

Reduced Order Interval Observer for Linear Discrete-Time Systems with $2n$ states and n outputs

Fernando López-Caamal* Jesús David Avilés**

* *Departamento de Ingeniería Química, Universidad de Guanajuato, Noria Alta, C.P. 36050, Guanajuato, México*

** *Facultad de Ciencias de la Ingeniería, Administrativas y Sociales, Universidad Autónoma de Baja California, Blvd. Universidad No. 1, San Fernando, C.P. 21460, Tecate B.C., México*

Resumen In this paper we design a reduced order interval observer for the unmeasured variables of a particular class of discrete-time linear system. By ensuring the cooperativity and convergence properties applied to the estimation error, the observer provides an upper and a lower estimate, despite the presence of unknown, bounded inputs and perturbations. The class of systems is composed of systems with $2n$ states and n linearly independent measurements. A numerical simulation shows applicability of the results.

Keywords: Reduced Observer, Interval Observer, Linear System, Discrete-Time

1. INTRODUCCIÓN

Los observadores por intervalos son aquellos que se caracterizan por otorgar una estimación superior, y otra inferior, de la trayectoria del estado a partir de un ordenamiento parcial adecuado en las entradas y en las condiciones iniciales (Gouze et al., 2000; Mazenc et al., 2013; Efimov et al., 2013c; Avilés and Moreno, 2014). En general, si existe presencia de perturbaciones/incertidumbres, las estimaciones del observador por intervalo entregan valores alrededor del estado en el régimen permanente, y además acotan por encima y por debajo a la trayectoria del mismo estado; cuando es bien conocido el modelo del sistema, y no existe presencia de variaciones de parámetros y perturbaciones, entonces las estimaciones superior e inferior alcanzan valores reales del estado, y estos valores están contenidos en el intervalo generado entre las estimaciones superior e inferior. Tales características de estos observadores están sustentadas en la propiedad de los sistemas cooperativos, los cuales son una subclase de los sistemas monótonos (Angeli and Sontag, 2003; Avilés and Moreno, 2014). De esta manera, los observadores por intervalos proporcionan un esquema robusto para tratar sistemas con perturbaciones e incertidumbre de parámetros.

En la literatura, los observadores por intervalo se han aplicado con éxito a diversas clases de sistemas en tiempo continuo, como ejemplo los métodos propuestos en Gouze et al. (2000); Alcaraz-Gonzalez et al. (2002); Mazenc and

Bernard (2011); Bernard and Gouze (2004); Moisan et al. (2009); Khan et al. (2021); Avilés and Moreno (2014).

Impulsados por el uso de algoritmos computacionales, se han diseñado observadores por intervalo para algunas clases de sistemas en tiempo discreto, así como en los sistemas muestreados, donde la propiedad de cooperatividad persiste al aplicar métodos de discretización (Hirsch et al., 2005). Por ejemplo, Efimov et al. (2013b) establece el diseño de observadores por intervalo para sistemas discretos con invariancia en el tiempo, utilizando un cambio de coordenadas para garantizar simultáneamente la propiedad de convergencia y cooperatividad. Esta idea es extendida a sistemas con variancia en el tiempo discreto (Efimov et al., 2013a). Mazenc et al. (2014) también presenta un diseño para sistemas no-negativos discretos con una transformación variante en el tiempo. Adicionalmente, fue presentada una metodología de diseño de observadores intervalo en Avilés and Moreno (2020) para una clase de sistemas no lineales discretos con perturbaciones/incertidumbres, satisfaciendo las condiciones de disipatividad y cooperatividad.

Motivados por el desarrollo de observadores intervalo en tiempo discreto, este trabajo extiende el diseño original de López-Caamal and Avilés (2023) a la clase de sistemas lineales de tiempo discreto de dimensión $2n$, considerando n mediciones del estado. Basado en un observador de estados tipo Luenberger que integra las cotas superior e inferior de las variaciones de perturbaciones/incertidumbres, se diseña un observador por intervalos tal que los errores de estimación resultantes satisfacen las propiedades sistémicas de cooperatividad y

¹ F.L.-C. agradece el financiamiento otorgado por medio del proyecto 51.2024 de la CIIC 2024 de la Universidad de Guanajuato.

estabilidad (entrada-estado) práctica. Las condiciones de diseño son sintetizadas en una matriz Schur para el caso de estabilidad práctica y una matriz no-negativa para la condición de cooperatividad. El método presentado utiliza una ganancia matricial del observador para asegurar que ambas condiciones se cumplan simultáneamente. Por tanto, se tiene un ordenamiento parcial entre las estimaciones (superior e inferior) y la trayectoria real del estado, y las estimaciones alcanzan valores cercanos a sus valores reales del estado cuando existen presencia de términos inciertos.

La organización del trabajo está dada como sigue. En la Sección 2 se presentan los antecedentes teóricos, mientras que el diseño del observador intervalo toma lugar en la Sección 3. Simulaciones numéricas se muestran en la Sección 4. Finalmente, se otorgan las conclusiones de este trabajo en la Sección 5.

2. ANTECEDENTE TEÓRICOS

2.1 Notación

El símbolo \succeq representa el ordenamiento parcial para un par de vectores $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$; es decir si $x_i \geq z_i$, $\forall i = 1, \dots, n$ entonces $\mathbf{x} \succeq \mathbf{z}$. Asimismo, es válido para el caso matricial, $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$, si $A_{ij} \geq B_{ij}$ entonces $\mathbf{A} \succeq \mathbf{B}$.

En particular, si las componentes de un vector son completamente mayores o iguales que cero, i.e. $x_i \geq 0$, $\forall i = 1, \dots, n$, el vector \mathbf{x} es dicho ser no-negativo, y se denota como $\mathbf{x} \succeq \mathbf{0}$. Esta denotación es equivalente cuando el vector \mathbf{x} pertenece al espacio dimensional $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$. Una matriz no-negativa $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es expresada como $\mathbf{A} \succeq \mathbf{0}$, si $A_{ij} \geq 0$ con $1 \leq \{i, j\} \leq n$. Cabe mencionar que el símbolo anterior (\succeq) no debe ser confundido con el utilizado para denotar una matriz definida positiva \mathbf{P} (resp. semi-definida positiva), el cual está dado por $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ (resp. $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T \geq 0$). Una matriz cuadrada $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se denomina como una matriz Schur, si todos sus eigenvalores se encuentran dentro del círculo unirario; es decir $\max |\lambda_i(\mathbf{A})| < 1$.

A lo largo del documento, utilizaremos un paso de muestreo constante, τ . Para denotar la dependencia del tiempo de la señal $\mathbf{x}(t)$ definimos $\mathbf{x}[k] := \mathbf{x}(k\tau)$, $\forall k = 1, \dots, n$.

2.2 Sistemas cooperativos en tiempo discreto

Los sistemas cooperativos aseguran el ordenamiento parcial entre las trayectorias del estado y de la salida para cualquier instante de tiempo, si existe un ordenamiento parcial en entradas y en las condiciones iniciales. Esta idea se establece en la siguiente definición.

Definición 1. Considere el sistema lineal en tiempo discreto

$$\Gamma_{\mathbf{L}} : \begin{cases} \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}\mathbf{u}[k], \\ \mathbf{y}[k] = \mathbf{C}\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}\mathbf{u}[k], \end{cases} \quad (1)$$

donde $(\mathbf{x}[k], \mathbf{u}[k], \mathbf{y}[k]) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ es el estado, la entrada y la salida de $\Gamma_{\mathbf{L}}$, respectivamente, para cada instante de tiempo $k \in \mathbb{N}$.

$\Gamma_{\mathbf{L}}$ es dicho ser un *sistema cooperativo*, si un ordenamiento parcial en las condiciones iniciales y entradas

$$\mathbf{x}_{k_0}^1 \succeq \mathbf{x}_{k_0}^2, \quad \mathbf{u}^1[k] \succeq \mathbf{u}^2[k], \quad \forall k.$$

es satisfecho, entonces persiste el ordenamiento parcial en las trayectorias del estado y de salida:

$$\mathbf{x}(k, k_0, x_0^1, u^1[k]) \succeq \mathbf{x}(k, k_0, x_0^2, u^2[k]), \quad \forall k \geq k_0,$$

$$\mathbf{y}(k, k_0, x_0^1, u^1[k]) \succeq \mathbf{y}(k, k_0, x_0^2, u^2[k]), \quad \forall k \geq k_0,$$

donde $k_0 \in \mathbb{N}$, $x_{k_0} \in \mathbb{R}^n$.

Es importante mencionar que la propiedad de cooperatividad persiste en los sistemas en tiempo discreto. Aunque, su caracterización presenta diferencias con respecto a los resultados en tiempo continuo. La caracterización de un sistema discreto lineal cooperativo está dado en el siguiente párrafo.

Proposición 2. (Hirsch et al., 2005) El sistema $\Gamma_{\mathbf{L}}$ es un *sistema cooperativo* si y sólo si,

$$(i). \mathbf{A} \succeq 0, \quad (ii). \mathbf{B} \succeq 0, \quad (iii). \mathbf{C} \succeq 0 \quad (iv). \mathbf{D} \succeq 0.$$

En el siguiente párrafo se establecen las condiciones de estabilidad del sistema $\Gamma_{\mathbf{L}}$.

Definición 1. (Farina and Rinaldi, 2000) El Sistema $\Gamma_{\mathbf{L}}$ en (1) es asintóticamente estable si $\max |\lambda_i| < 1$, donde $|\lambda_i|$ es el módulo del i -ésimo eigenvalor de \mathbf{A} .

2.3 Observador por intervalos

Definición 3. (Avilés and Moreno, 2020) Sea el sistema no-lineal,

$$\Gamma_{\mathbf{NL}} : \begin{cases} \mathbf{x}[k+1] = \mathcal{F}(k, \mathbf{x}[k], \mathbf{u}[k], \mathbf{v}[k]), \quad \mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_{k_0}, \\ \mathbf{y}[k] = \mathcal{H}(\mathbf{x}[k], \mathbf{u}[k]), \end{cases} \quad (2)$$

donde $\mathbf{x}[k] \in \mathbb{R}^n$ es el estado, $\mathbf{u}[k] \in \mathbb{R}^m$ es la entrada, $\mathbf{v}[k] \in \mathbb{R}^l$ representa la perturbación en el sistema, y $\mathbf{y}[k] \in \mathbb{R}^p$ representa las mediciones. \mathcal{F} y \mathcal{H} son funciones continuas. Asumimos que la perturbación $\mathbf{v}[k]$ satisface la siguiente desigualdad por intervalos,

$$\mathbf{v}^+[k] \succeq \mathbf{v}[k] \succeq \mathbf{v}^-[k], \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (3)$$

donde $\mathbf{v}^+[k]$ y $\mathbf{v}^-[k]$ son las cotas de la perturbación, y el estado inicial $k_0 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_{k_0} \in \mathbb{R}^n$ satisface la desigualdad subsecuente

$$\mathbf{x}_{k_0}^+ \succeq \mathbf{x}_{k_0} \succeq \mathbf{x}_{k_0}^-, \quad (4)$$

donde $\mathbf{x}_{k_0}^+$ y $\mathbf{x}_{k_0}^-$ son las cotas del estado inicial. El sistema dinámico descrito por la forma,

$$\Omega : \begin{cases} \xi[k+1] = \mathcal{G}(k, \xi[k], \mathbf{u}[k], \mathbf{v}^-[k], \mathbf{v}^+[k]), \quad \xi(k_0) = \xi_{k_0}, \\ \hat{\mathbf{x}}[k] = \mathcal{E}(k, \xi[k], \mathbf{u}[k], \mathbf{v}^-[k], \mathbf{v}^+[k]), \end{cases} \quad (5)$$

donde $\xi[k] \in \mathbb{R}^{n_0}$ es el estado estimado y $\xi_{k_0} = \mathbf{g}(0, \mathbf{x}_{k_0}^-, \mathbf{x}_{k_0}^+)$ es la condición inicial, es un *Observador que Preserva el Orden Parcial Superior (Inferior)* para el sistema (2) si

- (i). para alguna solución $(\mathbf{x}[k], \boldsymbol{\xi})$ de (2-5) con $\mathbf{v}^- = \mathbf{v} = \mathbf{v}^+, \forall k \in \mathbb{N}$ se tiene que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\mathbf{x}}[k] - \mathbf{x}[k]\| = 0$.
- (ii). para los vectores $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0^-, \mathbf{x}_0^+ \in \mathbb{R}^n$, y alguna perturbación \mathbf{v} , las soluciones satisfacen la desigualdad $k \geq k_0$

$$\hat{\mathbf{x}}[k] \succeq \mathbf{x}[k] \quad (\mathbf{x}[k] \succeq \hat{\mathbf{x}}[k]).$$

Además, si el observador (5) es ejecutado por un par de veces simultáneamente, y sus ecuaciones de salida son expresadas como

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^+[k] &= \mathcal{E}^+(k, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{u}, \mathbf{v}^-, \mathbf{v}^+), \\ \hat{\mathbf{x}}^-[k] &= \mathcal{E}^-(k, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{u}, \mathbf{v}^-, \mathbf{v}^+), \end{aligned} \quad (6)$$

y satisfacen que

1. Alguna solución $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ de (2-5) con $\mathbf{v}^- = \mathbf{v} = \mathbf{v}^+, \forall k \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{\mathbf{x}}[k] - \mathbf{x}[k]\| = 0$.
2. Para los vectores $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0^-, \mathbf{x}_0^+ \in \mathbb{R}^n$ y alguna perturbación \mathbf{v} , las soluciones satisfacen para todo $k \geq k_0$ con la siguiente desigualdad

$$\hat{\mathbf{x}}^+[k] \succeq \mathbf{x}[k] \succeq \hat{\mathbf{x}}^-[k], \quad (7)$$

entonces, son llamados un *Observador Intervalo* para el sistema (2).

Nota 4. Es claro que podemos construir un observador intervalo para sistemas con incertidumbre/perturbaciones ($\mathbf{v}^+[k] \neq \mathbf{v}[k] \neq \mathbf{v}^-[k] \neq \mathbf{0}$), usando dos observadores: un observador que preserve el orden parcial superior e inferior, que satisfice la desigualdad (7), y además sus estimaciones convergen de forma práctica a sus valores verdaderos, es decir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\mathbf{x}}^+[k] - \hat{\mathbf{x}}^-[k]\| < c, \text{ para alguna } c \in \mathbb{R}_+.$$

3. OBSERVADOR INTERVALO PARA SISTEMAS LINEALES DE DIMENSIÓN 2N

En esta sección, se proporciona el diseño de un observador intervalo para la clase de sistemas lineales de dimensión $2n$ en tiempo discreto, tomando las primeras n mediciones.

3.1 Clase de sistemas lineales considerados

Considere el siguiente sistema dinámico

$$\Sigma_S : \begin{cases} \mathbf{x}_1[k+1] = \mathbf{x}_2[k], \\ \mathbf{x}_2[k+1] = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_1[k] + \mathbf{A}_4 \mathbf{x}_2[k] + \mathbf{B} \mathbf{u}[k] + \mathbf{D} \mathbf{v}[k], \\ \mathbf{y}[k] = \mathbf{x}_1[k], \end{cases} \quad (8)$$

donde $\mathbf{x}_i[\cdot] : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n, i = 1, 2$ son los estados del sistema Σ_S en (8), $\mathbf{u}[\cdot] : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^p$ es la entrada de control y $\mathbf{v}[\cdot] : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^q$ representa entradas desconocidas. Además, $\mathbf{x}_1[k]$ representa las variables medidas. Las matrices $\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4, \mathbf{B}, \mathbf{D} \succeq \mathbf{0}$, son de dimensiones apropiadas.

Consideramos las siguientes suposiciones para el sistema Σ_S en (8).

Suposición 1. Las condiciones iniciales $\mathbf{x}_i, i = 1, 2$ están acotadas:

$$\mathbf{x}_i^+[0] \succeq \mathbf{x}_i[0] \succeq \mathbf{x}_i^-[0], \quad (9)$$

donde $\mathbf{x}_i^+[0]$ y $\mathbf{x}_i^-[0]$ son las conocidas.

Suposición 2. La entrada de control $\mathbf{u}[k]$, también está acotada por intervalos; es decir

$$\mathbf{u}^+[k] \succeq \mathbf{u}[k] \succeq \mathbf{u}^-[k], \quad (10)$$

donde $\mathbf{u}^+[k]$ y $\mathbf{u}^-[k]$ son funciones conocidas. Además, el término de incertidumbre/perturbación, dado por $\mathbf{v}[k]$ está acotada por la siguiente desigualdad,

$$\mathbf{v}^+[k] \succeq \mathbf{v}[k] \succeq \mathbf{v}^-[k], \quad (11)$$

donde $\mathbf{v}^+[k]$ y $\mathbf{v}^-[k]$ son conocidas.

En la siguiente sección, diseñaremos un observador de los estados $\mathbf{x}_2[k]$ únicamente.

3.2 Diseño del observador intervalo

Para el diseño del observador intervalo para $\mathbf{x}_2[k]$ en (8), consideremos

$$\Sigma_{O^+} : \begin{cases} \mathbf{w}_2^+[k+1] = (\mathbf{A}_4 - \mathbf{H}) \mathbf{w}_2^+[k] + (\mathbf{A}_2 + (\mathbf{A}_4 - \mathbf{H}) \mathbf{H}) \mathbf{x}_1[k] + \mathbf{B} \mathbf{u}^+[k] + \mathbf{D} \mathbf{v}^+[k] \\ \mathbf{x}_2^+[k] = \mathbf{w}_2^+[k] + \mathbf{H} \mathbf{x}_1[k] \end{cases} \quad (12)$$

$$\Sigma_{O^-} : \begin{cases} \mathbf{w}_2^-[k+1] = (\mathbf{A}_4 - \mathbf{H}) \mathbf{w}_2^-[k] + (\mathbf{A}_2 + (\mathbf{A}_4 - \mathbf{H}) \mathbf{H}) \mathbf{x}_1[k] + \mathbf{B} \mathbf{u}^-[k] + \mathbf{D} \mathbf{v}^-[k] \\ \mathbf{x}_2^-[k] = \mathbf{w}_2^-[k] + \mathbf{H} \mathbf{x}_1[k] \end{cases} \quad (13)$$

donde \mathbf{w}_2^\pm , son los estados de observador ($\Sigma_{O^+}, \Sigma_{O^-}$). y $\hat{\mathbf{x}}_2^\pm$ representa la estimación de $\mathbf{x}_2[k]$ de Σ_S en (8). La matriz $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la ganancia matricial que se debe diseñar para asegurar la convergencia y ordenamiento parcial de las estimaciones del observador intervalo con respecto a la trayectoria del estado del sistema.

En el siguiente Teorema se presentan las condiciones de diseño de un observador intervalo para el sistema Σ_S .

Teorema 1. Los sistemas ($\Sigma_{O^+}, \Sigma_{O^-}$) componen un *Observador Intervalo* para $\mathbf{x}_2[k]$ de Σ_S en (8), cuando la matriz $\mathbf{A}_4 - \mathbf{H}$ es Schur y tiene todos sus elementos positivos.

Demostración 1. En esta prueba, consideraremos el estimado para $\mathbf{x}_2^+[k]$. La prueba para el estimador inferior, es similar. Considere la siguiente ecuación en diferencias

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_2^+[k+1] &= \mathbf{A}_4 \hat{\mathbf{x}}_2^+[k] + \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_1[k] - \mathbf{H} (\hat{\mathbf{x}}_2^+[k] - \mathbf{x}_2[k]) \\ &\quad + \mathbf{B} \mathbf{u}^+[k] + \mathbf{D} \mathbf{v}^+[k]. \end{aligned} \quad (14)$$

El error de estimación $\mathbf{e}_2[k] := \hat{\mathbf{x}}_2^+[k] - \mathbf{x}_2[k]$ satisface

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_2[k+1] &= (\mathbf{A}_4 - \mathbf{H}) \mathbf{e}_2[k] + \mathbf{B} \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{D} \bar{\mathbf{v}} \\ &\preceq (\mathbf{A}_4 - \mathbf{H}) \mathbf{e}_2[0], \end{aligned}$$

donde $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v}^+ - \mathbf{v}$. La dinámica del error es un sistema cooperativo, si la matriz $(\mathbf{A}_4 - \mathbf{H})$ es Schur y con elementos positivos.

Para mostrar estabilidad, consideramos la función candidata de Lyapunov,

$$V[k] = \mathbf{e}_2[k]^\top \mathbf{P} \mathbf{e}_2[k],$$

donde $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\top > 0$.

Al definir $\mathbf{Q} = \mathbf{P} - (\mathbf{A}_4 - \mathbf{H})^\top \mathbf{P} (\mathbf{A}_4 - \mathbf{H})$, la diferencia de la función candidata de Lyapunov $\Delta V[k] \triangleq V[k+1] - V[k]$ está dada por:

$$\begin{aligned} \Delta V[k] &= -\mathbf{e}_2^\top \mathbf{Q} \mathbf{e}_2 + 2(\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\bar{\mathbf{v}})^\top \mathbf{P} (\mathbf{A}_4 - \mathbf{H}) \mathbf{e}_2 \\ &\quad + (\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\bar{\mathbf{v}})^\top \mathbf{P} (\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\bar{\mathbf{v}}) \\ &\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \|\mathbf{e}_2\|_2^2 + \|\mathbf{P}\|_2 \|\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\bar{\mathbf{v}}\|_2^2 \\ &\quad + 2\|\mathbf{A}_4 - \mathbf{H}\|_2 \|\mathbf{P}\|_2 \|\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\bar{\mathbf{v}}\|_2 \|\mathbf{e}_2\|_2, \end{aligned}$$

que es negativa para $\|\mathbf{e}_2[k]\|_2$ suficientemente grande.

Para evitar el uso del estado desconocido $\mathbf{x}_2[k]$ en (14), se puede observar que $\mathbf{x}_2[k] = \mathbf{x}_1[k+1]$ de la (8). De manera que al definir $\mathbf{w}_2^+[k] := \mathbf{x}_2[k]^+ - \mathbf{H}\mathbf{x}_1[k]$, la Ecuación (14) puede ser escrita como la Ecuación (12), que es independiente de $\mathbf{x}_2[k]$. \square

Por favor, note que siempre es posible elegir una matriz \mathbf{H} tal que $\mathbf{A}_4 - \mathbf{H}$ sea Schur, dado que se supone conocida la matriz \mathbf{A}_4 .

4. SIMULACIONES NUMÉRICAS

En esta sección, consideramos el siguiente modelo

$$\begin{pmatrix} z_1[k+1] \\ z_2[k+1] \\ z_3[k+1] \\ z_4[k+1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.1 & 0.2 & 0 & -0.7 \\ -0.1 & 0.6 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1[k] \\ z_2[k] \\ z_3[k] \\ z_4[k] \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0.2 \end{pmatrix} u[k] + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} v[k],$$

$$\mathbf{y} = (z_1 \ z_2)^\top.$$

La entrada y la perturbación que consideramos se muestra en la Figura 1. Para los observadores (Σ_{O+} , Σ_{O-}) en (12)-(13) seleccionamos las siguientes ganancias:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & -0.7 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.05 & 0.01 \\ 0.01 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

La Figura 2 muestra los estados estimados y reales. En color amarillo, se encuentra la estimación superior de los estados, mientras que en color rojo, la inferior. Como se puede observar de las Figuras 2 y 3 el error de estimación no cambia de signo.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se proporcionó un método de diseño de un observador por intervalos para la clase de sistemas lineales de dimensión $2n$. A partir del sistema de error de estimación, una ganancia puede ser seleccionada de forma arbitraria tal que se garantice que sea cooperativo y estable de forma práctica. Simulaciones numéricas son desarrolladas para mostrar la efectividad del método propuesto.

REFERENCIAS

- Alcaraz-Gonzalez, V., Harmand, J., Rapaport, A., Steyer, J., Gonzalez-Alvarez, V., and Pelayo-Ortiz, C. (2002). Software sensors for highly uncertain wwtps: a new approach based on interval observers. *Water Res*, 36(2515).
- Angeli, D. and Sontag, D. (2003). Monotone control systems. *IEEE Transactions Automatic*, 48(10), 1684–1698.
- Avilés, J.D. and Moreno, J.A. (2014). Preserving order observers for nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 24(16), 2153–2178.
- Avilés, J.D. and Moreno, J.A. (2020). Dissipative interval observer design for discrete-time nonlinear systems. *Asian Journal of Control*, 22(4), 1422–1436.
- Bernard, O. and Gouze, J. (2004). Closed loop observers bundle for uncertain biotechnological models. *Journal of Process Control*, 14(3), 765–774.
- Efimov, D., Perruquetti, W., Raïssi, T., and Zolghadri, A. (2013a). Interval observers for time-varying discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(12), 3218–3224.
- Efimov, D., Perruquetti, W., Raïssi, T., and Zolghadri, A. (2013b). On interval observer design for time-invariant discrete-time systems. *ECC*.
- Efimov, D., Raïssi, T., Chebotarev, S., and Zolghadri, A. (2013c). Interval state observer for nonlinear time varying systems. *Automatica*, 49(1), 200–205.
- Farina, L. and Rinaldi, S. (2000). *Positive linear systems: theory and applications*. John Wiley & Sons.
- Gouze, J.L., Rapaport, A., and Hadj-Sadok, M.Z. (2000). Interval observers for uncertain biological systems. *Ecol Modelling*, 133(1-2), 45–56.
- Hirsch, M., Smith, H., et al. (2005). Monotone dynamical systems. *Handbook of differential equations: ordinary differential equations*, 2, 239–357.
- Khan, A., Xie, W., Zhang, B., and Liu, L.W. (2021). A survey of interval observers design methods and implementation for uncertain systems. *Journal of the Franklin Institute*, 358(6), 3077–3126.
- López-Caamal, F. and Avilés, J.D. (2023). A linear interval observer for a class of linear systems of dimension $2n$ with n measurements of the state.
- Mazenc, F., Dinh, T., and Niculescu, S. (2013). Robust interval observers for discrete time systems of luenberger type. *ACC, Washington USA*, 2484–2489.
- Mazenc, F., Dinh, T., and Niculescu, S. (2014). Interval observers for discrete time systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, (17), 2867–2890.
- Mazenc, F. and Bernard, O. (2011). Interval observers for linear time-invariant systems with disturbances. *Automatica*, 47(1), 140–147.
- Moisan, M., Bernard, O., and Gouze, J. (2009). Near optimal interval observers bundle for uncertain bioreactors. *Automatica*, 45, 291–295.

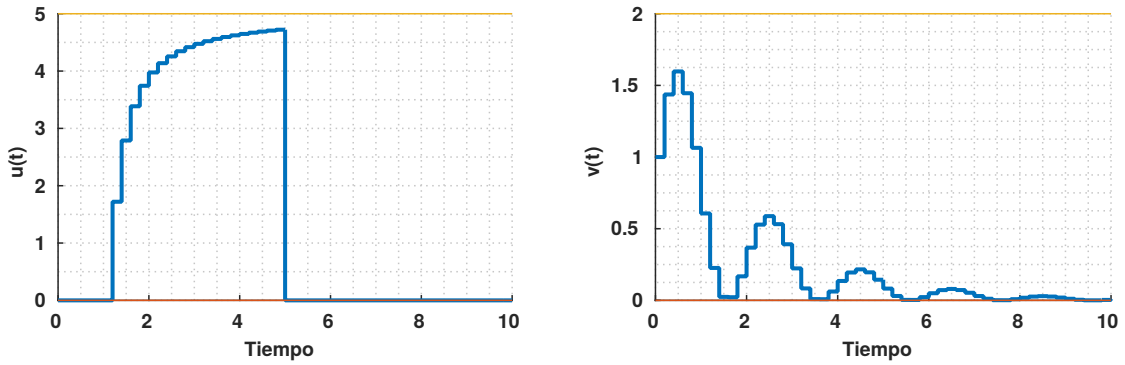


Figura 1. Entrada $u[k]$ y perturbación $v[k]$ consideradas para la simulación.

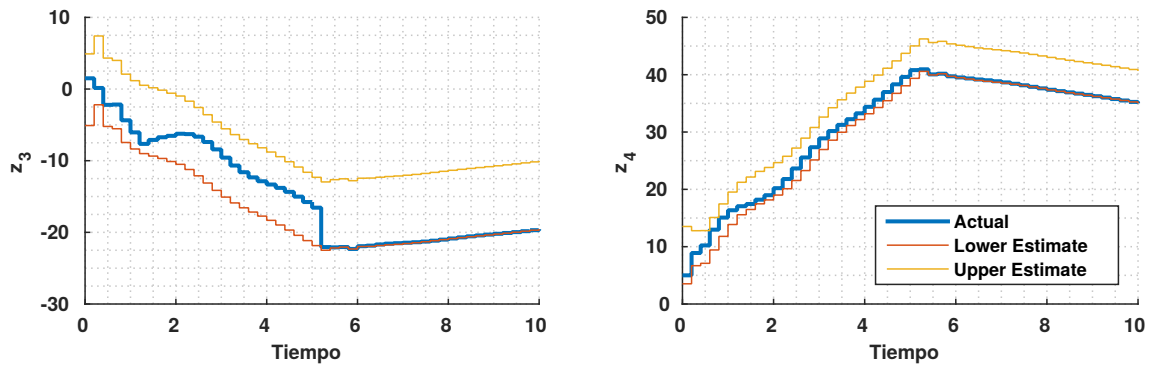


Figura 2. Comparación de los estados reales con los estimados superiores e inferiores.

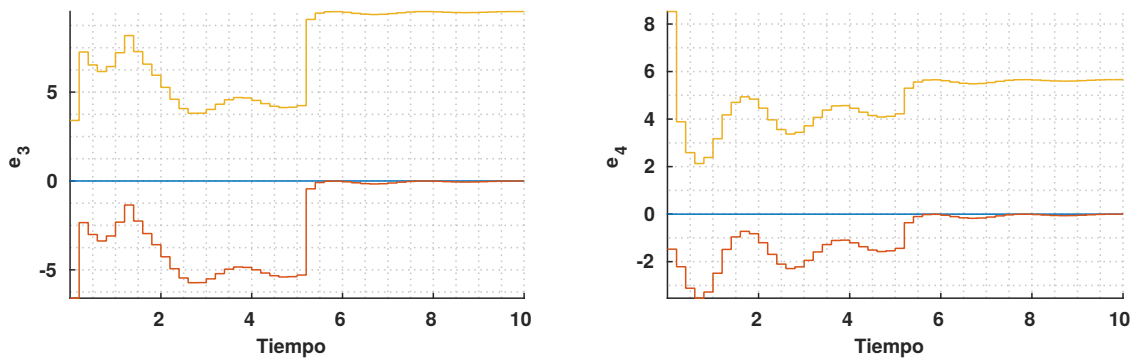


Figura 3. Errores de observación.