 \leq S_{in} \leq 3 \quad (3)$$

2.2 Problema a resolver

En el ámbito de la ingeniería de procesos, la representación precisa de sistemas complejos como los biorreactores es fundamental para el diseño y la implementación de estrategias de control efectivas. En este contexto, la modelización de sistemas biotecnológicos presenta un desafío significativo debido a su naturaleza intrínsecamente compleja y no lineal. Para abordar esta complejidad, se ha propuesto la utilización de modelos TS, los cuales permiten representar sistemas no lineales de manera aproximada mediante la combinación de múltiples modelos lineales locales. En este trabajo, se propone representar un biorreactor como un modelo TS a partir de datos experimentales artificiales generados por el modelo no lineal mecanístico. Esta aproximación tiene como objetivo principal facilitar la aplicación de técnicas de control lineal aprovechando las ventajas que ofrecen los modelos TS en términos de simplicidad y facilidad de implementación.

3. METODOLOGÍA DE MODELADO

3.1 Identificación Sparse de Modelos Dinámicos no Lineales

El aproximar un modelo dinámico no lineal no es tarea sencilla debido a que las estructuras de datos dinámicas y entradas son parte de la información limitada que no conocemos y por lo tanto, implica que se tenga que utilizar técnicas robustas para obtener una aproximación numérica real. Una de esas técnicas desarrolladas de los últimos años se conoce como Identificación Dispersa de Dinámica No Lineal, en inglés SINDy) (Rudy et al., 2017), la cual se utiliza para identificar ecuaciones dinámicas subyacentes de sistemas complejos a partir de datos experimentales.

Considere un sistema dinámico modelado como:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), w(t)) \quad (4)$$

con mediciones de series de tiempo en las variables de estado $x(t)$ con las entradas controladas $u(t)$ y no controladas $w(t)$, es decir, $x(t)$ es un vector (en R^n) medido en el transcurso del tiempo considerando los diferentes tipos de entradas mencionadas y posiblemente, con disponibilidad de mediciones de la tasa de cambio de x o aproximaciones por diferencias finitas a partir de una serie de tiempo de las variables de estado. Cabe mencionar que el término $f(x(t), u(t), w(t))$ define las ecuaciones de las dinámicas y restricciones del sistema que son muestreadas con x y \dot{x} en m cantidad de puntos equidistantes en el tiempo t_0, t_1, \dots, t_s organizados en matrices, donde x , u y w está en R^n , R^p y R^q , respectivamente:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T(t_0) \\ \mathbf{x}_2^T(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^T(t_s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) & \cdots & x_n(t_0) \\ x_1(t_1) & x_2(t_1) & \cdots & x_n(t_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(t_s) & x_2(t_s) & \cdots & x_n(t_s) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T(t_0) \\ \mathbf{u}_2^T(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_p^T(t_s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t_0) & u_2(t_0) & \cdots & u_p(t_0) \\ u_1(t_1) & u_2(t_1) & \cdots & u_p(t_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1(t_s) & u_2(t_s) & \cdots & u_p(t_s) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^T(t_0) \\ \mathbf{w}_2^T(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{w}_q^T(t_s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1(t_0) & w_2(t_0) & \cdots & w_q(t_0) \\ w_1(t_1) & w_2(t_1) & \cdots & w_q(t_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_1(t_s) & w_2(t_s) & \cdots & w_q(t_s) \end{bmatrix}$$

Así, se pueden construir funciones de las variables de estado que serían los regresores del modelo. Sus relaciones combinatorias son descritas por el modelo reducido aproximado (5):

$$\dot{x} = f(x, u, w) \approx \sum_{j=1}^r \theta_j(x, u, w) \xi_j \quad (5)$$

de donde:

- \dot{x} : Derivadas de las variables de estado x respecto al tiempo.
- r : Número de términos significativos en la combinación lineal para capturar la dinámica del sistema sin términos redundantes en $f(x, u, w)$.
- $f(x, u, w)$: Función que modela la dinámica del sistema en términos de $x, u, y w$.
- $\theta_j(x, u, w)$: Funciones de $x, u, y w$ que forman una base de funciones conocidas como *features* o regresores.
- ξ_j : Coeficientes identificados mediante técnicas de regresión dispersa.

Por otro lado, la regresión Sparse está definida como (Brunton et al., 2015):

$$\arg \min_{\Xi} \left\| \Theta(X, U, W) \Xi - \dot{X} \right\|_F^2 + \lambda \|\Xi\|_0 \quad (6)$$

donde:

- $\arg \min_{\Xi}$: Problema de optimización para minimizar la expresión de regresión y calcular Ξ .
- $\Theta(X, U, W)$: Matriz de funciones no lineales de (X, U, W) que transforman las variables originales para identificar el modelo.
- Ξ : Coeficientes del modelo ajustados para aproximar \dot{X} .
- \dot{X} : Derivadas temporales de X , representando las tasas de cambio del modelo.
- $\left\| \Theta(X, U, W) \Xi - \dot{X} \right\|_F^2$: Error cuadrático entre el modelo predicho y las derivadas observadas.
- $\|\cdot\|_F$: Norma de Frobenius, generalizando la suma de los cuadrados de los elementos de una matriz.
- λ : Parámetro de regularización controlando la penalización $\|\Xi\|_0$.
- $\|\Xi\|_0$: Norma L_0 , contando los elementos no nulos en Ξ , promoviendo un modelo disperso para reducir sobreajuste.

Entonces, se puede asumir que $f(x, u, w)$ de la expresión (4) es una combinación lineal de funciones no lineales simples con que se busca aprender y proponer una variedad de funciones candidatas que logren contribuir con la parte derecha de la expresión, llamadas librerías candidatas (funciones polinomiales, trigonométricas, exponencial, etc) seleccionando así lo que podría ser conveniente con las funciones de los estados enunciada por la expresión (7).

$$h(\Theta, \Xi) = \Theta(X, U, W)^T \Xi \quad (7)$$

Las dinámicas que describe un sistema mediante la regresión tipo Sparse presenta soluciones combinatoriales entre variables de estado y entradas. Esto se logra utilizando métodos como Lasso o, como menciona

(Brunton et al., 2015), mediante el Truncado Secuencial de Mínimos Cuadrados para resolver un problema de mínimos cuadrados y luego se identifican las entradas más pequeñas, haciendo que todas las entradas que están por debajo de un umbral se trunquen a cero. Luego se repite el problema de regresión, pero descartando de la biblioteca (matriz de regresores) los términos correspondientes a los coeficientes truncados a cero, con el fin de que este proceso logre reducir la biblioteca de funciones candidatas y así repetir el problema de mínimos cuadrados de forma iterativa hasta converger en la solución.

Para la construcción de la biblioteca de funciones definimos una biblioteca de funciones $\Theta(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{W})$ que contiene m posibles términos (funciones candidatas) que podrían describir el sistema con la expresión (8):

$$\Theta(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{W}) = [\theta_1 \ \theta_2 \ \cdots \ \theta_t] \quad (8)$$

Donde los términos en $\Theta(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{W})$ pueden ser polinomios, funciones trigonométricas, exponenciales, etc, tanto para los estados como para las entradas controladas y no controladas, con t cantidad de términos propuestos.

Para la identificación de las dinámicas no lineales del sistema se utiliza la técnica "Sparse Identification of Nonlinear Dynamical Systems" (SINDy), que tiene como objetivo descubrir las ecuaciones subyacentes que gobiernan el comportamiento de un sistema dinámico a partir de datos observables, y lo hace buscando la simplicidad y la dispersión en las ecuaciones identificadas. En la figura 1 se muestra el diagrama de bloques que describe de forma básica cómo funciona la técnica SINDy.

3.2 Modelos Politópicos de tipo TS

Los modelos politópicos de tipo Takagi-Sugeno (TS) que proponemos en este estudio van más allá del enfoque clásico al incorporar una estrategia de particionamiento adaptativo del espacio de estado basada en clustering dinámico y lógica difusa mejorada. Esta metodología permite capturar de manera más precisa las transiciones suaves entre diferentes regímenes de operación del sistema no lineal (Abyad et al., 2017).

El proceso comienza con la aplicación de un algoritmo de clustering dinámico, como el k-means adaptativo, que ajusta el número de clusters y sus centros en función de la densidad de los datos y las características locales del sistema. Cada cluster define una región de operación para la cual se ajusta un modelo lineal local. Las funciones de pertenencia difusa se diseñan utilizando una lógica difusa mejorada, que incorpora información de las derivadas primeras y segundas de los datos de entrada, asegurando transiciones suaves y continuas entre los modelos locales. Este enfoque permite una representación más precisa y robusta del sistema no lineal, facilitando el diseño de controladores avanzados

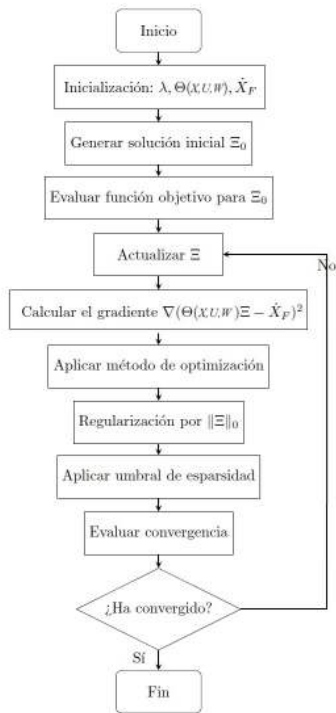


Figura 1. Diagrama de flujo de la técnica Sparse.

y mejorando la capacidad de predicción del modelo en escenarios dinámicos complejos.

4. MODELO POLITÓPICO A PARTIR DE DATOS

Un modelo politópico se define como una combinación convexa de modelos locales lineales, donde cada modelo local está asociado a una región específica del espacio de estados. Matemáticamente, un modelo politópico puede ser expresado como (9):

$$F(u, w) = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i(u, w) \cdot f_i(x, u, w)}{\mu(u, w)} \quad (9)$$

Donde $F(u, w)$ representa la salida del sistema, $f_i(x, u, w)$ es el modelo local lineal asociado a la región i , $\mu_i(u, w)$ son las funciones de membresía que determinan la contribución de cada modelo local en función de las entradas u y w , $\mu(u, w)$ la suma de los valores de la función de membresía por modelo para normalizar su valor a 1 y N el número total de modelos lineales correspondientes a los puntos de operación (Bernal et al., 2022).

4.1 Modelos reducidos utilizando SINDy en el Biorreactor

A partir de los puntos de operación obtenidos por el diseño de experimentos basado en LHS se definen las funciones de membresía triangulares para D y S_{In} que cubran el rango de sus posibles valores.

Supongamos que definimos las funciones de membresía triangulares según la entrada y para cada uno de los diferentes puntos de operación:

- Para D :

$$\mu_B(D) = \max\left(0, \min\left(\frac{\bar{D} - D}{\bar{D} - D_{\min}}, 1\right)\right),$$

$$\mu_A(D) = \max\left(0, \min\left(\frac{D - \bar{D}}{D_{\max} - \bar{D}}, 1\right)\right).$$

- Para S_{In} :

$$\mu_B(S_{In}) = \max\left(0, \min\left(\frac{\bar{S}_{In} - S_{In}}{\bar{S}_{In} - S_{In\min}}, 1\right)\right),$$

$$\mu_A(S_{In}) = \max\left(0, \min\left(\frac{S_{In} - \bar{S}_{In}}{S_{In\max} - \bar{S}_{In}}, 1\right)\right).$$

Aquí, D_{\min} , \bar{D} , D_{\max} y $S_{In\min}$, \bar{S}_{In} , $S_{In\max}$ son los valores mínimos, medios y máximos de D y S_{In} , respectivamente.

4.2 Modelo Politópico TS del Biorreactor

Un modelo politópico TS se describe como:

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))(A_i x(t) + B_{ui} u(t) + B_{wi} w(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \quad (10)$$

La versión normalizada del modelo se expresa como:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + B_{ui} u(t) + B_{wi} w(t)) \quad (11)$$

donde $h_i(z(t))$ son las funciones de pesos normalizadas, definidas por:

$$h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \quad (12)$$

La función de pesos $w_i(z(t))$ se define como el producto de funciones de membresía $M_{ij}(z(t))$:

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^k M_{ij}(z_j(t)) \quad (13)$$

donde:

- $w_i(z(t))$: Función de peso dependiente de $z(t)$.
- A_i : Matriz dinámica de cada modelo, de dimensión $n \times n$.
- B_{ui} : Matriz de entradas controladas de cada modelo, de dimensión $n \times m$.
- B_{wi} : Matriz de entradas no controladas de cada modelo, de dimensión $n \times p$.
- $h_i(z(t))$: Función de pesos normalizada, compuesta por w_i dividida entre la sumatoria de las funciones de peso de cada modelo.
- r : Número total de modelos linealizados en diferentes puntos de operación del sistema no lineal.
- $M_{ij}(z_j(t))$: Funciones de membresía que componen $w_i(z(t))$.

- k : Número de entradas con función de membresía.
- $z(t)$: Vector de funciones que influyen en los pesos w_i . La dimensión de $z(t)$ depende de p , el número de entradas con función de membresía que componen $w_i(z(t))$.

Cabe mencionar que las funciones de grado de membresías M de (13) se determina por la intersección de los rangos de operación de las entradas en cada punto de operación de cada modelo linealizado. Es por ello que los pesos de cada modelo linealizado w va ligado al rango en el que estén situadas las entradas (Bernal et al., 2022).

| Regla | Condición | Modelo |
|-------|---|--------|
| 1 | D es Tri(0,1; 0,2; 0,3) SIn es Tri(2,0; 2,5; 3,0) | 0 |
| 2 | D es Tri(0,2; 0,3; 0,4) SIn es Tri(0,5; 1,0; 1,5) | 1 |
| 3 | D es Tri(0,4; 0,5; 0,6) SIn es Tri(1,2; 1,7; 2,2) | 2 |
| 4 | D es Tri(0,6; 0,7; 0,8) SIn es Tri(2,5; 3,0; 3,5) | 3 |
| 5 | D es Tri(0,7; 0,8; 0,9) SIn es Tri(2,3; 2,8; 3,3) | 4 |
| 6 | D es Tri(0,8; 0,9; 1,0) SIn es Tri(0,73; 1,23; 1,73) | 5 |

Tabla 1. Reglas del modelo TS con funciones de membresía triangulares y números de modelo asociados

5. RESULTADOS

El desarrollo del modelo TS empezó por el diseño de experimentos mediante el uso de Muestreo de Hiper-cubo Latino (LHS). Se seleccionaron seis (6) puntos de operación para realizar la construcción del modelo TS. El problema de optimización (6) se resolvió usando la librería PySindy de Phytton. Además, fue necesario utilizar el método de ConstrainedSR3 para agregar información previa que se conoce del modelo, refiriéndose más exactamente a las reglas o características que debe cumplir el sistema al momento de obtener las aproximaciones de las dinámicas. Como el proceso de un biorreactor puede ser analizado como un sistema que necesita nutrientes para alimentar la biomasa y hacerla crecer rápidamente, y por otro lado, como un ente que relaciona el consumo de sustrato de entrada, aplicando balance de masas, entonces es fácil encontrar y afirmar que la estructura general del modelo en la dinámica de la biomasa sólo se vea afectada por la tasa de dilución, mientras que la dinámica del sustrato muestra relación con ambas entradas de la tasa de dilución y el sustrato de entrada, toda este conocimiento previo que se tiene del sistema, es posible indicarle al algoritmo para que considere estas restricciones al momento de intentar encontrar los modelos reducidos, y así acotar el universo de posibles combinaciones de funciones candidatas a considerar. Se muestra entonces que el modelo del

biorreactor entre sus dinámicas pudiera tener la forma matemática representada en la ecuación (14).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, u) \\ g_2(x_1, x_2, u, w) \end{bmatrix} \quad (14)$$

La tabla 2 representa los puntos de operación utilizados para la construcción del modelo TS y de donde se determinan los parámetros $r = 6$ (por el número de puntos de operación) y $k = 2$ (por el número de entradas) para las expresiones (11) y (13), respectivamente.

Tabla 2. Puntos de operación por modelo lineal

| i | Modelo | u | w | x_1 | x_2 |
|---|--------|-----|------|--------|----------|
| 1 | 0 | 0.2 | 2.5 | 2.4886 | 0.00512 |
| 2 | 1 | 0.3 | 1.0 | 0.9912 | 0.008578 |
| 3 | 2 | 0.5 | 1.7 | 1.678 | 0.02136 |
| 4 | 3 | 0.7 | 3.0 | 2.958 | 0.04132 |
| 5 | 4 | 0.8 | 2.8 | 2.732 | 0.068 |
| 6 | 5 | 0.9 | 1.23 | 1.05 | 0.18 |

La función de membresía mostrada en la figura 2 representa el conjunto de intersecciones de los valores de la entrada controlada correspondiente a la tasa de dilución D para cada uno de los puntos de operación seleccionados. Se puede apreciar también que los valores de la

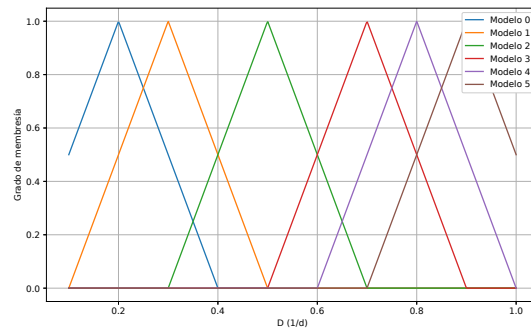


Figura 2. Función de membresía de la entrada controlada representada por D .

entrada D están bien distribuidos en todo su dominio y normalizadas a un valor máximo de la unidad en amplitud indicada. Por otro lado, en la figura 3, se tiene la entrada no controlada SIn que al igual que la anterior entrada viene representada por las intersecciones de los puntos cubre en su totalidad el dominio de los valores de la entrada conforme a los puntos de operación seleccionados.

Los puntos de pruebas utilizados para probar el modelo TS son los representados en la tabla 3. En la figura 4 y la figura 5 se muestran las comparaciones de los modelos no lineales originales contra los modelos Takagi-Sugeno junto con su Error Cuadrático Medio (RME, por su sigla en inglés) para las dinámicas de la biomasa y del sustrato en diferentes puntos de prueba muy cercanos a

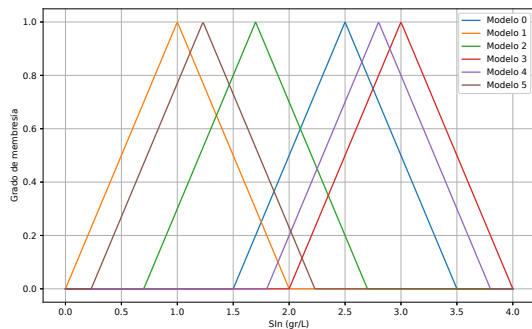


Figura 3. Función de membresía de la entrada no controlada representada por S_{In} .

Tabla 3. Valores de las entradas en puntos de prueba cercanos a los puntos de operación del modelo.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------|------|------|------|------|------|
| D | 0.25 | 0.83 | 0.31 | 0.65 | 0.48 |
| S_{In} | 2.6 | 2.83 | 1.2 | 2.95 | 1.6 |

los puntos de operación generados por el diseño de experimentos. Claramente, se observa que aunque el modelo de Takagi-Sugeno cambie los valores de las entradas a valores cercanos a los puntos de operación generados por el diseño de experimentos selecciona correctamente el modelo con el que tiene mayor proximidad y tiende a un valor muy cercano a su valor en estado estacionario del modelo no lineal.

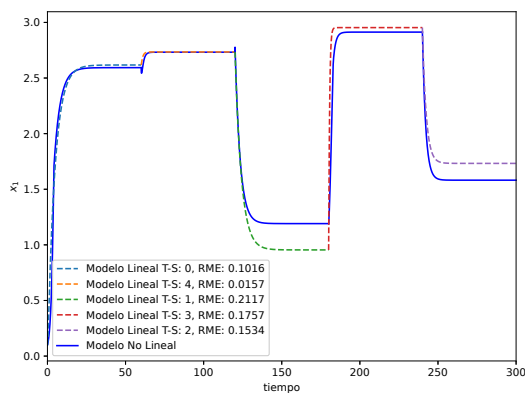


Figura 4. Dinámica de la biomasa de los modelos no lineales originales contra los modelos de Takagi-Sugeno en diferentes puntos de prueba cercanos a los puntos de operación.

6. CONCLUSIONES

Como se muestra en la sección de resultados, el enfoque de modelado de tipo Takagi-Sugeno desarrollado a partir de datos que utiliza la técnica Sparse para obtener

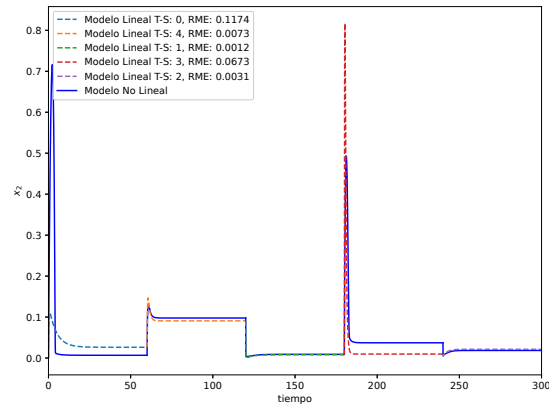


Figura 5. Dinámica del sustrato de los modelos no lineales originales contra los modelos de Takagi-Sugeno en diferentes puntos de prueba cercanos a los puntos de operación.

modelos lineales, ofrece una correcta representación del modelo no lineal original del biorreactor.

REFERENCIAS

- K. Mehran. Takagi-Sugeno Fuzzy Modeling for Process Control. *Industrial Automation, Robotics and Artificial Intelligence, School of Electrical, Electronic and Computer Engineering, Newcastle University*, 2008.
- M. Bernal, A. Sala, Z. Lendek and T.M. Guerra. Analysis and Synthesis of Nonlinear Control Systems: A Convex Optimisation Approach. *Studies in Systems, Decision and Control, 408, Springer*, 2022.
- M. Abyad, A. Karama and A. Khallouq. Modelling and Control of a Biological Process Using the Fuzzy Logic Takagi -Sugeno. *International Renewable and Sustainable Energy Conference (IRSEC)*, 1-5, 2017.
- C.H. Tinh, V.H. Tien, N.C. Dinh and M.N. Anh. Design of Takagi-Sugeno fuzzy controller for automatic stabilization system of missiles with blended aerodynamic and lateral impulsive reaction-jet. *IEEE Symposium on Computational Intelligence for Security and Defense Applications (CISDA)*, 2014.
- H.H. Goh, J. Kang, D. Zhang, H. Liu, W. Dai, T. A. Kurniawan and K.C. Goh. Improving the Performance of DC Microgrids by Utilizing Adaptive Takagi-Sugeno Model Predictive Control. *CSEE Journal of Power and Energy Systems*, vol. 9, 4:1472-1481, 2023.
- K.B. Ariyur and M. Krstic. Real-Time Optimization by Extremum-Seeking Control. Adaptive control systems. *John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey*, 2003.
- S.L. Brunton, J.L. Proctor, and J.N. Kutz. Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems. *Princeton University, Princeton*, 2015.
- S.H. Rudy, S.L. Brunton, J.L. Proctor, and J.N. Kutz. Data-driven discovery of partial differential equations. *Science Advances 3.4*, 2017.