

An Accelerated Parameter Identification Algorithm for Linear Regression Systems

Héctor Ríos^{*,**} Denis Efimov^{***,****} Rosane Ushirobira^{***}

^{*} Tecnológico Nacional de México/I.T. La Laguna, 27000, Torreón, Coahuila, México. (E-mail: hrriosb@lalaguna.tecnm.mx)

^{**} CONAHCYT, Investigadoras e Investigadores por México, 03940, Ciudad de México, México.

^{***} Inria, Univ. Lille, CNRS, UMR 9189-CRISTAL, F-59000, Lille, France. (E-mails: denis.efimov@inria.fr, rosane.ushirobira@inria.fr)

^{****} ITMO University, 197101, Saint Petersburg, Russia.

Abstract: In this paper, a parameter identification algorithm is proposed for linear regression systems with constant unknown parameters. Such an algorithm is composed of an accelerated version of the heavy-ball method and a modified extension of Kreisselmeier's filters and can identify constant parameters in a finite time under a persistent excitation condition. The workability of the proposed algorithm is depicted by simulation results.

Keywords: Parameter Identification, Heavy-Ball Method, Finite-Time.

1. INTRODUCTION

En la teoría de control, el problema de diseño de control, en presencia de incertidumbre paramétrica y entradas desconocidas, sigue siendo un problema desafiante. Las herramientas que se han desarrollado por la teoría de identificación de parámetros nos permiten lidiar con la falta de conocimiento relacionada con las incertidumbres y perturbaciones. Durante las últimas décadas la identificación de parámetros en línea ha llamado mucho la atención. Existen muchas técnicas que tratan con el problema de identificación, *e.g.*, algoritmos por mínimos cuadrados (LS), algoritmos basados en el gradiente descendiente, algoritmos de estimación adaptable, por mencionar algunas técnicas populares (ver, *e.g.*, Annaswamy and Fradkov (2021), Isermann and Münchhof (2011), y Narendra and Annaswamy (2005)).

La mayoría de los esquemas propuestos en identificación de parámetros han tratado con la identificación de parámetros constantes. A continuación mencionamos algunos trabajos recientes. En Jin et al. (2018), se diseña un método recursivo basado en LS para identificar parámetros constantes en articulaciones flexibles. Bajo ciertas condiciones de excitación persistente, se muestra que el error de identificación converge a una región alrededor del origen. En Yang et al. (2018), se propone un algoritmo de identificación de parámetros adaptable y conmu-

tado para robots manipuladores que garantiza la convergencia a cero del error de identificación en tiempo finito. En Ballesteros et al. (2021), se propone un algoritmo de identificación de parámetros para sistemas homogéneos que se basa en una clase de redes neuronales artificiales. El error de identificación converge a una región alrededor del origen. En Wang et al. (2019), se usa un modelo de regresión lineal para asegurar el acotamiento del error de identificación sin la condición de excitación persistente. En Na et al. (2015), se propone un método de identificación adaptable para estimar parámetros constantes en señales sinusoidales, *e.g.*, offset, amplitud, frecuencia y fase, garantizando convergencia exponencial a una región del origen del error de identificación. De manera similar, en Kapatina et al. (2019), se presenta un algoritmo adaptable basado en el método del gradiente descendiente que resuelve el problema de identificación de parámetros constantes. Sin embargo, la mayoría de los algoritmos arriba mencionados pueden asegurar solo velocidades de convergencia exponencial.

Un método que se ha propuesto para mejorar la velocidad de convergencia de los algoritmos basados en el gradiente descendiente es el método de la "bola pesada", que es el primer enfoque de optimización que usó "momentos" (momentums) (Polyak, 1964). Actualmente, este método es uno de los más populares para lidiar con problemas de optimización y diseño de algoritmos de aprendizaje que proporcionan velocidades de convergencia rápidas cuando las funciones objetivo son suaves y fuertemente convexas. Por ejemplo, en Xiong et al. (2020), los autores proporcionan una caracterización analítica de las regiones de convergencia de algoritmos por gradiente descendi-

* Este trabajo fue apoyado por los proyectos SEP-CONACYT-ANUIES-ECOS NORD 315597 y ECOS NORD M20M04. Héctor Ríos agradece el apoyo por parte de CONAHCYT, Investigadoras e Investigadores por México, CVU 270504 Proyecto 922, y de Proyectos TecNM.

ente acelerados usando el dominio de la frecuencia. El método de la “bola pesada” también se ha usado para problemas de optimización distribuidos. Por ejemplo, en Xin and Khan (2020), se propone un método distribuido de la “bola pesada”, que combina métodos de primer orden distribuido, conocidos como algoritmos \mathcal{AB} , con seguimiento por gradiente y momento, para minimizar la suma de funciones suaves y fuertemente convexas. Un problema similar se estudia en Ren et al. (2022), donde los autores desarrollan un método por gradiente distribuido acelerado para redes fijas, el cual depende de técnicas de seguimiento por gradiente y memoria local para acelerar la velocidad de convergencia. En Ugrinovskii et al. (2022), se introduce un método generalizado de la “bola pesada” para tratar con la convergencia global en algunos problemas de optimización no-convexos. Una familia de métodos por momentos distribuidos se propone en Gao et al. (2023) para problemas de optimización distribuidos sobre grafos directos. Los autores desarrollan un análisis de convergencia global R-lineal para funciones suaves y fuertemente convexas. Desde el punto de vista de teoría de control, en Vaquero et al. (2023), se introduce una ecuación diferencial de segundo orden que representa la dinámica del algoritmo “bola pesada” con gradiente y que posee las mismas propiedades de convergencia que la dinámica del algoritmo “bola pesada” original. Los autores emplean un enfoque de Función de Lyapunov para caracterizar las propiedades de convergencia asintótica de los algoritmos en tiempo discreto. En Hustig-Schultz and Sanfelice (2024), se propone un esquema de control híbrido para asegurar la convergencia asintótica y global para un problema de mínimo único para una función convexa. El esquema propuesto se basa en un mecanismo de histéresis que conmuta entre el algoritmo gradiente descendente acelerado de Nesterov y el algoritmo “bola pesada”, para asegurar la convergencia asintótica empleando un enfoque de función de Lyapunov. Sin embargo, ninguno de los trabajos mencionados anteriormente ofrece convergencia en tiempo finito. Además, solo 2 trabajos proporcionan una caracterización a través de funciones de Lyapunov de las velocidades de convergencia.

En esta trabajo se propone un nuevo algoritmo de identificación de parámetros para sistemas en forma de regresión lineal con parámetros desconocidos constantes. El algoritmo propuesto se basa en un método acelerado de “bola pesada” que usa una versión no-lineal de la extensión de regresor de Kreisselmeier. Este algoritmo acelerado de “bola pesada” puede identificar parámetros constantes en tiempo finito bajo la condición de excitación persistente. Se asegura la estabilidad local en tiempo finito de la dinámica del error de identificación a través de un enfoque por función de Lyapunov. Hasta donde los autores conocen, esta es la primera vez, a pesar de las numerosas modificaciones del algoritmo “bola pesada”, que se propone esta versión acelerada del método “bola pesada” asegurando convergencia en tiempo finito.

El resto de este trabajo está organizado de la siguiente manera. Los preliminares se presentan en la Sección 2. El

planteamiento del problema se formula en la Sección 3. El algoritmo de identificación se introduce en la Sección 4. El análisis de convergencia del error de identificación se presenta en la Sección 5, mientras que las simulaciones se muestran en la Sección 6. Finalmente, algunos comentarios finales se dan en la Sección 7.

Notación: Denote $[s]^\alpha := |s|^\alpha \text{sign}(s)$, para $s \in \mathbb{R}$ y $\alpha \geq 0$. Para un vector $s \in \mathbb{R}^n$, $[s]^\alpha$ se entiende en el sentido elemento-a-elemento. Para $p \geq 1$, la norma L^p de $s \in \mathbb{R}^n$ se define como $|s|_p = (\sum_{i=1}^n |s_i|^p)^{\frac{1}{p}}$. De esta manera, se tiene que $|s|_{\alpha+1}^{\alpha+1} = s^\top [s]^\alpha$, para cualquier $\alpha > 0$. La norma Euclidiana de $s \in \mathbb{R}^n$ se denota como $|s| := |s|_2$, y para una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, la norma inducida es la norma espectral, i.e., $|A| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^\top A)}$, donde λ_{\max} (respectivamente, λ_{\min}) es el máximo (respectivamente, el mínimo) valor característico. El conjunto de todas las entradas $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^p$ tal que su norma L_∞ en $[0, \infty]$ es finita, i.e., $|u|_\infty := \text{ess sup}_{t \geq 0} |u(t)| < \infty$, se denota como \mathcal{L}_∞ . Una función $\alpha : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ pertenece a la clase \mathcal{K} si es estrictamente creciente y $\alpha(0) = 0$.

2. PRELIMINARES

Considere el sistema

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado. La función $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se asume local y uniformemente acotada, uniformemente t , localmente Lipschitz o Hölder continua en x , y $f(t, 0) = 0$. Para cualquier condición inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la solución del sistema (1) se denota como $x(t, x_0)$, y se asume que está definida para cualquier $t \geq 0$.

Definición 1. (Orlov, 2004), (Zimenko et al., 2018). *En estado estable $x = 0$, el sistema (1) es estable en tiempo finito (FTS) si existe una función $\alpha \in \mathcal{K}$ tal que $|x(t, x_0)| \leq \alpha(|x_0|)$, para todo $t \geq 0$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, y existe $0 \leq T_s < +\infty$ tal que $x(t, x_0) = 0$, para todo $t \geq T_s$. La función $T_0 : x_0 \mapsto \inf\{T_s \geq 0 : x(t, x_0) = 0, \forall t \geq T_s\}$ es conocida como la función de tiempo de asentamiento del sistema (1).*

Los siguiente lemas son usados en el análisis de estabilidad.

Lema 1. (Efimov and Aleksandrov, 2021). *Sea $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, y $W(x_1, x_2) = |x_1|^\alpha + |x_2|^\beta - c|x_1|^\gamma |x_2|^\delta$, con algunas constantes positivas $c, \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$. Entonces, las siguientes afirmaciones son ciertas:*

1) *Para cualquier valor de c , W es positiva definida si*

$$\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\delta}{\beta} > 1 \text{ y } \max\{|x_1|^\alpha, |x_2|^\beta\} \leq c^{\frac{1}{1 - (\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\delta}{\beta})}}.$$

2) *Para cualquier valor de c , W es positiva si*

$$\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\delta}{\beta} < 1 \text{ y } \max\{|x_1|^\alpha, |x_2|^\beta\} \geq c^{\frac{1}{1 - (\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\delta}{\beta})}}.$$

3) *Para valores suficientemente pequeños de c y $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, W es positiva definida si*

$$\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\delta}{\beta} = 1.$$

Lema 2. (Aleksandrov, 2020). Sea $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, y $W(x_1, x_2) = |x_1|^\alpha + |x_2|^\beta + c_1|x_1|^\eta|x_2|^\zeta - c_2|x_1|^\gamma|x_2|^\delta$, con constantes $c_1, c_2, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \zeta > 0$. Entonces, para $\frac{\eta}{\alpha} + \frac{\zeta}{\beta} < 1$, W es positiva definida para cualquier valor de c_1 y c_2 , si y solo si

$$\gamma + \delta \frac{(\alpha - \eta)}{\zeta} > \alpha, \quad \delta + \gamma \frac{(\beta - \zeta)}{\eta} > \beta.$$

Finalmente, se introduce la siguiente definición de excitación persistente.

Definición 3. Ioannou and Sun (1996). La señal $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^n$ está Persistentemente Excitada (PE) si satisface

$$\alpha_1 I \geq \int_t^{t+T} \phi(\sigma)\phi^\top(\sigma) d\sigma \geq \alpha_0 I, \quad \forall t \geq 0,$$

con un nivel de excitación $\alpha_0 > 0$, algún tiempo de excitación $T > 0$ y una constante positiva $\alpha_1 > 0$, donde I es la matriz identidad.

3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considere el siguiente sistema en forma de regresión lineal:

$$y(t) = \phi^\top(t)\theta, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

donde $\theta \in \mathbb{R}^n$ y $y(t) \in \mathbb{R}$ son los vectores de parámetros desconocidos y de salida, respectivamente, y $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función del tiempo continuamente diferenciable, mejor conocida como *regresor*, el cual es conocido, acotado y persistentemente excitado (PE). El objetivo de este trabajo es identificar el vector de parámetros constantes θ bajo la siguiente suposición:

Suposición 1. El regresor ϕ :

- es PE;
- es acotado, i.e., $|\phi\phi^\top|_\infty \leq \bar{\phi}$, para alguna constante conocida y positiva $\bar{\phi} > 0$;
- su derivada temporal satisface $\left| \frac{d(\phi\phi^\top)}{dt} \right|_\infty \leq \bar{\phi}_d$, para alguna constante conocida y positiva $\bar{\phi}_d > 0$.

4. ALGORITMO DE IDENTIFICACIÓN

El algoritmo de identificación basado en el método acelerado de “bola pesada” está dado de la siguiente manera:

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = \hat{\theta}_2, \quad (3a)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_2 = \tau k_1 z_2^\top [z_1 - z_2 \hat{\theta}_1]^\alpha - k_2 [\hat{\theta}_2]^\beta, \quad (3b)$$

$$\dot{z}_1 = \tau^{-1} \rho(z, \hat{\theta}) [\phi y - z_1], \quad z_1(0) = 0, \quad (3c)$$

$$\dot{z}_2 = \tau^{-1} \rho(z, \hat{\theta}) [\phi\phi^\top - z_2], \quad z_2(0) = 0, \quad (3d)$$

$$\rho(z, \hat{\theta}) = \begin{cases} 1, & \forall t \in [0, T), \\ |z_1 - z_2 \hat{\theta}_1|_{\gamma+1}^{\gamma+1} + |\hat{\theta}_2|_{\mu+1}^{\mu+1}, & \forall t \geq T, \end{cases} \quad (3e)$$

donde $\hat{\theta}_1 \in \mathbb{R}^n$ es el valor identificado del vector de parámetros θ , $\hat{\theta}_2 \in \mathbb{R}^n$ es un vector de velocidad auxiliar, $z_1 \in \mathbb{R}^n$ representa una versión filtrada del término ϕy , $z_2 = z_2^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una versión filtrada de la matriz $\phi\phi^\top$, la constante de tiempo del filtro está dada por $\tau > 0$, la función positiva ρ representa la ganancia no-lineal del filtro, con algún tiempo de excitación $T > 0$, los parámetros del algoritmo son $\alpha, \beta \in (0, 1)$, y $\gamma, \mu, k_1, k_2 > 0$.

Note que la dinámica en (3b) describe la dinámica del algoritmo acelerado de “bola pesada”, donde el término no-lineal $[\hat{\theta}_2]^\beta$ representa el término de “velocidad” o “momento” añadido. Además, la dinámica (3c)–(3e) proporciona una versión no-lineal de la extensión de regresor de Kreisselmeier.

4.1 Dinámica del Error de Identificación

Vamos a definir el error de identificación como

$$e_1 = \theta - \hat{\theta}_1, \quad e_2 = -\hat{\theta}_2. \quad (4)$$

Con base en (2) y (3), la dinámica del error se puede escribir como

$$\dot{e}_1 = e_2, \quad (5a)$$

$$\dot{e}_2 = -\tau k_1 z_2^\top [z_1 - z_2 \hat{\theta}_1]^\alpha + k_2 [\hat{\theta}_2]^\beta. \quad (5b)$$

De (3c) y (3d), se tiene que $z_1(t) = z_2(t)\theta$, para todo $t \geq 0$ (las condiciones iniciales del filtro se seleccionan igual a cero). Por lo tanto, la dinámica del error (5) se reescribe de la siguiente manera

$$\dot{e}_1 = e_2, \quad e_1(0) := e_{10}, \quad (6a)$$

$$\dot{e}_2 = -\tau k_1 z_2^\top [z_2 e_1]^\alpha - k_2 [e_2]^\beta, \quad e_2(0) := e_{20}. \quad (6b)$$

La dinámica del error de identificación (6) se puede ver como una dinámica que caracteriza la versión acelerada, dependiente del tiempo, del método de “bola pesada”. Es claro que $e_1 = e_2 = 0$ es un punto de equilibrio del sistema (6), uniforme en z_2 . La caracterización de la estabilidad en tiempo finito del origen de esta dinámica del error, en términos de funciones de Lyapunov, no es una tarea sencilla.

4.2 Propiedades de z_2 y $\rho(z, \hat{\theta})$

El siguiente resultado nos ayudará a lidiar con el análisis de estabilidad de la dinámica del error de identificación.

Lema 3. Considere que la Suposición 1 se satisface. Entonces, las trayectorias del sistema (3d) satisfacen

$$\phi := e^{-\frac{1}{\tau} T \frac{\alpha_0}{\tau}} \leq \inf_{t \geq T} (\lambda_{\min}(z_2(t))), \quad |z_2|_\infty \leq \bar{\phi}. \quad (7)$$

Además, el error de aproximación para $\phi(t)\phi^\top(t)$, i.e., $\varepsilon(t) = z_2(t) - \phi(t)\phi^\top(t)$, satisface

$$|\varepsilon|_\infty \leq \bar{\phi} + \tau \bar{\phi}_d := \varepsilon^+. \quad (8)$$

Note que si mostramos que la dinámica del error (6) es FTS, entonces la función $\rho(z, \hat{\theta})$ va satisfacer

$$\lim_{t \rightarrow T_s} \rho(z(t), \hat{\theta}(t)) = 0,$$

donde T_s es el tiempo de convergencia de la dinámica del error (6), que es dependiente de las condiciones iniciales del sistema. La estructura conmutada de la función $\rho(z, \hat{\theta})$ nos permite evitar alcanzar el valor cero antes del tiempo de excitación T , y para el sistema (3), $\rho(z, \hat{\theta}) = 0$ es el subespacio invariante que contiene los equilibrios. Además, si z_2 es no-singular, entonces este conjunto de equilibrios es uno solo y corresponde a la convergencia de $\hat{\theta}$ al valor real de θ .

Adicionalmente, cuando $\rho(z(T_s), \hat{\theta}(T_s)) = 0$, se tiene que $\dot{z}_2(T_s) = 0$, y por lo tanto $z_2(t)$ permanecería constante en $z_2(T_s)$, para todo $t \geq T_s$. En este tiempo T_s , ya se tiene que $z_2(T_s) > 0$, y entonces tendremos que $e_1(t, e_{10}) = e_2(t, e_{20}) = 0$, para todo $t \geq T_s \geq T$.

5. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD

Vamos a definir las siguientes funciones que nos ayudarán en el análisis de estabilidad:

$$G : t \mapsto \frac{\tau k_1}{\alpha + 1} |z_2(t) e_1(t)|_{\alpha+1}^{\alpha+1}, \quad (9a)$$

$$E : t \mapsto G(t) + \frac{1}{2} e_2(t)^\top e_2(t), \quad (9b)$$

$$F : t \mapsto |z_2(t) e_1(t)|_{q-1}^{q-1} e_1(t)^\top e_2(t), \quad q > 1. \quad (9c)$$

Note que las funciones G y E son continuamente diferenciables y positivas definidas. Con base en (6), se tiene que

$$\dot{G} = \tau k_1 ([z_2 e_1]^\alpha)^\top [z_2 e_2 - \tau^{-1} \rho(z, \hat{\theta}) \varepsilon e_1], \quad (10a)$$

$$\dot{E} = -k_1 \rho(z, \hat{\theta}) \varepsilon e_1^\top [z_2 e_1]^\alpha - k_2 e_2^\top [e_2]^\beta, \quad (10b)$$

$$\begin{aligned} \dot{F} = & -\tau k_1 |z_2 e_1|_{q-1}^{q-1} |z_2 e_1|_{\alpha+1}^{\alpha+1} - k_2 |z_2 e_1|_{q-1}^{q-1} e_1^\top [e_2]^\beta \\ & + |z_2 e_1|_{q-1}^{q-1} |e_2|^2 + (q-1) ([z_2 e_1]^{q-2})^\top \times \\ & \times [z_2 e_2 - \tau^{-1} \rho(z, \hat{\theta}) \varepsilon e_1] e_1^\top e_2. \end{aligned} \quad (10c)$$

De acuerdo con Aleksandrov et al. (2023), se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V = E^{r+1} + \ell F, \quad (11)$$

para algunas constantes positivas $r, \ell > 0$. Por la desigualdad de Hölder, tenemos que $|e|_{\varsigma_1} \leq \bar{e}(\varsigma_1, \varsigma_2) |e|_{\varsigma_2}$, para cualquier $e \in \mathbb{R}^n$ y cualquier $\varsigma_1, \varsigma_2 > 0$, con $\bar{e}(\varsigma_1, \varsigma_2) := \max\left(1, n \frac{\varsigma_2 - \varsigma_1}{\varsigma_1 \varsigma_2}\right)$.

El análisis de estabilidad, con base en (11), se desarrolla en dos pasos. En el primero, se demuestra la estabilidad en tiempo finito para todo $t \geq T$, i.e., se muestra que $\dot{V} \leq -\bar{\eta} V^u$, con alguna constante $\bar{\eta} > 0$ y $u \in (0, 1)$, para todo $t \geq T$. Después, se muestra que es imposible tener un escape a infinito, en tiempo finito, durante el intervalo

de tiempo $t \in [0, T]$. Por razones de espacio, el análisis se omite.

El resultado principal de este trabajo se presenta en el siguiente teorema.

Teorema 1. *Considere el sistema (2) bajo la Suposición 1. Si los exponentes del algoritmo basado en el método acelerado de “bola pesada” (3) son diseñados tal que el conjunto de condiciones*

$$\gamma \geq q - 2 - (\alpha + 1)r, \quad (12)$$

$$\frac{\alpha + \gamma + 2}{q + \alpha} + \frac{2r}{2r + \beta + 1} > 1, \quad (13)$$

$$\frac{(\alpha + 1)(r + 1)}{q + \alpha} + \frac{\mu + 1}{2r + \beta + 1} > 1, \quad (14)$$

$$\frac{\alpha + 1}{q + \alpha} + \frac{2r + \mu + 1}{2r + \beta + 1} > 1, \quad (15)$$

$$\frac{\gamma + q + 1}{q + \alpha} + \frac{1}{2r + \beta + 1} > 1, \quad (16)$$

$$\frac{q}{q + \alpha} + \frac{\mu + 2}{2r + \beta + 1} > 1, \quad (17)$$

$$q > (\alpha + 1)r$$

$$+ \max\left(\frac{\alpha + 1}{2}, \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta(\alpha + 1) + (1 - \alpha)}{2}\right), \quad (18)$$

$$1 > \alpha > \frac{q - r - 1}{r} > 0, \quad \alpha < \beta, \quad (19)$$

se satisface para algunos valores de $\alpha, \beta \in (0, 1)$, y las ganancias k_1 y k_2 se diseñan suficientemente grandes; entonces, el origen de la dinámica del error de identificación (6) es localmente FTS, con una función de tiempo de asentamiento satisfaciendo

$$T_s \leq T + \frac{V^{1-u}(e_1(T), e_2(T))}{\bar{\eta}(1-u)}.$$

Observación 1. *El conjunto de condiciones (12)–(19) siempre se cumple para valores suficientemente grandes de q, γ y μ . Además, la estabilidad en tiempo finito siempre se puede asegurar para valores suficientemente grandes de k_1 y k_2 .*

6. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Las simulaciones fueron realizadas en MATLAB usando el método de discretización explícito de Euler y un tiempo de muestreo igual a 0.01[s].

Considere un ejemplo académico para el sistema (2) con:

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos(6t) + 3 \sin(10t) + 2 \sin(5t) \cos(10t) \\ -6 \sin(t) + \cos(20t) + 3 \sin(10t) \cos(5t) \end{pmatrix},$$

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Seleccionando $\alpha = 0.8, \beta = 0.96, \gamma = 0.5, \mu = 1$ y $r = 1.5$, se puede probar que el conjunto de condiciones (12), (13), (18) y (19), se cumple para $q = 3.674$. Entonces, tomando $\tau = 0.01, k_1 = 0.08, k_2 = 8$ y $T = 5$, que satisfacen los

requerimientos del Teorema 1, aplicamos el algoritmo (3), considerando $\hat{\theta}_1(0) = \hat{\theta}_2(0) = (3, -5)^\top$.

Con propósitos de comparación, también implementamos el algoritmo (3), cuando se considera el método clásico de “bola pesada”, *i.e.*, cuando $\alpha = \beta = 1$ y $\rho(z, \hat{\theta}) = 1$, con el mismo valor para el resto de los parámetros. La nomenclatura para las leyendas en las figuras es la siguiente: *aHB* corresponde al algoritmo acelerado propuesto, mientras que *HB* corresponde al algoritmo clásico. Los resultados se muestran en las Figs. 1, 2 y 3.

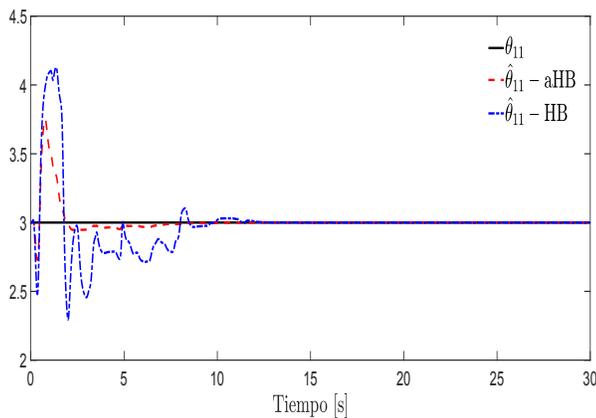


Fig. 1. Identificación del Parámetro θ_{11}

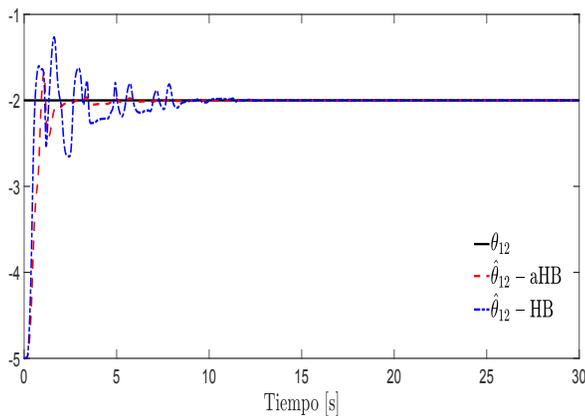


Fig. 2. Identificación del Parámetro θ_{12}

Las Figs. 1 y 2 muestran la identificación que proporciona cada uno de los algoritmos. Podemos apreciar que ambos algoritmos ofrecen una identificación rápida de los parámetros desconocidos. Sin embargo, en la Fig. 3, que muestra la norma del error de identificación e , podemos ver que el algoritmo acelerado propuesto posee una velocidad de convergencia en tiempo finito, y entonces, una convergencia más rápida, y también una precisión considerablemente más alta que el algoritmo clásico.

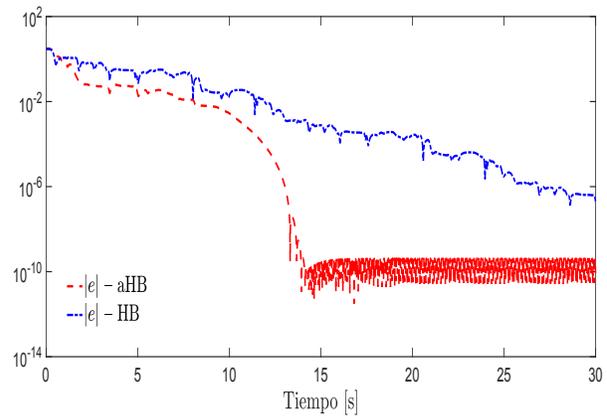


Fig. 3. Error de Identificación

7. CONCLUSIONES

En este trabajo, presentamos un nuevo algoritmos de identificación de parámetros para sistemas en forma de regresión lineal con parámetros constantes desconocidos. Nuestro algoritmo se basa en una versión acelerada del método de “bola pesada”, que usa una versión no-lineal de la extensión de regresor de Kreisselmeier. Esta versión acelerada del método de “bola pesada” puede identificar parámetros constantes en tiempo finito, bajo la condición de excitación persistente. La estabilidad local en tiempo finito de la dinámica del error de identificación se prueba a través del enfoque de función de Lyapunov. La efectividad del algoritmo propuesto se ilustra por medio de resultados de simulación.

REFERENCIAS

- Aleksandrov, A., Efimov, D., and Dashkovskiy, S. (2023). Design of finite-/fixed-time ISS–Lyapunov functions for mechanical systems. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 35, 215–235.
- Aleksandrov, A. (2020). Some stability conditions for nonlinear systems with time-varying parameters. In *IFAC Proceedings Volumes*, volume 33, 7–10.
- Annaswamy, A. and Fradkov, A. (2021). A historical perspective of adaptive control and learning. *Annual Reviews in Control*, 52, 18–41.
- Aranovskiy, S., Ushirobira, R., Korotina, M., and Vedyakov, A. (2023). On preserving–excitation properties of kreisselmeier’s regressor extension scheme. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 68(2), 1296–1302.
- Ballesteros, M., Polyakov, A., Efimov, D., Chairez, I., and Poznyak, A. (2021). Non-parametric identification of homogeneous dynamical systems. *Automatica*, 129, 109600.
- Efimov, D. and Aleksandrov, A. (2021). Analysis of robustness of homogeneous systems with time delays using Lyapunov–Krasovskii functionals. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 31, 3730–3746.
- Gao, J., Liu, X., Dai, Y.H., Huang, Y., and Yang, P. (2023). A family of distributed momentum methods

- over directed graphs with linear convergence. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 68(2), 1085–1092.
- Hustig-Schultz, D. and Sanfelice, R. (2024). Uniting Nesterov and heavy ball methods for uniform global asymptotic stability of the set of minimizers. *Automatica*, 160, 111389.
- Ioannou, P. and Sun, J. (1996). *Robust Adaptive Control*. Prentice Hall, Inc., New Jersey, USA.
- Isermann, R. and Münchhof, M. (2011). *Identification of Dynamic Systems, An Introduction with Applications*. Springer-Verlag, Berlin, 1st edition.
- Jin, H., Liu, Z., Zang, H., Liu, Y., and Zhao, J. (2018). A dynamic parameter identification method for flexible joints based on adaptive control. *IEEE Transactions on Mechatronics*, 23, 2896–2908.
- Kapetina, M., Repaic, M., Pisano, A., and Jelicic, Z. (2019). Adaptive parameter estimation in LTI systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64, 4188–4195.
- Na, J., Yuang, J., Wu, X., and Guo, Y. (2015). Robust adaptive parameter estimation of sinusoidal signals. *Automatica*, 53, 376–384.
- Narendra, K. and Annaswamy, A. (2005). *Stable Adaptive Systems*. Dover Publications, Mineola, NY.
- Orlov, Y. (2004). Finite-time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 43(4), 1253–1271.
- Polyak, B. (1964). Some methods of speeding up the convergence of iteration methods. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 4(5), 1–17.
- Ren, X., Li, D., Xi, Y., and Shao, H. (2022). An accelerated distributed gradient method with local memory. *Automatica*, 146, 110260.
- Ugrinovskii, V., Petersen, I., and Shames, I. (2022). Global convergence and asymptotic optimality of the heavy ball method for a class of nonconvex optimization problems. *IEEE Control Systems Letters*, 6, 2449–2454.
- Vaquero, M., Mestres, P., and Cortés, J. (2023). Resource-aware discretization of accelerated optimization flows: The heavy-ball dynamics case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 68(4), 2109–2124.
- Wang, J., Efimov, D., and Bobtsov, A. (2019). On robust parameter estimation in finite-time without persistence of excitation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 65, 1731–1738.
- Xin, R. and Khan, U. (2020). Distributed heavy-ball: A generalization and acceleration of first-order methods with gradient tracking. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 65(6), 2627–2633.
- Xiong, H., Chi, Y., Hu, B., and Zhang, W. (2020). Analytical convergence regions of accelerated gradient descent in nonconvex optimization under regularity condition. *Automatica*, 113, 108715.
- Yang, C., Jiang, Y., He, W., Na, J., Li, Z., and Xu, B. (2018). Adaptive parameter estimation and control design for robot manipulators with finite-time convergence. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 65, 8112–8123.
- Zimenko, K., Polyakov, A., and Efimov, D. (2018). On finite-time robust stabilization via nonlinear state feedback. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 28(16), 4951–4965.