

Electrical angular position error estimation for a permanent-magnet synchronous motor via extended Kalman filter^{*}

Christian Aldrete-Maldonado^{*}, Axel A. Ruiz-Perez,
Luis N. Coria, Ramon Ramirez-Villalobos

^{} Postgraduate Program in Engineering Sciences, Dynamics Systems
and Control, Tecnológico Nacional de México/ IT Tijuana, Blvd.
Alberto Limón Padilla s/n, Tijuana 22454, México (e-mail:
christian.aldrete18@tectijuana.edu.mx, axel.ruiz193@tectijuana.edu.mx,
luis.coria@tectijuana.edu.mx, ramon.ramirez@tectijuana.edu.mx)*

Abstract: This work presents the design of an extended Kalman filter for electrical angular position error estimation of a permanent-magnet synchronous motor. The method uses the Riccati equation to find an optimal gain value for the filter. The Riccati equation is solved using a 4th-order Runge-Kutta algorithm. The filter also successfully estimates the motor currents and angular speed. The Kalman filter allows to perform speed control when the motor presents a misalignment error and is subjected to a time-varying load torque. Finally, high-precision emulations validate the operation of the filter.

Keywords: Extended Kalman filter, electrical angular position, speed control, PMSM

1. INTRODUCCIÓN

Un motor síncrono de imanes permanentes (PMSM por sus siglas en inglés) es un tipo de motor eléctrico que destaca por sus prestaciones superiores a las de otros motores, tal como lo es su alta eficiencia, su menor volumen y gran densidad de potencia.

El control de campo orientado (FOC por sus siglas en inglés) es una técnica aplicada para controlar sistemas con PMSM. Para implementar esta técnica, es fundamental conocer la posición eléctrica, la cual está determinada por el ángulo formado entre el eje- α del marco de referencia estacionario y el eje- d del marco de referencia rotatorio. Generalmente, esta posición se obtiene mediante sensores de posición. Sin embargo, en sistemas que no utilizan sensores, como los sistemas *sensorless* para PMSM, se diseñan observadores para estimar la posición eléctrica. Algunos diseños de observadores para esta tarea pueden consultarse en los trabajos (Ton et al., 2021), (Bi et al., 2021).

El filtro de Kalman es un algoritmo utilizado en el área de control para estimar el estado de un sistema dinámico. El filtro de Kalman extendido (EKF por sus siglas en inglés) es utilizado cuando el modelo del sistema

es no lineal. Debido a la complejidad del modelo que describe la dinámica del PMSM se implementa un EKF por su capacidad de adaptarse a las no linealidades y proporcionar estimaciones más precisas en condiciones cambiantes, (Hernández Ramírez et al., 2022).

La utilización del EKF para la estimación de estados ha sido aplicada exitosamente con anterioridad a otra clase de motores eléctricos tal como lo son los motores de inducción, (Yildiz et al., 2020), y los motores de corriente directa (CD), (Tripathi et al., 2022), realizándose incluso el control de posición en este último tipo de motores apoyado del EKF, (Aravind et al., 2017).

De igual manera, el EKF, ya ha demostrado su gran utilidad para la estimación de los estados de un PMSM, tal como lo son la velocidad y la posición del rotor, (Tondpoor et al., 2020), (Allaoui et al., 2021), por medio de la medición de los voltajes y las corrientes del motor, (Tian et al., 2018). En ambientes emulados, con la aplicación del EKF se han obtenido resultados favorables de gran precisión al realizar el control del PMSM, (Termizi et al., 2017), (Nordin et al., 2022).

Resulta importante contar con un método para el control de velocidad del PMSM, dado que es un tipo de motor, que gracias a sus propiedades, es comúnmente utilizado en diversas aplicaciones, de las cuales destaca su utilización en robot articulados, (Hong et al., 2017), así como en vehículos eléctricos, los cuales se encuentran cada vez

^{*} Los autores agradecen al TecNM con los proyectos PRODEP ITTIJ-CA-10, 20133.24-P y 20229.24-P. Este trabajo fue desarrollado en el marco de la "Red Internacional de Control y Cómputo Aplicados" soportada por el TecNM.

más presentes en el mercado automotriz, (Loganayaki and Kumar, 2019).

El objetivo principal de este trabajo es el de implementar un EKF en el sistema de control de un PMSM con la finalidad de estimar exitosamente sus estados, como velocidad, corrientes y el error de posición angular eléctrica.

La principal contribución de este artículo es: (1) planteamiento de un modelo matemático que considera el error de posición angular eléctrica entre los marcos de referencia real y medido o estimado, y (2) el diseño de un algoritmo EKF para estimar el error de posición eléctrica en un PMSM, además de la estimación de velocidad y corrientes.

El resto del artículo se encuentra organizado de la siguiente manera. La sección 2 contiene el modelo matemático que describe el comportamiento del PMSM. La sección 3 presenta la metodología de diseño aplicada al EKF para su utilización en el control de velocidad del PMSM. La sección 4 proporciona emulaciones de desempeño del proyecto. Finalmente, en la sección 5, se presentan las conclusiones del artículo.

2. MODELO MATEMÁTICO PMSM

2.1 Control de campo orientado

El esquema FOC, es capaz de corregir incertidumbres paramétricas y mantener una buena regulación y estabilidad del motor cuando se encuentra sometido a perturbaciones. Para aplicar correctamente el esquema FOC, se debe de contar con una correcta estimación de la posición angular eléctrica del rotor, dado que, de lo contrario se presentarán problemas de eficiencia y rendimiento. Para evitar esto se debe de utilizar el modelo bifásico con marco de referencia rotatorio (d, q), es decir, tomando en consideración los efectos del error de alineación en el modelo d-q, cuando $\theta \neq 0$.

El ángulo formado entre el marco de referencia estacionario ($\alpha\text{-}\beta$) y el rotatorio ($d\text{-}q$) describe la posición angular eléctrica del rotor tal como se aprecia en la Fig. 1, donde se aprecia que un error de alineación $\tilde{\theta}$ entre los marcos de referencia real y medido o estimado siempre estará presente independientemente del método utilizado para obtener la información de la posición, o por una mala rutina de alineación. Las posiciones relativas entre los marcos de referencia se describen como $\theta - \tilde{\theta} = p\theta_r$, donde p es el número de pares de polos y θ_r es la posición angular mecánica del rotor medida por un sensor de posición, o $\theta - \tilde{\theta} = \hat{\theta}$, donde $\hat{\theta}$ es la posición angular eléctrica del rotor estimada por un observador y θ es la posición angular eléctrica del rotor. A ese desfase se le conoce como error de alineación o error de la posición angular eléctrica del rotor.

En la Fig. 2, se muestra el esquema FOC utilizado. En este, la entrada del controlador de velocidad es una señal de referencia ω_r^* y se retroalimenta la señal de velocidad

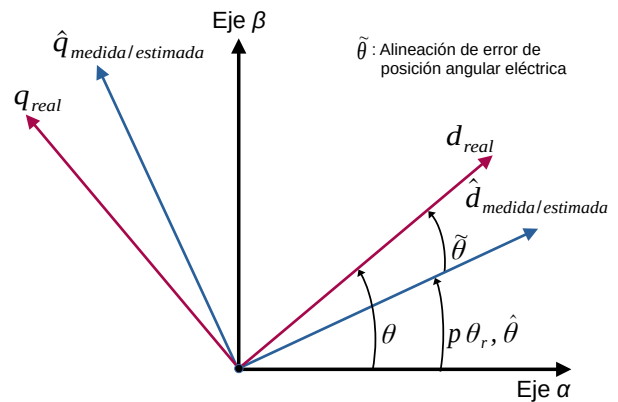


Fig. 1. Error de posición angular eléctrica entre el marco de referencia rotatorio real y estimado.

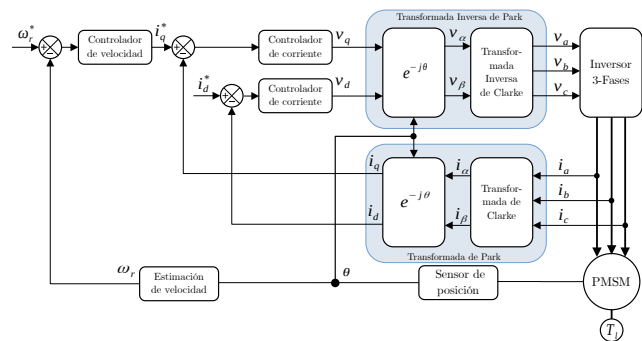


Fig. 2. Esquema de control de campo orientado (FOC).

del rotor calculada con base en los datos del sensor de posición. El error de estas señales en conjunto con la estructura de control genera una señal i_q^* que determina el par electromagnético necesario para regular la velocidad tomando en cuenta la referencia de entrada y se establece como entrada para la etapa de control de corriente.

2.2 Modelo en el marco referencia rotatorio

El comportamiento dinámico de un PMSM puede ser descrito por medio de un modelo matemático trifásico, que en este trabajo resulta ineficiente, motivo por el cual se utiliza un modelo bifásico equivalente. Utilizando la transformada de Clarke, se obtiene la representación del modelo bifásico en un sistema de referencia estacionario ($\alpha\text{-}\beta$) de la corriente del estátor. Al aplicar la transformada de Park al modelo anterior, se obtiene el modelo bifásico en un sistema de referencia rotatorio ($d\text{-}q$).

Inspirándose en el trabajo de (Aldrete-Maldonado et al., 2023), se toma en consideración que $\mathbf{x} = [i_d, i_q, \omega_r]^T$, y se realiza una representación como un sistema de estado extendido como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \Phi(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{v}) + \Delta(\mathbf{x}, \tilde{\theta}, t), \quad (1a)$$

$$\dot{\theta} = p\omega_r, \quad (1b)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \quad (1c)$$

donde la representación matricial en espacio de estados del modelo d - q se define como

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R}{L} & -\frac{\psi}{L} \\ 0 & \frac{K}{J} & -\frac{F}{J} \end{bmatrix}, \Delta(\mathbf{x}, \tilde{\theta}, t) = \begin{bmatrix} \delta_d \\ \delta_q \\ \delta_\omega \end{bmatrix}, \quad (2a)$$

$$\Phi(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} p\hat{\omega}_r i_q + \frac{1}{L} v_d \\ -p\hat{\omega}_r i_d + \frac{1}{L} v_q \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2b)$$

donde $\mathbf{v}(t) = [v_d(t), v_q(t)]^T$ es el vector de entrada de control. En (2), R es la resistencia del estator, L es la inductancia del estator, K_m es la constante del par, Y es el enlace de flujo del imán del rotor, J es la inercia del rotor, F es la constante de fricción viscosa, T es el par de carga, mientras que i_d y i_q corresponden a las corriente d y q respectivamente, y ω_r es la velocidad del PMSM.

Las funciones δ_d y δ_q representan la fuerza contraelectromotriz generada por el error de posición angular. Estas funciones δ son descritas a continuación

$$\delta_d(\tilde{\theta}, \omega_r) = \frac{\psi}{L} p\omega_r \sin(\tilde{\theta}), \quad (3a)$$

$$\delta_q(\tilde{\theta}, \omega_r) = 2\frac{\psi}{L} p\omega_r \sin^2\left(\frac{\tilde{\theta}}{2}\right), \quad (3b)$$

$$\delta_\omega(\tilde{\theta}, i_d, i_q) = -2\frac{K}{J} i_q \sin^2(\tilde{\theta}) + \frac{K}{J} i_d \sin(\tilde{\theta}). \quad (3c)$$

3. DISEÑO DEL FILTRO DE KALMAN EXTENDIDO

A continuación, se detalla el diseño de un EKF, capaz de estimar las corrientes i_d , i_q , y la velocidad ω_r . Así mismo, se describe el algoritmo utilizado para el EKF, que además de estimar las dos corrientes y la velocidad, estima la posición angular eléctrica, tal como se muestra

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\hat{\mathbf{x}} + \Phi(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{v}) + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}), \quad (4a)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = p\hat{\omega}_r + l_\theta p\hat{\omega}_r \tilde{i}_d, \quad (4b)$$

donde $\hat{\mathbf{x}}(t) = [\hat{i}_d, \hat{i}_q, \hat{\omega}_r]^T$ define el vector de estado estimado de $\mathbf{x}(t)$, mientras que \mathbf{L} es la matriz de ganancia de diseño del EKF y l_θ es la ganancia de diseño para la posición.

El error de observación se define como $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ y $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$. Por lo tanto, tomando en consideración (1) y (4), se obtiene la dinámica del error del observador

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}_O \tilde{\mathbf{x}} + \Delta(\mathbf{x}, \tilde{\theta}, t), \quad (5a)$$

$$\dot{\tilde{\theta}} = p\tilde{\omega}_r - l_\theta p\hat{\omega}_r \tilde{i}_d, \quad (5b)$$

en donde la ecuación (5b) es deducida en el trabajo de (Aldrete-Maldonado et al., 2023).

La ecuación de Riccati resulta fundamental para la implementación de un EKF, dado que resolver dicha ecuación para \mathbf{P} resulta en la obtención de la matriz de covarianza del error para el filtro cuando este se encuentra realizando una estimación. En (6) se muestra la ecuación de Riccati considerada para este filtro

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P}\mathbf{A}(t)^T + \mathbf{A}(t)\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{P} + \mathbf{Q}. \quad (6)$$

Se utiliza la solución de la ecuación (5b) para generar la matriz $\mathbf{A}(t)$ mostrada en (7), que corresponde al jacobiano de la ecuación (1a), la cual es definida como,

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & p\omega_r & \frac{\psi}{L} p \sin(\tilde{\theta}) \\ -p\omega_r & -\frac{R}{L} & 2\frac{\psi}{L} p \sin^2(\tilde{\theta}) - \frac{\psi}{L} \\ \frac{K}{J} \sin(\tilde{\theta}) & \frac{K}{J} (1 - 2\sin^2(\tilde{\theta})) & -\frac{F}{J} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Para estimar i_d , i_q y ω_r , se toma en consideración una matriz identidad de salida \mathbf{C} , mientras que \mathbf{Q} es una matriz simétrica y positiva.

Se procede a calcular la matriz de ganancia \mathbf{L} para su aplicación en el filtro con la siguiente ecuación

$$\mathbf{L} = \mathbf{P}\mathbf{C}^T. \quad (8)$$

Debido al término de corrección en (4b), la derivada $\dot{\hat{\theta}}$ difiere de $\hat{\omega}_r$ calculada por (4a). Retroalimentar $\hat{\theta}$ al controlador PI de velocidad resulta una práctica ideal, sin embargo, la derivación computacional puede generar ruido en la señal afectando directamente el control. Esta problemática es resuelta considerando

$$\hat{\omega}_r^c = \hat{\omega}_r + \text{FPB}(l_\theta \tilde{i}_d \hat{\omega}_r). \quad (9)$$

donde $\text{FPB}(\cdot)$ es un filtro de paso bajo de primer orden y $\hat{\omega}_r^c$ es la velocidad angular estimada para retroalimentar. La ecuación (9) es una aproximación a la derivada de la posición angular eléctrica (4b).

4. RESULTADOS

Se comprueba el desempeño del EKF diseñado, mediante la realización de emulaciones de alta precisión. Se consideran los parámetros que se presentan en la Tabla 1, que corresponden a un PMSM MBE.300E.500.

4.1 Emulaciones

Con la finalidad de realizar las emulaciones, se utilizó la plataforma de desarrollo Technosoft® MCK28335 Kit C-Pro Digital Control. Se establece una desalineación inicial de $\tilde{\theta}_0 = \pi/5$, la cual es la condición inicial de la ecuación (5b). Las condiciones iniciales del EKF se establecen en

Tabla 1. Parámetros y especificaciones del motor MBE.300E.500.

| Símbolos | Valores | Unidades |
|----------|-----------------------|------------------|
| R | 4.3 | Ω |
| L | 3.56×10^{-4} | H |
| K | 36.8×10^{-3} | Nm/A |
| ψ | 24.5×10^{-3} | Nm/A |
| p | 1 | |
| F | 3×10^{-6} | Nms |
| J | 1.1×10^{-6} | kgm ² |

ceros. La matriz Q seleccionada para resolver la ecuación de Riccati es

$$Q = \begin{bmatrix} 12 \times 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 2.725 \times 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \times 10^7 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Para lograr resolver la ecuación de Riccati, se utiliza el algoritmo Runge-Kutta de 4to orden, y se toma en consideración un tiempo de muestreo de 0.1 ms, lo que asegura un buen nivel de precisión del EKF. La Fig. 3 muestra el par de carga aplicado al motor en la prueba de control de velocidad el cual varía a lo largo del tiempo. Estas variaciones permiten simular escenarios reales en los que el motor se enfrenta a cargas variables, lo que genera perturbaciones en el comportamiento del motor, ante las cuales el filtro debe de adaptarse rápidamente para proporcionar estimaciones precisas.

Por su parte, la Fig. 4 muestra el error de estimación de la posición angular, $\tilde{\theta}$. Cabe resaltar que el promedio de este error es aproximadamente $\tilde{\theta}_0$, es decir, el error de desalineación inicial, que es representado por la línea punteada. Esta simulación presenta una raíz del error cuadrático medio (RMSE por sus siglas en inglés) de 8.435×10^{-2} .

La Fig. 5a en donde se muestra la comparativa entre la corriente i_d medida y su estimación calculada por el observador. Se presenta un desvío inicial en la señal de estimación la cual alcanza un pico máximo cuyo valor absoluto coincide con $\tilde{\theta}_0$. Por su parte, la Fig. 5b muestra el error de estimación de la simulación. La estimación de la corriente posee un RMSE de 8.904×10^{-3} .

En la Fig. 6a se muestra la comparativa entre la medición y la estimación de la corriente i_q . Las variaciones observadas en esta corriente reflejan de manera directa los cambios en el par de carga de la Fig. 3. Por otro lado, en la Fig. 6b se muestra el error de estimación de la corriente la cual mantiene un promedio cercano a 0 al contar con un RMSE de 1.052×10^{-2} .

Finalmente, la Fig. 7a muestra la velocidad estimada $\hat{\omega}_r$, al igual que la velocidad medida ω_r . Se observa que, a pesar de las variaciones en el par de carga, la velocidad estimada sigue de cerca a la velocidad medida. Los picos que se observan en algunos segmentos de la señal coinciden con los momentos en los cuales ocurre una variación en el par de carga de la Fig. 3. Por su parte,

la Fig. 7b, muestra el error de estimación del control de velocidad realizado respecto a la señal de referencia de entrada. El desempeño de la estimación de la velocidad resulta favorable al contar con un RMSE de 3.154.

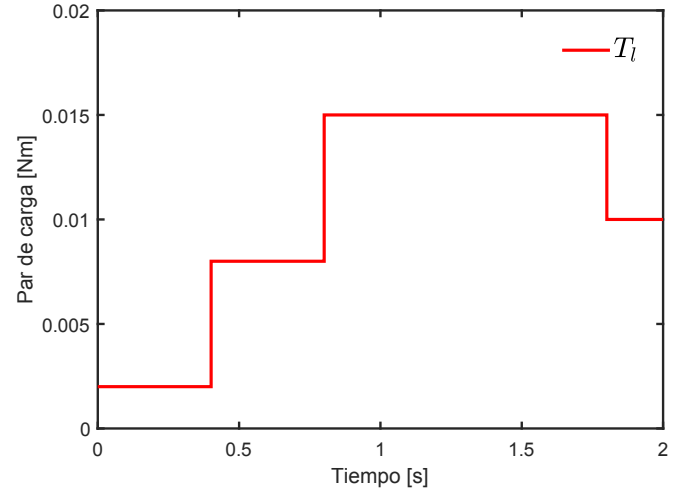


Fig. 3. Evolución del par de carga a través del tiempo.

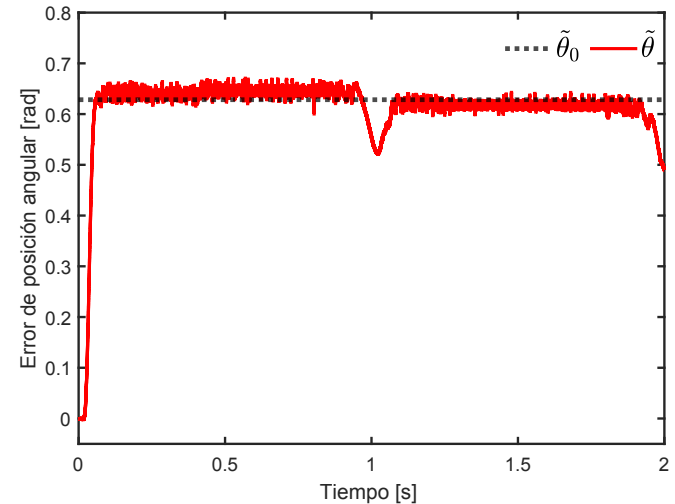
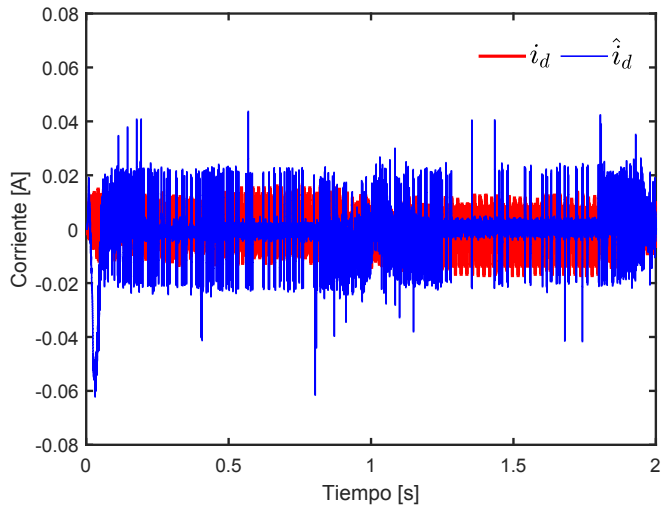
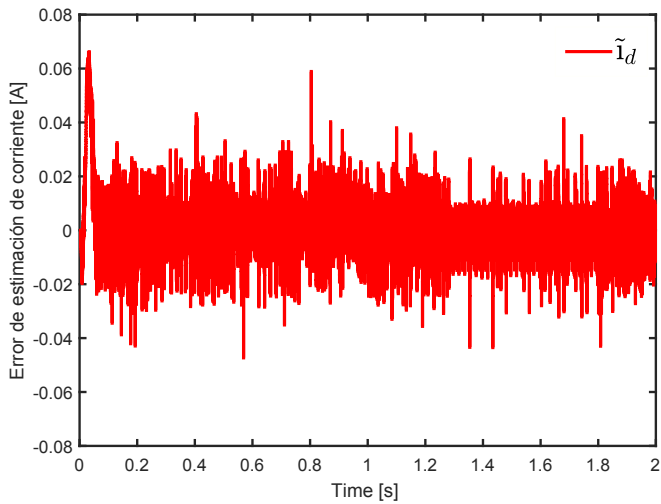


Fig. 4. Error de estimación de la posición angular eléctrica θ .

Estos resultados indican que la precisión y estabilidad de las estimaciones se mantuvieron consistentes y razonablemente cercanas a las mediciones reales, lo que permite un control eficiente del motor. Este comportamiento es respaldado por las gráficas de error de estimación de los estados del PMSM presentadas anteriormente, las cuales muestran una tendencia convergente hacia un margen de error mínimo. Además, los valores de RMSE para cada uno de los estados indican un nivel de error de estimación aceptable para un sistema de control como este. Es importante destacar que el EKF se desempeñó adecuadamente al adaptarse rápidamente tanto a las per-



(a)



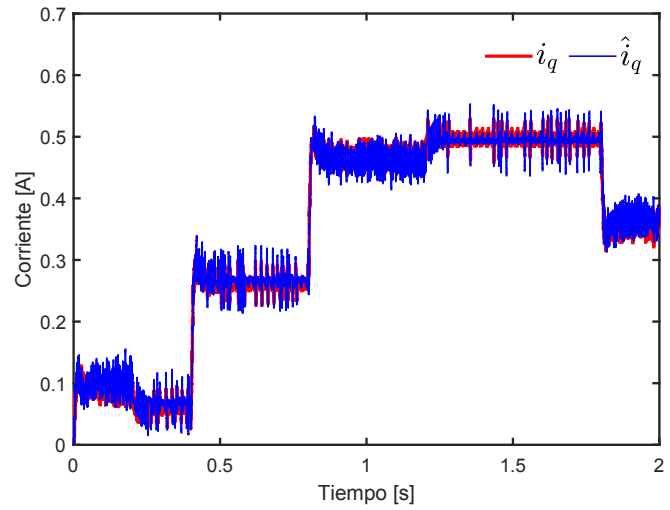
(b)

Fig. 5. Desempeño de la estimación de la corriente i_d . (a) Corrientes i_d y (b) error de estimación.

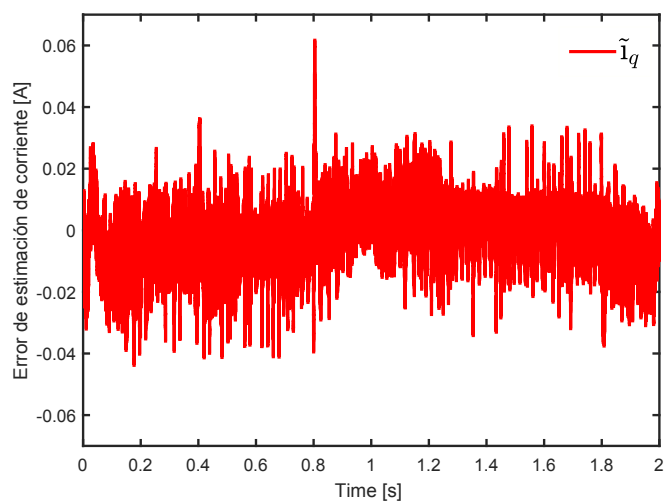
turbaciones iniciales como a las variaciones en las condiciones de operación.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se propuso el diseño de un algoritmo de EKF para estimar el error de posición eléctrica en un PMSM, así como la velocidad y las corrientes del sistema. El algoritmo incluye la solución de una ecuación de Riccati, que se define utilizando la matriz jacobiana derivada del modelo de referencia rotatorio, considerando el error de posición angular eléctrica entre los marcos de referencia real y estimado. Las estimaciones de las corrientes y de la posición angular han mostrado resultados satisfactorios. Adicionalmente, se obtuvieron resultados favorables en el desempeño del control y la estimación



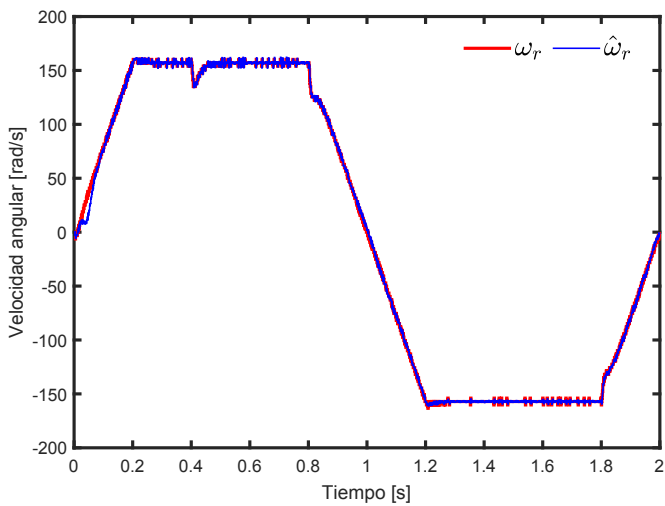
(a)



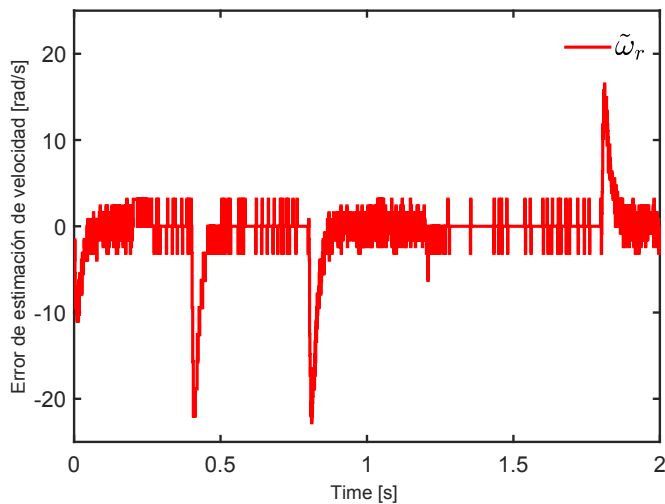
(b)

Fig. 6. Desempeño de la estimación de la corriente i_q . (a) Corrientes i_q y (b) error de estimación.

de velocidad en un entorno de emulación, tomando en consideración que se realizó un desalineado intencional de los campos magnéticos del rotor y estátor, así como el hecho de que el PMSM fue sometido a un par de carga variable en el tiempo, por lo que se concluye que se cumplió adecuadamente el objetivo propuesto para este trabajo. Como trabajo futuro se considera la aplicación de este control de velocidad bajo un ambiente experimental en laboratorio haciendo uso de un PMSM físico. Una aplicación que puede hacer uso de este trabajo, es la utilización de la estimación del error de posición para la detección de fallas en PMSM.



(a)



(b)

Fig. 7. Desempeño del control de velocidad ω_r . (a) Seguimiento de velocidades y (b) error de estimación.

REFERENCIAS

Aldrete-Maldonado, C., Ramirez-Villalobos, R., and Coria, L.N. (2023). Estimation of electrical angular position and load torque for sensorless control design in permanent magnet synchronous motor. *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático*, 133–138.

Allaoui, S., Laamari, Y., Chafaa, K., and Saad, S. (2021). Position and speed estimation of pmsm based on extended kalman filter tuned by biogeography-based-optimization. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 54(4).

Aravind, M., Saikumar, N., and Dinesh, N. (2017). Optimal position control of a dc motor using lqg with ekf. In *2017 international conference on mechanical, system and control engineering (ICMSC)*, 149–154. IEEE.

Bi, G., Zhao, N., Zhang, G., Jing, R., Wang, G., and Xu, D. (2021). Current vector angle adaptive adjustment based rotor position offset error suppression method for sensorless pmsm drives. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 36(9), 10536–10547.

Hernández Ramírez, J.M. et al. (2022). Implementación de un filtro de kalman extendido en tiempo real.

Hong, D.K., Hwang, W., Lee, J.Y., and Woo, B.C. (2017). Design, analysis, and experimental validation of a permanent magnet synchronous motor for articulated robot applications. *IEEE Transactions on Magnetics*, 54(3), 1–4.

Loganayaki, A. and Kumar, R.B. (2019). Permanent magnet synchronous motor for electric vehicle applications. In *2019 5th international conference on advanced computing & communication systems (ICACCS)*, 1064–1069. IEEE.

Nordin, M.I., Lazi, J.M., Talib, M.H.N., and Ibrahim, Z. (2022). Speed sensorless control for pmsm drives using extended kalman filter. *Jurnal Teknologi-Sciences & Engineering*, 84(1), 77–83.

Termizi, M.S., Lazi, J.M., Ibrahim, Z., Talib, M.H.N., Aziz, M., and Ayob, S. (2017). Sensorless pmsm drives using extended kalman filter (ekf). In *2017 IEEE Conference on Energy Conversion (CENCON)*, 145–150. IEEE.

Tian, G., Yan, Y., Jun, W., Ru, Z.Y., and Peng, Z.X. (2018). Rotor position estimation of sensorless pmsm based on extended kalman filter. In *2018 IEEE International Conference on Mechatronics, Robotics and Automation (ICMRA)*, 12–16. IEEE.

Ton, T.D., Hsieh, M.F., and Chen, P.H. (2021). A novel robust sensorless technique for field-oriented control drive of permanent magnet synchronous motor. *IEEE Access*, 9, 100882–100894.

Tondpoor, K., Saghaiannezhad, S.M., and Rashidi, A. (2020). Sensorless control of pmsm using simplified model based on extended kalman filter. In *2020 11th Power Electronics, Drive Systems, and Technologies Conference (PEDSTC)*, 1–5. IEEE.

Tripathi, R.P., Singh, A.K., Gangwar, P., and Verma, R.K. (2022). Sensorless speed control of dc motor using ekf estimator and tsf fuzzy logic controller. *Automatika*, 63(2), 338–348.

Yildiz, R., Barut, M., and Demir, R. (2020). Extended kalman filter based estimations for improving speed-sensored control performance of induction motors. *IET Electric Power Applications*, 14(12), 2471–2479.