

Thermoelectric Module Control Based on Fractional-order Disturbance Estimation State Observers

Juan Javier Montesinos-García, Jorge Luis Barahona-Avalos,
Esther Lugo-González, Jesús Linares-Flores

Instituto de Electrónica y Mecatrónica, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Av. Doctor Modesto Seara Vázquez No.1, Acatlilma, Huajuapán de León, Oaxaca 69004, México
(*jmontesinos@mixteco.utm.mx, jbarahona@mixteco.utm.mx, elugog@mixteco.utm.mx, jlinares@mixteco.utm.mx*)

Abstract:

This article presents a fractional-order control strategy based on an uncertainty estimator applied to thermoelectric modules. It is known that thermoelectric modules are nonlinear systems characterized by a polynomial-type nonlinear control input. The proposed control law does not require the linearization of the nonlinear control input, this is achieved through the use of a state observer that estimates certain components of the nonlinear system's state, enabling the control law to counteract these elements and drive the system toward a desired state. To validate the theoretical results, experiments are conducted by implementing the control law on a platform comprising a buck-type DC/DC converter that powers a Peltier cell.

Keywords: State observer, Observer-based control, Fractional-order systems, Disturbance estimation, Thermoelectric Module

1. INTRODUCCIÓN

El cálculo fraccionario ha generado interés debido a las numerosas aplicaciones potenciales en disciplinas como finanzas (Laskin (2000)), física (Hilfer (2000)), medicina (Zhou et al. (2010)), biología (Freeborn (2013)), y control (Liu et al. (2018)). Al aplicar derivadas fraccionarias a modelos y leyes de control conocidos, el modelo puede ajustarse mejor a la dinámica del sistema en el mundo real, mientras que el controlador de orden fraccionario puede dar beneficios adicionales. Por ejemplo, el controlador Proporcional Integral Derivativo de Orden Fraccionario (FOPID), posee dos valores adicionales que pueden ser ajustados para una mejor respuesta del sistema, siendo estos el orden de la derivada y la integral (Podlubny et al. (1999)).

Recientemente se han logrado avances en el control de sistemas no lineales de orden fraccionario con entradas de control no lineales. En Dang et al. (2023), se presenta un esquema de control de modo deslizante con una superficie de deslizamiento de orden fraccionario; en (Zouari et al. (2021)) y (Hu et al. (2020)), se proponen controladores con una entrada de control no lineal.

El control de orden fraccionario aplicado a la regulación de temperatura mediante módulos termoelectricos (TEM), sigue siendo un área con exploración limitada. En (Macias and Sierociuk (2012)), se modela un proceso de calentamiento mediante una función de transfe-

ncia de orden fraccionario y posteriormente se controla empleando un PID de orden fraccionario (FOPID). En (Maamir et al. (2015)) se introduce un algoritmo de ajuste automático para controladores FOPID, basado en técnicas de optimización por enjambre de partículas, su rendimiento se demuestra mediante pruebas en un módulo termoelectrico. En una línea similar, en (Kungwalrut et al. (2017)) se prueba un controlador FOPID en un módulo termoelectrico, teniendo en cuenta el retardo de tiempo del proceso. En (Viola et al. (2020b)) se caracteriza un conjunto de celdas de Peltier como un grupo de funciones de transferencia de orden fraccionario, donde el control se logra utilizando una red de controladores de tipo PI. En (Viola et al. (2020a)) se ofrece un enfoque similar, presentando un módulo termoelectrico modelado con una función de transferencia de primer orden con un retardo en el tiempo, y aplicando una aproximación discreta del FOPID.

Los módulos termoelectricos tienen la capacidad de calentar o enfriar, dependiendo de la polaridad del voltaje de alimentación. Esta característica se presta a varias aplicaciones industriales, incluyendo ciclos térmicos en entornos biomédicos. En telecomunicaciones basadas en óptica, se emplean módulos termoelectricos para la refrigeración de láseres y otros elementos ópticos. Además, en espectroscopía, los módulos termoelectricos cumplen un papel crucial en la regulación de temperatura de cámaras CCD. La generación termoelectrica se presenta como otra aplicación importante de estos módulos. Ciertos dispositivos electrónicos de consumo usan los módulos termoelectricos

* Corresponding Author: jmontesinos@mixteco.utm.mx

para refrigeración; por ejemplo, existe una amplia gama de soluciones basadas en estos módulos para refrigerar procesadores y tarjetas gráficas de computadoras.

A pesar de la amplia gama de aplicaciones, hay una falta de literatura que proporcione leyes de control más allá del FOPID para modelos de orden fraccionario de módulos termoelectrónicos. Este artículo introduce una estrategia de control basada en observadores para sistemas no lineales de orden fraccionario con entradas de control polinomiales no lineales. La ley de control propuesta utiliza un observador de estado para mitigar la influencia de las entradas de control no lineales, produciendo así una respuesta deseada en la cara fría del TEM.

El resto del artículo está organizado de la siguiente manera: En la Sección 2, se presentan los fundamentos del cálculo fraccionario; la Sección 3 presenta la ley de control basada en observadores; la Sección 4 contiene resultados experimentales y simulaciones numéricas y la Sección 5 ofrece algunas conclusiones.

2. PRELIMINARES

Para facilitar la lectura de este artículo, es necesario proporcionar algunas definiciones clave sobre cálculo fraccionario.

Definición 1:

La derivada fraccional de Caputo de orden α de la función $f(t)$ es:

$$D_*^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t f^{(n)}(\tau) (t-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau \quad (1)$$

donde $f^{(n)}(\tau)$ es la n -ésima derivada y n es un entero positivo. $\Gamma(\cdot)$ es la función gamma de Euler dada por:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt. \quad (2)$$

Lema 1: (Li et al. (2010)) si un sistema tiene el punto de equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, contenido en el dominio $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$, y hay una función continuamente diferenciable tal que $V[t, \mathbf{x}(t)] : [0, \infty) \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$, si se cumplen que:

$$\alpha_1 \|\mathbf{x}\|^a \leq V[t, \mathbf{x}(t)] \leq \alpha_2 \|\mathbf{x}\|^{ab} \quad (3)$$

$$D_*^\beta V[t, \mathbf{x}(t)] \leq -\alpha_3 \|\mathbf{x}\|^{ab}$$

con números reales $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta, a, b > 0, t \geq 0, \mathbf{x} \in \mathbb{D}$ y el orden de la derivada fraccionaria $0 \leq \beta \leq 1$, el punto de equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se dice estable en el sentido de Mittag-Leffler, y entonces, se dice que es asintóticamente estable.

Lema 2: (Duarte-Mermoud et al. (2015)) el vector de funciones diferenciables $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ para un tiempo dado $t \geq 0$ cumple

$$D_*^\alpha (\mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{x}(t)) \leq 2\mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} D_*^\alpha \mathbf{x}(t) \quad (4)$$

con la matriz constante, simétrica y definida positiva $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

3. LEY DE CONTROL BASADA EN OBSERVADORES DE PERTURBACIÓN

La ley de control propuesta emplea un observador de incertidumbre de modos deslizantes para estimar la parte

deseada de la dinámica del sistema. Esta estimación es utilizada por un controlador de modos deslizantes para contrarrestar los efectos de la entrada de control no lineal y proporcionar robustez al sistema en lazo cerrado. Considérese el sistema no lineal de orden fraccionario con entradas de control no afines de tipo polinomial:

$$D_*^\alpha \mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \sum_{i=2}^I g(\mathbf{x}) u^i + \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (5)$$

donde $\mathbf{x}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{F}(x)$ describe la dinámica del sistema, $g(\mathbf{x})$ representa los coeficientes de la entrada de control no lineal polinomial y \mathbf{B} es una matriz de dimensión apropiada. Considerando que el sistema es un TEM alimentado por un convertidor DC/DC de tipo Buck, este puede separarse en su etapa de potencia dada por $\mathbf{x}_l \in \mathbb{R}^m, m < n$:

$$D_*^\alpha \mathbf{x}_l = \mathbf{A}_l \mathbf{x}_l + \mathbf{B}_l \mathbf{u} + \mathbf{E}_l(\mathbf{x}) \quad (6)$$

con $\mathbf{x}_l \in \mathbb{R}^m, m < n$, y el proceso con estados que contienen las entradas de control no lineales polinomiales:

$$D_*^\alpha \mathbf{x}_{nl} = \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}) + \sum_{i=2}^I g(\mathbf{x}) \mathbf{x}_{ul}^i + \mathbf{B}_{nl} \mathbf{x}_{ul} \quad (7)$$

donde $\mathbf{x}_{nl} \in \mathbb{R}^o, o < n$ y $\mathbf{x}_{ul} \in \mathbf{x}_l$, notando que la entrada de la función no lineal es uno de los estados de la etapa de potencia. El sistema puede entonces escribirse como:

$$D_*^\alpha \mathbf{x}_l = \mathbf{A}_l \mathbf{x}_l + \mathbf{B}_l u + \mathbf{E}_l(\mathbf{x})$$

$$D_*^\alpha \mathbf{x}_{nl} = \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}) + \sum_{n=2}^N g_n(\mathbf{x}) \mathbf{x}_{ul}^n + \mathbf{B}_{nl} \mathbf{x}_{ul} \quad (8)$$

$$y = \mathbf{C}_{nl} \mathbf{x}_{nl}$$

$\mathbf{A}_l, \mathbf{B}_l, \mathbf{C}_{nl}, \mathbf{E}_l$ y \mathbf{B}_{nl} son matrices de la dimensión apropiada, $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_l, \mathbf{x}_{nl}]^T$, \mathbf{f}_{nl} da la dinámica no lineal del sistema, y g_n son los coeficientes de la entrada de control no lineal polinomial. La salida es el estado a controlar $y = \mathbf{C}_{nl} \mathbf{x}_{nl} = x_d$ con la derivada de orden fraccionario

$$D_*^\alpha x_d = f_d(\mathbf{x}) + \sum_{n=2}^N g_{dn}(\mathbf{x}) x_{ul}^n + B_{nld} x_{ul} \quad (9)$$

donde $f_d(\mathbf{x}), g_{dn}(\mathbf{x}), B_{nld}$ son las partes correspondientes a la salida de la dinámica del sistema. La derivada de orden fraccionario de x_d puede expresarse como un sistema de dos estados haciendo el cambio de variable $x_d = \chi_1$

$$D_*^\alpha \chi_1 = \chi_2 \quad (10)$$

$$D_*^\alpha \chi_2 = D_*^\alpha D_*^\alpha \chi_1$$

$$= D_*^\alpha \left(f_d(\chi) + \sum_{n=2}^N g_{dn}(\chi) \chi_{ul}^n + B_{nld} \chi_{ul} \right)$$

$$y_\chi = \chi_1$$

por simplicidad

$$f(\chi) = D_*^\alpha \left(f_d(\chi) + \sum_{n=2}^N g_{dn}(\chi) \chi_{ul}^n + B_{nld} \chi_{ul} \right) \quad (11)$$

entonces,

$$D_*^\alpha \chi = \mathbf{A}\chi + f(\chi) \mathbf{W} \quad (12)$$

$$y_\chi = \mathbf{C}$$

con $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = [1 \ 0]$ y $\chi = [\chi_1 \ \chi_2]^T$. El siguiente observador de estado de modo deslizante produce una estimación de la derivada de orden fraccionario del estado x_d :

$$D_*^\alpha \hat{\chi}_1 = \hat{\chi}_2 + k_{l1} (\chi_1 - \hat{\chi}_1) + k_1 \text{sign}(\chi_1 - \hat{\chi}_1) \quad (13)$$

$$D_*^\alpha \hat{\chi}_2 = k_{l2} (\chi_1 - \hat{\chi}_1) + k_2 \text{sign}(\chi_1 - \hat{\chi}_1)$$

$$\hat{y} = \hat{\chi}_1$$

El error de sincronización y su derivada de orden α son entonces:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \chi_1 - \hat{\chi}_1 \\ \chi_2 - \hat{\chi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$D_*^\alpha \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_2 - k_{l1}(e_1) - k_1 \text{sign}(e_1) \\ f(\chi) - k_{l2}(e_1) - k_2 \text{sign}(e_1) \end{bmatrix}$$

La prueba de estabilidad del observador y el controlador necesita las siguientes suposiciones:

Suposición 1: Existe una solución $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ para un $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > 0$ en la desigualdad matricial lineal

$$(\mathbf{A} - \mathbf{K}_L \mathbf{C})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{K}_L \mathbf{C}) + \mathbf{Q} \leq 0 \quad (15)$$

Suposición 2: La segunda derivada del estado x_d está acotada con $L_1 > 0$, $L_1 \in \mathbb{R}$

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq L_1 \quad (16)$$

Suposición 3: Para un número $\Lambda > 0$, $\Lambda \in \mathbb{R}$, la norma de la solución de la ecuación de Lyapunov cumple con la desigualdad

$$\|\mathbf{P}\| \|\mathbf{W}\| L_1 \leq \Lambda \quad (17)$$

Suposición 4: Existe una solución $\mathbf{P}_l = \mathbf{P}_l^T > 0$ con $\mathbf{Q}_l = \mathbf{Q}_l^T > 0$ a la ecuación de Lyapunov

$$\mathbf{A}_l^T \mathbf{P}_l + \mathbf{P}_l^T \mathbf{A}_l = -\mathbf{Q}_l \quad (18)$$

Suposición 5: Los estados del sistema lineal cumplen la desigualdad con un número real no negativo $\delta > 0$

$$\|\mathbf{x}_l^T \mathbf{P}_l \mathbf{W}\| \leq \delta \|\mathbf{x}_l\| \quad (19)$$

La ecuación del observador se reescribe para coincidir con (12)

$$D_*^\alpha \hat{\chi} = \mathbf{A}\hat{\chi} + \mathbf{K}_L \mathbf{C}\mathbf{e} + \mathbf{K} \text{sign}(\mathbf{C}\mathbf{e}) \quad (20)$$

$$\hat{y}_\chi = \mathbf{C}\hat{\chi}$$

donde $\mathbf{K}_L = [k_{l1} \ k_{l2}]^T$ y $\mathbf{K} = [k_1 \ k_2]^T$. La dinámica del error es

$$D_*^\alpha \mathbf{e} = \mathbf{A}\chi + f(\chi) - \mathbf{A}\hat{\chi} - \mathbf{K}_L \mathbf{C}\mathbf{e} - \mathbf{K} \text{sign}(\mathbf{C}\mathbf{e}) \quad (21)$$

$$= \mathbf{A}(\chi - \hat{\chi}) + f(\chi) \mathbf{W} - \mathbf{K}_L \mathbf{C}\mathbf{e} - \mathbf{K} \text{sign}(\mathbf{C}\mathbf{e})$$

$$= \mathbf{A}\mathbf{e} + f(\chi) \mathbf{W} - \mathbf{K}_L \mathbf{C}\mathbf{e} - \mathbf{K} \text{sign}(\mathbf{C}\mathbf{e})$$

Considere la función candidata de Lyapunov

$$V_1 = \mathbf{e}^T \mathbf{P}\mathbf{e} \quad (22)$$

De acuerdo con el Lema 2 y basado en la derivada de Caputo, la derivada de orden α de la función candidata de Lyapunov tiene el límite superior

$$D_*^\alpha V_1 \leq 2\mathbf{e}^T \mathbf{P} D_*^\alpha \mathbf{e} \quad (23)$$

Al sustituir la dinámica del error en la derivada de orden fraccionario de la función candidata de Lyapunov se tiene:

$$D_*^\alpha V_1 \leq 2[\mathbf{A}\mathbf{e} + f(\chi) \mathbf{W} - \mathbf{K}_L \mathbf{C}\mathbf{e} - \mathbf{K} \text{sign}(\mathbf{C}\mathbf{e})]^T \mathbf{P}\mathbf{e} \quad (24)$$

$$+ 2\mathbf{e}^T \mathbf{P} [\mathbf{A}\mathbf{e} + f(\chi) \mathbf{W} - \mathbf{K}_L \mathbf{C}\mathbf{e} - \mathbf{K} \text{sign}(\mathbf{C}\mathbf{e})]$$

Se reorganizan los términos de la derivada (24).

$$D_*^\alpha V_1 \leq 2\mathbf{e}^T [(\mathbf{A}^T - \mathbf{K}_L \mathbf{C}) \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{K}_L \mathbf{C})] \mathbf{e} \quad (25)$$

$$+ 2\mathbf{e}^T \mathbf{P} [f(\chi) \mathbf{W} - \mathbf{K} \text{sign}(\mathbf{C}\mathbf{e})]$$

De acuerdo con la suposición 1

$$D_*^\alpha V_1 \leq 2\mathbf{e}^T \mathbf{P} [f(\chi) \mathbf{W} - \mathbf{K} \text{sign}(\mathbf{C}\mathbf{e})] - \mathbf{e}^T \mathbf{Q}\mathbf{e} \quad (26)$$

Usando la desigualdad de Rayleigh-Ritz se llega a

$$D_*^\alpha V_1 \leq 2\mathbf{e}^T \mathbf{P} [f(\chi) \mathbf{W} - \mathbf{K} \text{sign}(\mathbf{C}\mathbf{e})] \quad (27)$$

La suposición 2 conduce a

$$D_*^\alpha V_1 \leq 2\|\mathbf{e}^T\| \|\mathbf{P}\| \|\mathbf{W}\| L_1 - 2\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{K} \text{sign}(\mathbf{C}\mathbf{e}) \quad (28)$$

De la suposición 3

$$D_*^\alpha V_1 \leq 2\Lambda \|\mathbf{e}\| - 2\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{K} \text{sign}(\mathbf{C}\mathbf{e}) \quad (29)$$

$$\leq 2[\Lambda - \lambda_{\max}(\mathbf{P}\mathbf{K}\mathbf{C})] \|\mathbf{e}\|$$

Para cumplir con el Lema 1, \mathbf{K} debe satisfacer la desigualdad $\lambda_{\max}(\mathbf{P}\mathbf{K}\mathbf{C}) > \Lambda$, de modo que $D_*^\alpha V_1 \leq 0$ y, en consecuencia, el error del observador es Mittag-Leffler estable. Para estimar la parte deseada de la dinámica del sistema, el estado del observador se extiende con la ecuación

$$D_*^\alpha \hat{\chi}_3 = k_3 \text{sign}(r - \hat{\chi}_3) \quad (30)$$

Con r siendo una trayectoria con la derivada de Caputo de orden α acotada $\|D_*^\alpha r\| \leq \phi$, $\phi > 0$. El error de seguimiento y su derivada de orden α son

$$e_t = r - \hat{\chi}_3 \quad (31)$$

$$D_*^\alpha e_t = D_*^\alpha (r - \hat{\chi}_3) \quad (32)$$

La función candidata de Lyapunov para el error es

$$V_2 = e_t^T e_t \geq 0 \quad (33)$$

del Lema 2

$$D_*^\alpha V_2 \leq 2e_t D_*^\alpha r - 2e_t k_3 \text{sign}(e_t) \quad (34)$$

Dado que la derivada de la referencia está acotada

$$D_*^\alpha V_2 \leq 2\Phi e_t - 2e_t k_3 \text{sign}(e_t)$$

$$\leq 2(\Phi - k_3) \|e_t\|$$

siendo $k_3 > \Phi$ hace que la derivada de la función candidata de Lyapunov sea $D_*^\alpha V_2 \leq 0$; por lo tanto,

el observador adicional cumple con el Lema 1, y así, el estado adicional converge a la referencia deseada r . Al elegir $r = D_*^\alpha \hat{\chi}_1 - B_{nld}x_{ul}$ se obtiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D_*^\alpha \hat{x}_1 - B_{nld}x_{ul} - \hat{\chi}_3 = 0 \quad (35)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D_*^\alpha \hat{x}_1 = f_d(x) + \sum_{n=2}^N g_{dn}(x) x_{ul}^n + B_{nld}x_{ul} \quad (36)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(f_d(x) + \sum_{n=2}^N g_{dn}(x) x_{ul}^n \right) - \hat{\chi}_3 \right] = 0 \quad (37)$$

El valor $\hat{\chi}_3$ converge a la parte incierta de la dinámica que contiene el estado y la parte no lineal de la entrada $f_d(x) + \sum_{n=2}^N g_{dn}(x) x_{ul}^n$; así, la dinámica extendida para el observador es $D_*^\alpha \hat{\chi}_3 = k_3 \text{sign}(D_*^\alpha \hat{x}_1 - B_{nld}x_{ul} - \hat{\chi}_3)$.

Se propone una estrategia similar al rechazo activo de perturbaciones mediante el uso de $\hat{\chi}_3$ para mitigar los efectos de la entrada de control no lineal, cuya entrada para el sistema no lineal es $x_{ul} = -\hat{\chi}_3 + u_d$, donde u_d denota la dinámica de salida del sistema deseada. Para contrarrestar los efectos de posibles errores de estimación se introduce una ley de control robusta. La parte lineal del sistema se expresa como

$$\begin{aligned} D_*^\alpha \mathbf{x}_l &= \mathbf{A}_l \mathbf{x}_l + \mathbf{D}_l + \mathbf{B}_l u \\ y_l &= \mathbf{C}_l \mathbf{x}_l \end{aligned} \quad (38)$$

Sea una señal de referencia deseada diferenciable para el sistema lineal r_l con la derivada acotada $\|\mathbf{x}_l \mathbf{P}_l D_*^\alpha r_l\| \leq \mathbf{R} \|\mathbf{x}_l\|$, $\mathbf{R} \geq 0$ y su error de seguimiento e_l , con la derivada de orden fraccional, sea

$$\begin{aligned} e_l &= r_l - x_l \\ D_*^\alpha e_l &= D_*^\alpha r_l - (\mathbf{A}_l x_l + \mathbf{D}_l + \mathbf{B}_l u) \end{aligned} \quad (39)$$

Al elegir $u = K_s \text{sign}(\mathbf{C}_l e_l)$, sea la función candidata de Lyapunov para el sistema lineal

$$V_3 = e_l^T \mathbf{P}_l e_l \quad (40)$$

de acuerdo con el Lema 1

$$D_*^\alpha V_3 \leq 2e_l^T \mathbf{P}_l D_*^\alpha e_l \quad (41)$$

sigue

$$\begin{aligned} D_*^\alpha V_3 &\leq 2e_l^T \mathbf{P}_l D_*^\alpha r_l - e_l^T (\mathbf{A}_l^T \mathbf{P}_l + \mathbf{P}_l^T \mathbf{A}_l) e_l \\ &\quad - 2e_l^T \mathbf{P}_l \mathbf{D}_l(x) - 2e_l^T \mathbf{P}_l \mathbf{B}_l u \end{aligned}$$

De acuerdo con la suposición 4

$$\begin{aligned} D_*^\alpha V_3 &\leq 2e_l^T \mathbf{P}_l D_*^\alpha r_l - 2e_l^T \mathbf{P}_l \mathbf{D}_l(x) \\ &\quad - 2e_l^T \mathbf{P}_l \mathbf{B}_l u \end{aligned} \quad (42)$$

Por la suposición 5

$$\begin{aligned} D_*^\alpha V_3 &\leq 2e_l^T \mathbf{P}_l [D_*^\alpha r_l + \delta - K_s \text{sign}(\mathbf{C}_l e_l)] \\ &\leq 2[\mathbf{R} + \delta - \lambda_{max}(\mathbf{P}_l K_s \mathbf{C}_l)] \|e_l\| \end{aligned} \quad (43)$$

haciendo que K_s sea tal que $\delta + \mathbf{R} < \lambda_{max}(\mathbf{P}_l K_s \mathbf{C}_l)$ se obtiene $D_*^\alpha V_3 \leq 0$; por lo tanto, el estado que cumple

la función de entrada de control para los estados no lineales converge a la ley de control deseada $-\hat{\chi}_3 + u_d$, haciendo que error sea Mittag-Leffler estable con $u = K_s \text{sign}(-\hat{\chi}_3 + u_d - \mathbf{C}_l \mathbf{x}_l)$.

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES Y NÚMERICOS

La plataforma experimental, mostrada en la Figura 1, está constituida de los siguientes elementos: un módulo termoeléctrico construido con base a una celda peltier TEC1-12710 de Hebei I.T.; un convertidor CD/CD tipo reductor diseñado con base a una frecuencia de 50 kHz, una potencia máxima de 60 W, una corriente máxima de 5 A y un voltaje de salida de 12 V para una resistencia de carga promedio de 3.17 Ω ; dos sensores de temperatura digitales DS18B20, uno para la cara fría del TEM y otro para la cara caliente; un sensor de corriente ACS712, para medir la corriente del inductor del convertidor reductor; un circuito para medir el voltaje de salida del convertidor reductor, construido con base a un amplificador de aislamiento ISO124P; una computadora equipada con la herramienta de software MATLAB/Simulink para implementar el algoritmo de control ADRC; una tarjeta de adquisición de datos basada en el microcontrolador STM32F429, que funciona como un enlace entre la planta y la computadora, empleando para ello el Waijung Blockset de Simulink y la fuente de alimentación de la plataforma. En la Figura 2 se muestra un diagrama descriptivo de la plataforma experimental con más detalle. Un modelo matemático de orden fraccional para el TEM con su etapa de potencia puede ser encontrado en (Lineykin and Ben-Yaakov (2005, 2007); Barahona-Avalos et al. (2021)), este modelo es simplificado:

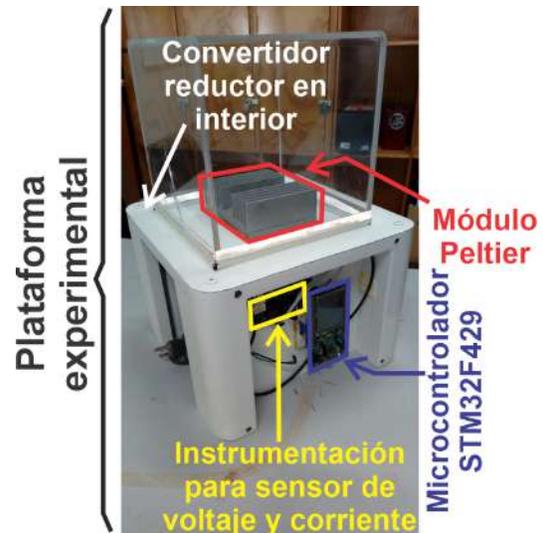


Fig. 1. Plataforma Experimental.

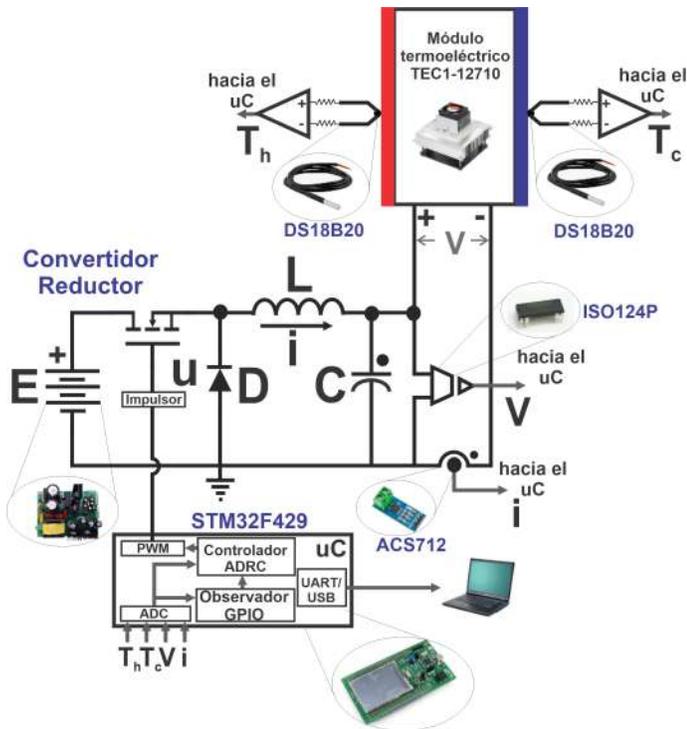


Fig. 2. Diagrama Descriptivo.

$$\begin{aligned}
 D_*^\alpha x_1 &= A_1 u - A_2 x_2 \\
 D_*^\alpha x_2 &= B_1 x_1 - B_2 x_2 + B_3 (x_3 - x_4) - B_4 x_2 \\
 D_*^\alpha x_3 &= C_1 + C_2 (x_4 - x_3) - C_3 x_3 + C_4 x_2^2 \\
 &\quad + C_5 x_2 x_3 - C_6 x_2 x_4 + C_7 (x_4^2 - x_3^2) \\
 D_*^\alpha x_4 &= D_1 + D_2 (x_3 - x_4) - D_3 x_4 + D_4 x_2^2 \\
 &\quad + D_5 x_2 x_3 - D_6 x_2 x_4 + D_7 (x_3^2 - x_4^2) \\
 y &= x_3 = x_d
 \end{aligned} \quad (44)$$

Los parámetros del modelo pueden consultarse en (Barahona-Avalos et al. (2021)). Se implementa el controlador propuesto basado en observadores utilizando la aproximación CRONE de la integral de orden fraccional:

$$\begin{aligned}
 D_*^\alpha \hat{z}_1 &= \hat{z}_1 + k_{l1} (x_d - \hat{z}_1) + k_1 \text{sign} (x_d - \hat{z}_1) \\
 D_*^\alpha \hat{z}_2 &= k_{l2} (x_d - \hat{z}_1) + k_2 \text{sign} (x_d - \hat{z}_1) \\
 D_*^\alpha \hat{z}_3 &= k_3 \text{sign} (r - \hat{z}_3) \\
 r &= D_*^\alpha \hat{z}_1 - B_{nl} x_{ul} \\
 u &= K_s \text{sign} (-\hat{z}_3 + u_d - C_1 x)
 \end{aligned} \quad (45)$$

los valores obtenidos para las ganancias para el controlador son $k_{l1} = 2.7583$, $k_{l2} = 5.1234$, $k_1 = 300$, $k_2 = 400$, $k_3 = 19.9568$, $K_s = 0.0011$, y $u_d = -10.9582 \text{sign} (273.15 + T_{des} - x_3)$, donde T_{des} es la temperatura deseada en °C. Para evaluar la eficacia de la ley de control propuesta, se realizaron tres experimentos con el objetivo de llevar la temperatura de la cara fría del TEM a valores deseados de 20 °C, 18 °C y 16 °C. Los resultados de estos experimentos se contrastaron con simulaciones, cuyos resultados se presentan en la 3, la cual muestra la evolución temporal de la temperatura en el lado frío del TEM junto con los resultados obtenidos

en simulación. La 4 presenta las señales de error que comparan las temperaturas deseadas con las medidas, mientras que la 5 ilustra la dinámica de la perturbación estimada por el observador, tanto en los experimentos como en la simulación numérica.

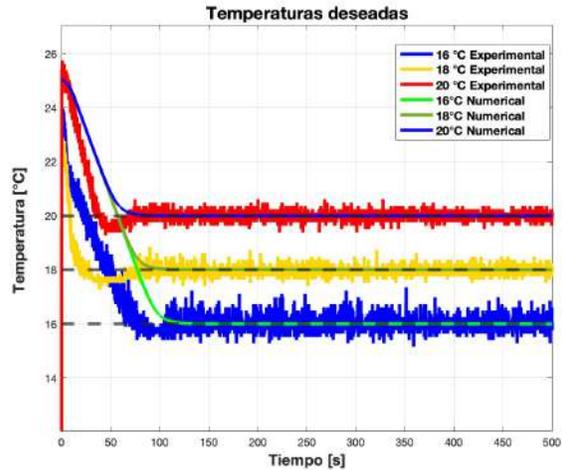


Fig. 3. Temperatura de la cara fría

Como se muestra en las figuras, el rendimiento del controlador propuesto fue satisfactorio, ya que la ley de control logró llevar la temperatura de la cara fría al valor deseado, reduciendo el error a cero y mostrando una considerable similitud con los resultados numéricos. Es importante destacar que el observador es compatible con otras técnicas de control, como FOPID y sus variantes.

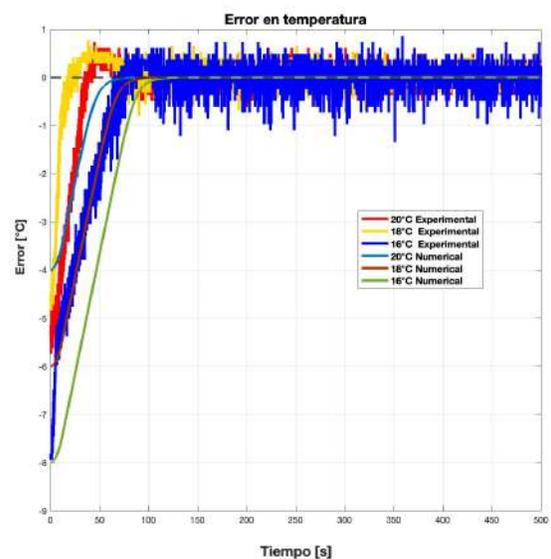


Fig. 4. Error en temperatura

5. CONCLUSIONES

La ley de control se valida a través de pruebas en un Módulo Termoeléctrico alimentado por un convertidor Buck, un sistema conocido por sus entradas de control no lineales. Los resultados de la simulación validan que la ley de control puede guiar al sistema hacia un valor deseado. El observador de incertidumbre cumple su propósito al hacer una estimación de la parte deseada del estado y, consecuentemente, esta estimación puede utilizarse para mitigar los efectos de la entrada de control no lineal y dar al sistema de salida la dinámica deseada. El desempeño de la ley de control propuesta fue corroborado mediante simulaciones y experimentos. En ambos casos, se obtuvieron resultados muy similares, como se detalla en la sección de resultados experimentales mostrando.

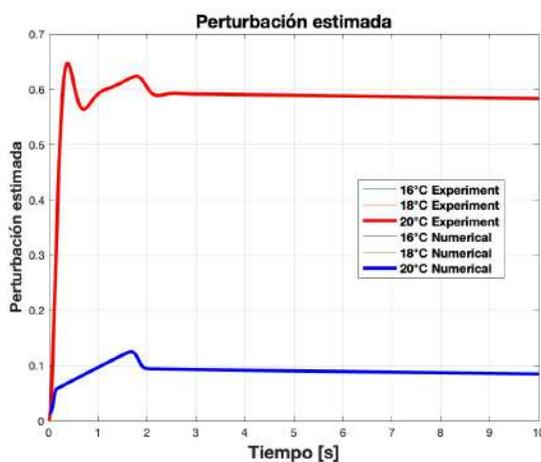


Fig. 5. Perturbación estimada

REFERENCES

- Barahona-Avalos, J.L., Juárez-Abad, J.A., Galván-Cruz, G., and Linares-Flores, J. (2021). Control mediante rechazo activo de perturbaciones de la temperatura de un módulo termoeléctrico. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 19(1), 48–60.
- Dang, V.T., Nguyen, D.B.H., Tran, T.D.T., Le, D.T., and Nguyen, T.L. (2023). Model-free hierarchical control with fractional-order sliding surface for multisection web machines. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 37(2), 497–518.
- Duarte-Mermoud, M.A., Aguila-Camacho, N., Gallegos, J.A., and Castro-Linares, R. (2015). Using general quadratic lyapunov functions to prove lyapunov uniform stability for fractional order systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 22(1-3), 650–659.
- Freeborn, T.J. (2013). A survey of fractional-order circuit models for biology and biomedicine. *IEEE Journal on emerging and selected topics in circuits and systems*, 3(3), 416–424.
- Hilfer, R. (2000). *Applications of fractional calculus in physics*. World scientific.
- Hu, X., Song, Q., Ge, M., and Li, R. (2020). Fractional-order adaptive fault-tolerant control for a class of general nonlinear systems. *Nonlinear Dynamics*, 101, 379–392.
- Kungwalrut, P., Numsomran, A., Chaiyasith, P., Chao-raingern, J., and Tipsuwarnporn, V. (2017). A π λ d μ controller design for peltier-thermoelectric cooling system. In *2017 17th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS)*, 766–770. IEEE.
- Laskin, N. (2000). Fractional market dynamics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 287(3-4), 482–492.
- Li, Y., Chen, Y., and Podlubny, I. (2010). Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized mittag-leffler stability. *Computers & Mathematics with Applications*, 59(5), 1810–1821.
- Lineykin, S. and Ben-Yaakov, S. (2005). Analysis of thermoelectric coolers by a spice-compatible equivalent-circuit model. *IEEE Power Electronics Letters*, 3(2), 63–66.
- Lineykin, S. and Ben-Yaakov, S. (2007). Modeling and analysis of thermoelectric modules. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 43(2), 505–512.
- Liu, H., Li, S., Li, G., and Wang, H. (2018). Adaptive controller design for a class of uncertain fractional-order nonlinear systems: an adaptive fuzzy approach. *International Journal of Fuzzy Systems*, 20, 366–379.
- Maamir, F., Guiatni, M., El Hachemi, H.M.S.M., and Ali, D. (2015). Auto-tuning of fractional-order pi controller using particle swarm optimization for thermal device. In *2015 4th International Conference on Electrical Engineering (ICEE)*, 1–6. IEEE.
- Macias, M. and Sierociuk, D. (2012). Fractional order calculus for modeling and fractional pid control of the heating process. In *Proceedings of the 13th International Carpathian Control Conference (ICCC)*, 452–457. IEEE.
- Podlubny, I., Dorcak, L., and Kostial, I. (1999). On fractional derivatives, fractional-order dynamic system and pid-controllers. In *Proceedings of the 36th 1997 IEEE Conference on Decision and Control, Phoenix, AZ, USA*, 7–10. Citeseer.
- Viola, J., Oziablo, P., and Chen, Y. (2020a). A portable and affordable networked temperature distribution control platform for education and research. *IFAC-PapersOnLine*, 53(2), 17530–17535.
- Viola, J., Rodriguez, C., and Chen, Y. (2020b). Phelp: Pixel heating experiment learning platform for education and research on iai-based smart control engineering. In *2020 2nd International Conference on Industrial Artificial Intelligence (IAI)*, 1–6. IEEE.
- Zhou, X.J., Gao, Q., Abdullah, O., and Magin, R.L. (2010). Studies of anomalous diffusion in the human brain using fractional order calculus. *Magnetic resonance in medicine*, 63(3), 562–569.
- Zouari, F., Ibeas, A., Boulkroune, A., Jinde, C., and Arefi, M.M. (2021). Neural network controller design for fractional-order systems with input nonlinearities and asymmetric time-varying pseudo-state constraints. *Chaos, Solitons & Fractals*, 144, 110742.