

# A Virtual Laboratory on Recursive Least-Squares Estimation for Undergraduate Courses<sup>\*</sup>

Daan Y. Maldonado-Uriostigue<sup>\*,\*\*</sup>  
Roberto G. Ramírez-Chavarría<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup> Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México,  
Ciudad de México, 04510, México (e-mail:  
RRamirezC@iingen.unam.mx).

<sup>\*\*</sup> Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México,  
Ciudad de México, 04510, México (e-mail:  
DMaldonadoU@iingen.unam.mx).

---

**Abstract:** This paper describes the creation of an educational resource focused on identifying dynamic systems, with a particular emphasis on parametric estimation, for undergraduate courses. This virtual laboratory is easily reproducible with accessible materials and software, allowing easy system modification. The Recursive Least-Squares (RLS) with a forgetting factor is a solid and efficient method that enables students to experiment with parameters and better understand the subject matter. We show three experiments to provide an exhaustive RLS comprehension. Finally, we envision the virtual laboratory as useful for educational purposes and other applications in automatic control.

*Keywords:* Parametric Estimation, RLS algorithm, Forgetting factor, Real time, Educational tool.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Los sistemas dinámicos están presentes en una gran cantidad de procesos de nuestra vida diaria, incluyendo sistemas biológicos, mecánicos, eléctricos, civiles, químicos, aeroespaciales, de tráfico, por mencionar algunos. Comprender el comportamiento dinámico de estos sistemas es de interés primordial tanto para científicos como para ingenieros, para predecir, regular y mejorar el rendimiento del proceso subyacente. Por ello, la representación del sistema a través de un modelo matemático y sus parámetros es crucial. Particularmente, la estimación de parámetros es el proceso de utilizar mediciones de las señales de salida y/o entrada de un sistema dinámico para desarrollar modelos matemáticos que representen adecuadamente las características del sistema. Así, el modelo asumido consiste en un conjunto finito de parámetros, cuyos valores se estiman utilizando algoritmos que buscan minimizar el error entre los datos medidos y el modelo. El modelado matemático mediante la estimación de parámetros es una herramienta clave para alcanzar una comprensión más profunda de las características de un proceso. Estos parámetros suelen describir la estabilidad y el comportamiento de control del mismo. La estimación de dichos valores a partir de los datos de entrada y salida (señales) es, por lo tanto, un paso crucial en el análisis de sistemas dinámicos. (Juang, 1994).

Los métodos recursivos se han utilizado ampliamente en el control automático, la identificación de sistemas, el procesamiento de señales y, más recientemente, en algoritmos basados en datos. En particular, los mínimos cuadrados recursivos (RLS: *recursive least-squares*) son una técnica bien establecida que se utiliza para minimizar el error entre las mediciones y el modelo. En este método, el minimizador se actualiza en cada paso a medida que se dispone de nuevos datos (Verhaegen and Verdult, 2007). RLS es más eficiente computacionalmente que los mínimos cuadrados por lotes, y se utiliza extensamente para la identificación de sistemas y el control adaptativo. Por ello, el algoritmo RLS ha sido empleado en diversas áreas de estudio como sistemas eléctricos (Sun and Xiong, 2015), aeroespaciales (Kamali et al., 2011) y biológicos (Ramírez-Chavarría et al., 2019).

En el contexto didáctico, sin embargo, la información existente sobre el algoritmo RLS puede resultar difícil de interpretar para estudiantes de Licenciatura o Pregrado. Más aún, si se considera una modalidad de enseñanza-aprendizaje híbrida, los recursos didácticos disponibles pueden ser limitados para sintetizar los contenidos teóricos mediante experimentación. Por ello, en este trabajo se propone un laboratorio virtual para experimentar de forma simple, pero versátil, el algoritmo de mínimos cuadrados recursivos para estimación de sistemas dinámicos. Así, se presenta una síntesis del algoritmo RLS, y se enfatiza su implementación en tiempo real en términos de la disponibilidad de los datos y el

---

<sup>\*</sup> Este trabajo fue realizado gracias al Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE101524.

tiempo necesario para el cálculo. Hasta donde se sabe, este esfuerzo representa un producto innovador para fortalecer el proceso enseñanza-aprendizaje en asignaturas relacionadas con estimación y control de sistemas dinámicos.

El resto del artículo se divide la siguiente manera. En la Sección 2 se presenta una deducción del método RLS. La configuración del laboratorio virtual se presenta en la Sección 3. Los resultados para tres casos de estudio se describen en la Sección 4. Finalmente, la Sección 5 está dedicada a la conclusiones del trabajo.

## 2. FUNDAMENTOS DE MÍNIMOS CUADRADOS RECURSIVOS

La teoría de identificación de sistemas dinámicos tiene como objetivo ofrecer un enfoque sistemático para desarrollar el mejor modelo matemático posible de la parte determinista, reduciendo al máximo las perturbaciones causadas por el ruido (Pintelon and Schoukens, 2012).

Para iniciar el problema de identificación, (Galrinho, 2016) propone un modelo autoregresivo (AR: Autoregressive) de la forma

$$y(k) = \sum_{j=0}^Q b_j u(k-j) - \sum_{i=1}^P a_i y(k-i) + e(k), \quad (1)$$

donde  $y$  es la señal de salida,  $P$  es la longitud de coeficientes relacionados con la salida,  $a_i$  son los parámetros relacionados con la salida,  $u$  la señal de entrada,  $Q$  es la longitud de coeficientes relacionados con la entrada,  $b_i$  son los coeficientes del sistema relacionados con la entrada y  $e$  son perturbaciones al sistema, modeladas como ruido blanco representando un proceso estocástico.

En forma matricial, la ecuación (1) puede ser escrita como

$$y(k) = \phi^T(k)\theta_k + e(k), \quad (2)$$

donde  $\phi(k) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de regresión o regresor, que contiene información de los datos entrada-salida pasados, es decir

$$\phi(k) = [-y(k-1), -y(k-2), \dots, -y(k-P), u(k), u(k-1), \dots, u(k-Q)]^T. \quad (3)$$

Por otro lado,  $\theta \in \mathbb{R}^n$  es el vector de parámetros desconocidos, y son el objetivo de estimación a partir de las mediciones ordenadas en el regresor. Así,  $\theta_k$  se define como

$$\theta_k = [a_1, a_2, \dots, a_P, b_0, b_1, \dots, b_Q]^T. \quad (4)$$

El problema de identificación resulta en que a partir de la información obtenida por las mediciones, se debe estimar al vector de parámetros  $\hat{\theta}$ , de tal manera que el modelo estimado sea bueno prediciendo, es decir, que el modelo estimado tenga el menor error de predicción posible (Ljung, 1998).

De lo anteriormente planteado, es conveniente definir al error de predicción  $\epsilon(k)$ , ya que se busca que el vector de parámetros estimados  $\hat{\theta}_k$  sea igual a los valores reales del vector de parámetros  $\theta_k$ . Así, se define al error de predicción como

$$\epsilon(k) = y(k) - \phi^T(k)\hat{\theta}_k. \quad (5)$$

La estimación del vector de parámetros  $\theta_k$  por medio de mínimos cuadrados busca minimizar la función de costo (Söderström and Stoica, 1989)

$$V(\theta_k) = \frac{1}{2} \epsilon^T(k)\epsilon(k). \quad (6)$$

Seguindo la definición anterior, el mínimo de la función de costos, se encuentra igualando con cero la primera derivada respecto a  $\hat{\theta}_k$ . Así, es claro que el vector de parámetros estimados está dado por

$$\hat{\theta}_k = [\phi(k)\phi^T(k)]^{-1} [\phi(k)y(k)]. \quad (7)$$

Finalmente, los parámetros estimados en (7) permiten obtener la salida estimada del sistema como  $\hat{y}(k) = \phi^T(k)\hat{\theta}_k$ .

Sin embargo, la estimación por mínimos cuadrados ordinarios en (7), conlleva un alto costo computacional ya que se debe calcular una inversa de la matriz y el vector de parámetros es calculado por un conjunto de datos. Lo anterior implica que la cantidad de memoria depende del número de datos y no se pueden tener variaciones de los parámetros al ir agregando mediciones (Mora, 1996).

Para subsanar la desventaja anterior, los mínimos cuadrados recursivos (RLS: *recursive least-squares*) son una alternativa eficiente para la estimación de parámetros, con la ventaja adicional de poder ser implementados en tiempo real (Mora, 1996).

Partiendo de la estimación por mínimos cuadrados ordinarios (7), es posible incluir información del sistema en el instante  $k+1$ , tanto en el vector de regresión, como en la salida. Así, la ecuación (7) se expresa como

$$\hat{\theta}_{k+1} = [\phi(k)\phi^T(k) + \phi(k+1)\phi^T(k+1)]^{-1} [\phi(k)y(k) + \phi(k+1)y(k+1)]. \quad (8)$$

La ecuación (8) es una expresión que puede ser calculada de forma recursiva. Por otro lado, se define a la matriz de covarianza como

$$P_k = [\phi(k)\phi^T(k)]^{-1}. \quad (9)$$

De la ecuación (9), es posible deducir que

$$P_{k+1} = [\phi(k+1)\phi^T(k+1)]^{-1}, \\ P_{k+1} = [P^{-1}(k) + \phi(k+1)\phi^T(k+1)]^{-1}. \quad (10)$$

De la expresión (10), haciendo uso del lema de inversión de matrices (Mora, 1996), se llega a la siguiente expresión

$$P_{k+1} = P_k - \frac{P_k\phi(k)\phi^T(k)P_k}{1 + \phi^T(k)P_k\phi(k)}. \quad (11)$$

Combinando las ecuaciones (8) y (9), se tiene entonces que

$$\hat{\theta}_{k+1} = P_{k+1}(\phi(k)y(k) + \phi(k+1)y(k+1)), \quad (12)$$

y al sustituir (11) en (12), resulta en

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k + P_{k+1}\phi(k)[y(k) - \phi^T(k)\hat{\theta}_k]. \quad (13)$$

Por simplicidad, es posible definir el término

$$K = P_{k+1}\phi(k), \quad (14)$$

conocido como ganancia de Kalman (Arrufat, 1990).

Así, la estimación del vector de parámetros mediante RLS, está dada por

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k + K\epsilon(k). \quad (15)$$

En conjunto, el algoritmo RLS está compuesto por las expresiones (5), (11), (14) y (15)

En el caso de un sistema lineal con parámetros variantes con el tiempo, es posible incluir un factor de peso llamado *factor de olvido*  $\lambda \in (0, 1]$  con el objetivo de que las mediciones nuevas tengan un peso mayor que las anteriores (Islam and Bernstein, 2019). Siguiendo esta idea, la función de costo para RLS con factor de olvido es

$$V(\theta_k) = \sum_{i=1}^k \lambda^{k-i} \epsilon^2(k). \quad (16)$$

Las ecuaciones (5), (15) y (14) en la implementación de los mínimos cuadrados recursivos con factor de olvido se mantienen sin cambios, modificándose únicamente la ecuación (11), la cual se actualiza como sigue

$$P_{k+1} = \frac{1}{\lambda} \left( P_k - \frac{P_k \phi(k) \phi^T(k) P_k}{\lambda + \phi^T(k) P_k \phi(k)} \right) \quad (17)$$

Por motivos prácticos, a lo largo del texto se hace referencia a la implementación del método de mínimos cuadrados recursivos con factor de olvido como *algoritmo RLS*.

### 3. LABORATORIO VIRTUAL

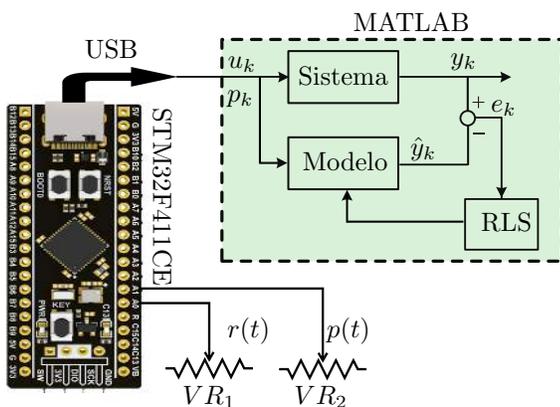


Fig. 1. Esquema general del laboratorio virtual.

El laboratorio virtual propuesto se muestra en la Figura 1, el cual está diseñado para que pueda ser fácilmente reproducible por el estudiante o instructor. El laboratorio está conformado por una tarjeta de desarrollo con base en el microcontrolador STM32F411CE de 32 bits, operando a una velocidad de reloj de 100 MHz. El microcontrolador se encarga de leer la señal de referencia  $r(t)$ , y la señal  $p(t)$  que permite modificar los parámetros del sistema dinámico. Ambas señales son digitalizadas con el convertidor analógico-digital del microcontrolador a una tasa de

muestreo de 10 kHz. Los datos adquiridos son enviados a través del puerto USB del microcontrolador hacia una computadora personal. Allí, el código de MATLAB es encargado de ajustar el valor de  $r(t)$  y  $p(t)$  para simular al sistema dinámico bajo estudio. En esta misma etapa, se implementa el algoritmo RLS para estimar los parámetros del modelo que debe aproximar al sistema dinámico.

Para una fácil reproducción del laboratorio virtual, las señales  $r(t)$  y  $p(t)$ , son utilizadas con el fin de variar parámetros del sistema, como entrada al mismo o simplemente realizar el seguimiento de la señal en tiempo real.

## 4. RESULTADOS

### 4.1 Estimación de una constante

Se inicia con un experimento cuyo objetivo es la estimación de una constante dada por la señal  $r(t)$ . Así, las ecuaciones (5), (14), (15) y (17) son escalares, debido a que se tiene un regresor lineal unitario, i.e.  $\phi = [1]$ .

En este caso la señal  $r(t)$  hace la función de la constante, donde el algoritmo RLS buscará seguirla con el mínimo error posible, incluso cuando se presentan cambios abruptos en el valor de  $r(t)$ .

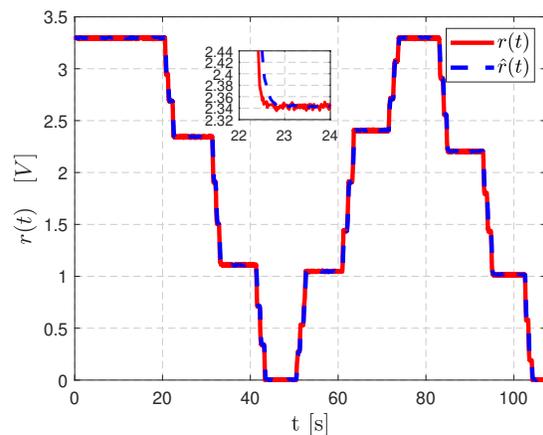


Fig. 2. Seguimiento del valor de  $r(t)$  en tiempo real mediante el algoritmo RLS.

En la Figura 2 se observa la evolución de la señal  $r(t)$  para distintos niveles en un intervalo de valores entre 0 y 3.3 V. Como se aprecia en la Figura 2, el valor estimado por el algoritmo RLS es capaz de seguir a la señal con una muy buena precisión y rapidez. La capacidad de seguimiento del algoritmo se puede apreciar de mejor manera en el intervalo de 22 a 24 segundos, mostrado en el cuadro interior de la la Figura 2. Allí, se observa que el algoritmo sigue adecuadamente a la señal durante el cambio y cuando se estabiliza, proporciona una estimación suave a pesar del error de cuantización presente.

Para cuantificar el error de la estimación se considera a la raíz del error cuadrático medio (RMSE: *Root Mean Squared Error*), definida como

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i(k) - \hat{x}_i(k))^2} \quad (18)$$

donde  $N$  es el número de datos,  $x_i$  son los valores reales y  $\hat{x}_i$  son los valores estimados.

Derivado del análisis de la estimación mostrado en la Figura 2, el RMSE de la señal estimada  $\hat{r}(t)$  es  $7.23 \times 10^{-5}$  [V], lo que indica que el error de estimación tiende a cero exponencialmente. Así, este resultado demuestra el funcionamiento del algoritmo RLS para seguir a la señal de referencia  $r(t)$  con convergencia exponencial.

#### 4.2 Estimación de parámetros fijos

Como segundo ejercicio, se propone un sistema dinámico bien conocido para fines de aprendizaje. Este es un sistema masa-resorte-amortiguador cuyo modelo en tiempo continuo está dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -b/m \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u(t) \\ y &= [1 \quad 0]x(t) \end{aligned} \quad (19)$$

donde los parámetros físicos del modelo son la constante del resorte  $k$ , el coeficiente de fricción viscosa  $b$  y la masa  $m$ . La entrada del sistema es  $u(t)$ , mientras que  $x(t)$  es la posición y  $\dot{x}(t)$  es la velocidad.

Al discretizar el modelo (19), es posible obtener un modelo polinomial con estructura ARMA (*AutoRegressive Moving Average*) de la forma

$$\begin{aligned} y(k) &= b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) \\ &\quad - a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) \end{aligned} \quad (20)$$

donde los parámetros de la ecuación en diferencias son obtenidos a partir del vector de parámetros  $\hat{\theta}_k$  definido en la ecuación (15).

El algoritmo RLS busca estimar los cinco parámetros presentados en el modelo ARMA (20) a partir de muestras obtenidas en tiempo real de la entrada y la salida. Las muestras de la entrada se simulan mediante la señal  $r(t)$ , mientras que las de la salida se obtienen a partir del modelo dinámico del sistema utilizando MATLAB.

La Figura 3 muestra el resultado de la estimación de los parámetros del modelo en tiempo discreto, los cuales siguen de manera consistente a los parámetros originales. Como se observa en la Figura 3, el algoritmo RLS proporciona estimaciones estables, aunque pueda parecer que los coeficientes  $b_j$  no lo son. Sin embargo, al verificar la escala, se aprecia que éstos varían de manera despreciable en un intervalo sumamente pequeño, lo que demuestra la robustez de este algoritmo. Esto se aprecia en los coeficientes  $a_i$ , donde, aunque el parámetro es fijo, el error de cuantización está presente debido a que el parámetro físico  $b$  es simulado mediante la señal  $p(t)$ , la cual pasa por un proceso de discretización. Como resultado, ante variaciones en los datos, el algoritmo proporciona estimaciones con convergencia exponencial

Lo anterior puede confirmarse en la Figura 4, donde la salida estimada  $\hat{x}(t)$ , sigue a la señal real  $x(t)$ . Dentro de

la figura, se gráfica la señal de error (5), el cual tiende a cero exponencialmente. Dado que el error depende directamente de los parámetros estimados, y este tiende a cero con el tiempo, se puede inferir que la estimación fue realizada de manera adecuada. Cuantitativamente, el error RMSE de  $\hat{x}(t)$  es igual a  $1.651 \times 10^{-6}$  [m], lo que confirma la convergencia de la estimación.

Por otro lado, en el cuadro interior de la Figura 4, se muestra la gráfica del error. Aunque el error es pequeño en todo momento, con el transcurso del tiempo tiende a cero, lo que confirma la propiedad de convergencia exponencial (Johnstone et al., 1982). No obstante, alcanza relativamente rápido a los valores nominales (esto se puede ver de mejor manera en la estimación de parámetros variantes en el tiempo), lo que demuestra la eficiencia de este algoritmo al implementarse en tiempo real.

El siguiente paso es estimar los parámetros físicos del sistema a partir de los parámetros estimados del modelo en tiempo discreto. Para poder simular la señal de salida  $x(t)$ , el modelo en tiempo continuo se discretiza mediante el método de el retenedor de orden cero (Ogata, 2002). Tras la manipulación algebraica de la función de transferencia del sistema en el dominio  $\mathcal{Z}$ , se tiene que el coeficiente de fricción viscosa  $b$  está relacionado con el coeficiente  $a_2$  de la siguiente manera

$$b = -\frac{m \cdot \ln(a_2)}{T_s} \quad (21)$$

donde  $T_s$  es el tiempo de muestreo.

Por lo tanto, es posible estimar el parámetro físico  $b$  a través del parámetro en tiempo discreto  $a_2$  obtenido mediante el algoritmo RLS. Dicha estimación se muestra en la Figura 5, donde se observa que la estimación con RLS provee una estimación suave del parámetro físico. El RMSE es de  $9.754 \times 10^{-4}$   $\left[\frac{N \cdot s}{m}\right]$ , lo cual representa un error aceptable para la demostrar la versatilidad del algoritmo RLS en un sistema dinámico didáctico.

Finalmente, es importante mencionar que la estimación del coeficiente de fricción viscosa a partir de la ecuación (21) es más simple de implementar, en comparación con el uso de funciones de alto nivel en MATLAB para la conversión de tiempo discreto a tiempo continuo. Así, esta implementación demuestra un desempeño adecuado para aplicaciones en tiempo real.

#### 4.3 Estimación de parámetros variantes con el tiempo

Como tercer experimento, se plantea la estimación de parámetros variantes del sistema dinámico. Para ello, los niveles del cuantización de la salida del ADC se convierten de forma conveniente en un intervalo de valores para el coeficiente de fricción viscosa. De esta manera al variar la señal  $p(t)$ , el parámetro físico  $b$  cambia proporcionalmente, modificando así la dinámica del sistema. Debido a los cambios en la dinámica, los coeficientes del modelo ARMA varían de manera proporcional. Esto, permite estimar el parámetro físico variante en el tiempo a través

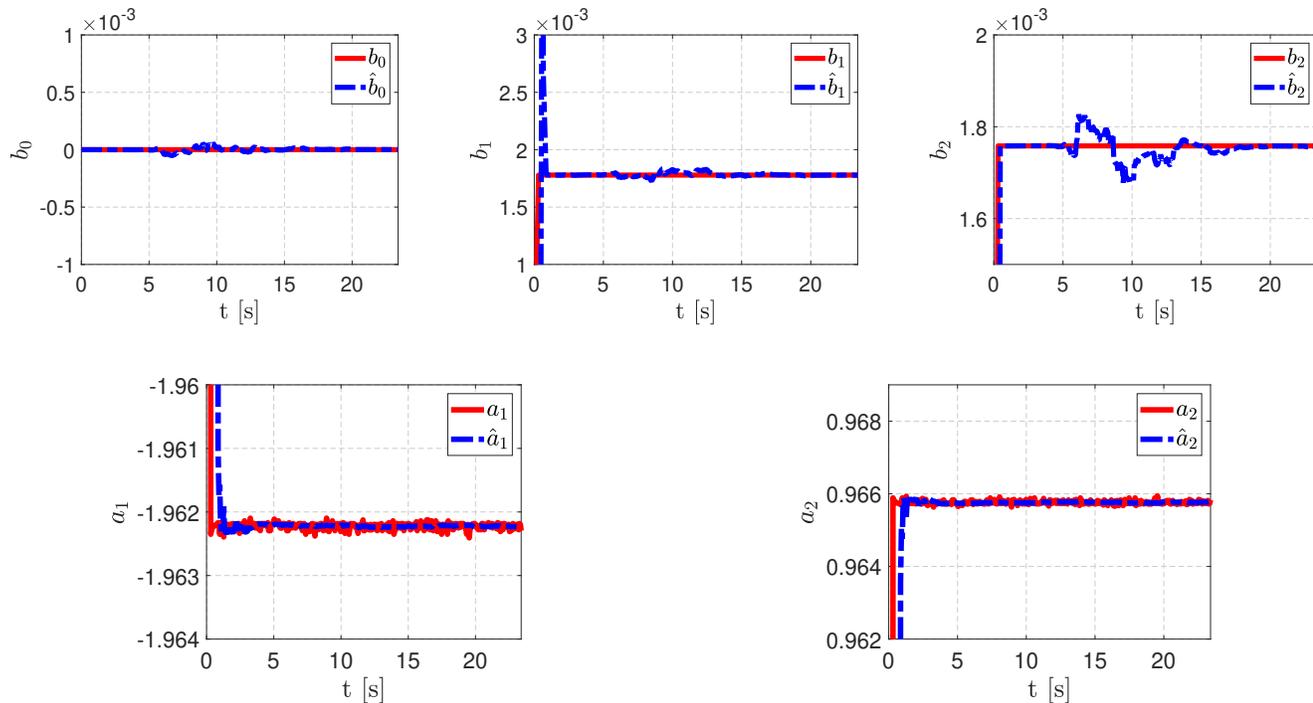


Fig. 3. Parámetros estimados del sistema en tiempo discreto mediante el algoritmo RLS para el sistema dinámico de parámetros fijos.

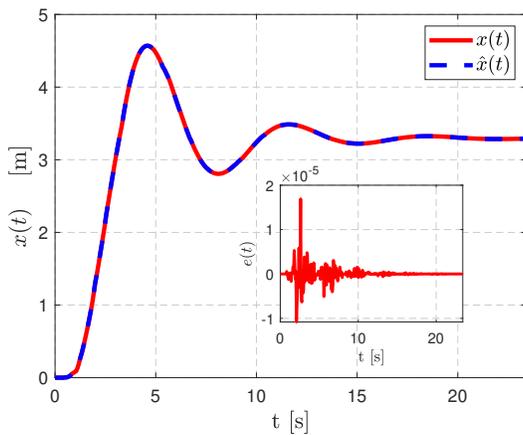


Fig. 4. Comparación entre la señal de salida estimada  $\hat{x}(t)$  utilizando el algoritmo RLS y la señal real  $x(t)$  obtenida con MATLAB.

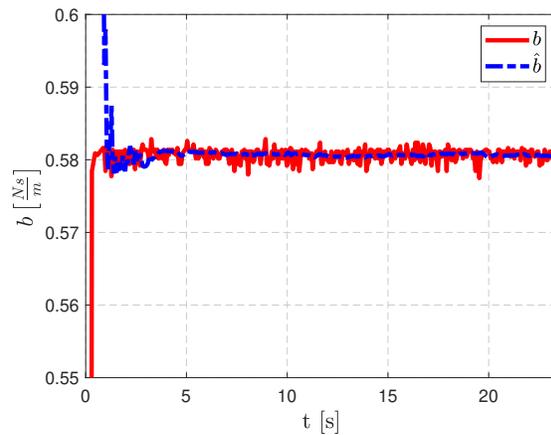


Fig. 5. Comparación del coeficiente de fricción viscosa  $b$  y su estimación  $\hat{b}$  obtenida a partir del parámetro  $a_2$  del vector de parámetros estimados  $\hat{\theta}_k$ .

de los parámetros en tiempo discreto estimados por el algoritmo RLS.

Las Figuras 6 y 7 muestran los cambios en los coeficientes  $a_1$  y  $a_2$  del modelo ARMA. Dicho parámetros muestran un cambio significativo en respuesta a las variaciones físicas del parámetro  $b$  del sistema. Como resultado, las Figuras 6 y 7 permiten apreciar el desempeño adecuado del algoritmo RLS en respuesta a los cambios en los parámetros, y la relación entre éstos.

Al realizar la estimación en tiempo real del parámetro físico  $b$  se obtiene la gráfica presentada en la Figura 8. En ella se aprecia que existe una respuesta rápida y

una buena estimación por parte del algoritmo RLS ante parámetros que varían con el tiempo. Con la métrica dada por la ecuación (18), la raíz del error cuadrático medio del coeficiente de fricción viscosa estimado,  $\hat{b}$ , es de  $0.0043 \left[ \frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}} \right]$ , lo que garantiza indicando una correcta estimación dada por la convergencia exponencial del algoritmo.

Estos resultados destacan la robustez del algoritmo RLS, ya que permite determinar con precisión el valor de parámetros físicos del sistema a partir de mediciones entrada-salida, incluso cuando estos son variantes en el tiempo.

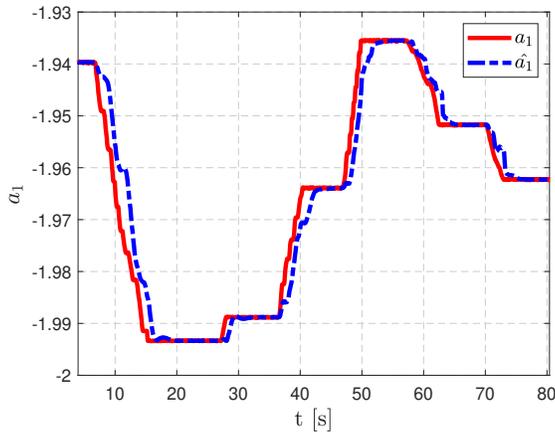


Fig. 6. Estimación del parámetro  $a_1$  debido a la variación de  $b$  mediante el algoritmo RLS en tiempo real.

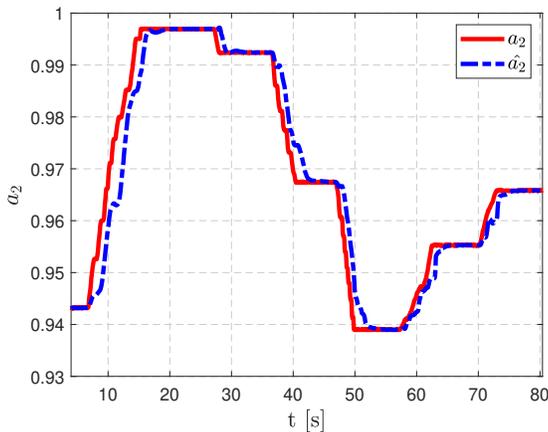


Fig. 7. Estimación del parámetro  $a_2$  debido a la variación de  $b$  mediante el algoritmo RLS en tiempo real.

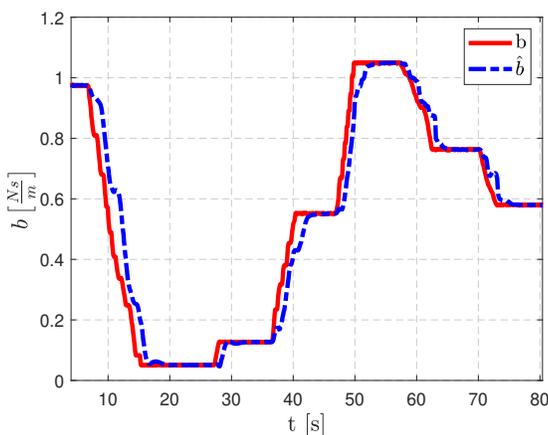


Fig. 8. Comparación de la variación del parámetro físico  $b$  con la estimación del parámetro  $\hat{b}$  a partir del algoritmo RLS.

## 5. CONCLUSIONES

A través de esta herramienta didáctica, los estudiantes pueden apreciar cómo los mínimos cuadrados recur-

sivos (RLS: Recursive Least-Squares) se destacan como una poderosa herramienta en la identificación de sistemas dinámicos. El desarrollo de este laboratorio virtual, está pensado de tal manera que pueda ser reproducible con material accesible y fácil construcción, mientras que la parte del software, permite al estudiante variar parámetros del sistema de forma sencilla. Por lo anterior, y de acuerdo con los resultados presentados, el laboratorio virtual es un nuevo enfoque en la enseñanza de la estimación paramétrica y su implementación en diferentes áreas de estudio. La robustez del método permite estimar con precisión los parámetros del sistema bajo estudio, incluso en presencia de ruido de medición y variación de los parámetros. Este laboratorio virtual puede ser utilizado como una herramienta versátil en diversos proyectos relacionados con el control automático y la identificación de sistemas dinámicos.

## REFERENCES

- Arrufat, J.L. (1990). Mínimos cuadrados recursivos. *Económica*, XXXVI.
- Galrinho, M. (2016). *Least Squares Methods for System Identification of Structured Models*. Licentiate thesis, KTH School of Electrical Engineering, Automatic Control Lab, SE-100 44 Stockholm, Sweden.
- Islam, S.A.U. and Bernstein, D.S. (2019). Recursive least squares for real-time implementation. *IEEE Control Systems Magazine*.
- Johnstone, R.M., Richard Johnson, C., Bitmead, R.R., and Anderson, B.D. (1982). Exponential convergence of recursive least squares with exponential forgetting factor. *Systems & Control Letters*, 2(2), 77–82.
- Juang, J. (1994). *Applied System Identification*. Prentice-Hall.
- Kamali, C., Pashilkar, A., and Raol, J. (2011). Evaluation of recursive least squares algorithm for parameter estimation in aircraft real time applications. *Aerospace Science and Technology*, 15(3), 165–174.
- Ljung, L. (1998). *System Identification: Theory for the User*. Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, USA, second edition.
- Mora, B.P.Z. (1996). Identificación paramétrica discreta.
- Ogata, K. (2002). *Sistemas de Control en Tiempo Discreto*. Prentice Hall, 2nd edition.
- Pintelon, R. and Schoukens, J. (2012). *System Identification: A Frequency Domain Approach*. IEE Press. John Wiley & Sons, Inc., second edition.
- Ramírez-Chavarría, R.G., Müller, M.I., Mattila, R., Quintana-Carapia, G., and Sánchez-Pérez, C. (2019). A framework for high-resolution frequency response measurement and parameter estimation in microscale impedance applications. *Measurement*, 148, 106913.
- Söderström, T. and Stoica, P. (1989). *System Identification*. Prentice Hall.
- Sun, F. and Xiong, R. (2015). A novel dual-scale cell state-of-charge estimation approach for series-connected battery pack used in electric vehicles. *Journal of Power Sources*, 274, 582–594.
- Verhaegen, M. and Verdult, V. (2007). *Filtering and System Identification: A Least-Squares Approach*. Cambridge University Press.