

# Tuning of an I-PD Controller Applied to a Servo System Using the Differential Evolution Algorithm <sup>\*</sup>

Marcos Mejía-Delgadillo <sup>\*</sup>  
Rubén Alejandro Garrido Moctezuma <sup>\*</sup>  
Efrén Mezura Montes <sup>\*\*</sup>

<sup>\*</sup> CINVESTAV, Departamento de Control Automático (e-mail: marcos.mejia@cinvestav.mx).

<sup>\*\*</sup> Instituto de Investigaciones en Inteligencia Artificial, Universidad Veracruzana, Mexico (e-mail: emezura@uv.mx)

---

**Resumen** This work focuses on tuning of an I-PD controller using the Differential Evolution (ED) algorithm. The cost function employed in this research aims to minimize both the tracking error and the energy consumption of the controller. The ED algorithm shows satisfactory results in finding suitable gain values for the I-PD controller, which were validated on an experimental platform. Additionally, the study highlights the importance of incorporating the stability conditions imposed to the controller gains as constraints in the tuning process to ensure that the solutions provided by the ED algorithm produce a stable closed-loop system.

**Keywords:** I-PD control, Differential Evolution, Servo System, Controller Tuning, Real-Time Control

---

## 1. INTRODUCCIÓN

La sintonización de controladores es un tópico importante tanto en la teoría como en la práctica. Existen muchas reglas de sintonización de controladores las cuales incluyen los métodos propuestos por Ziegler y Nichols (1942), el método propuesto por Morari (1983) basado en el principio del modelo interno y el método propuesto por Youla et al. (1976) en donde se minimiza el criterio ISTE (Integral Square Time Error).

Los algoritmos de optimización basados en meta-heurísticas se han aplicado en diferentes áreas tales como la termodinámica en Su and Zhao (2024), la industrialización en la construcción He et al. (2024), el desarrollo de algoritmos basados en sistemas biológicos Hubálovská et al. (2024), la salud Insley et al. (2024), la microelectrónica Kitade et al. (2024) y la antropomorfología Lu et al. (2024), entre otras.

Dentro de los algoritmos de optimización se encuentra el algoritmo de Evolución Diferencial (ED) el cual se emplea en este trabajo. Recientemente se han hecho trabajos interesantes en torno al algoritmo de ED Li et al. (2024) en donde se provee una metodología para la optimización de la estructura y parámetros de una red neuronal convolucional; el trabajo de Zameer et al. (2024) los cuales mitigan las complejidades de la optimización

multivariada orientada a la aplicación de un transductor de banda ancha, y el trabajo de Zhang et al. (2024) el cual mejora la eficiencia del algoritmo de ED basándose en la adaptación a escala evolutiva (ESADE).

Existen varias publicaciones previas sobre el empleo de meta-heurísticas a la sintonización de controladores aplicados a servo sistemas basados en motores de CD Razmjoo et al. (2020), Agarwal et al. (2018), Hekimoğlu (2019), Rodríguez-Molina et al. (2019), Puangdownreong (2018), Çelik and Karayel (2024). En estas referencias se sintonizan controladores Proporcional Integral Derivativo (PID) tanto de orden entero como fraccionario mediante meta-heurísticas tales como el algoritmo de Evolución Diferencial, la Optimización por Enjambre de Partículas y el algoritmo de optimización Whale, entre otras. El objetivo de control es la regulación de la velocidad de un motor de CD. Un problema con los enfoques de sintonización anteriores es el hecho de no toman en cuenta la estabilidad del sistema en lazo cerrado, es decir, el algoritmo de optimización puede generar ganancias en el controlador que a su vez pueden producir un sistema en lazo cerrado inestable.

En contraste con las referencias mencionadas anteriormente, el presente trabajo expone, empleando el algoritmo de ED, una propuesta de optimización para un controlador Integral Proporcional Derivativo (I-PD) orientado a la regulación de posición de un motor de CD. Las restricciones impuestas a las ganancias del controlador I-PD por las condiciones de estabilidad del sistema en lazo

---

<sup>\*</sup> El primer autor agradece a CONAHCYT-México por su apoyo a través de la beca doctoral 1008777.

Variable	Descripción
$V_a$	Voltaje de alimentación del motor
$R_a$	Resistencia de armadura
$L_a$	Inductancia de armadura
$i_a$	Corriente de armadura
$V_b$	Fuerza contraelectromotriz
$T_e$	Par electromagnético generado por el motor
$T_L$	Par de carga
$J_m$	Constante de inercia
$B_m$	Constante de fricción viscosa
$K_b$	Constante de la fuerza contraelectromotriz
$K_A$	Constante de amplificación
$K$	Constante de par del motor

Tabla 1. Variables y constantes de un motor de CD.

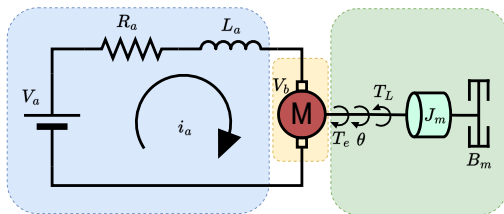


Figura 1. Diagrama de un motor de CD.

cerrado se toman en cuenta para definir el conjunto de soluciones factibles dentro del problema de optimización.

El resto de esta presentación es el siguiente. En la Sección 2 se describen el modelo de un motor de CD, el controlador I-PD y el algoritmo de Evolución Diferencial. La sintonización del controlador I-PD se muestra en la Sección 3 y la Sección 4 reporta los resultados experimentales. Esta presentación termina con algunas conclusiones y da algunas perspectivas sobre trabajo futuro.

## 2. MARCO TEÓRICO

### 2.1 Modelo matemático de un motor de CD

Un servo sistema basado en un motor de CD se compone del motor de CD, un amplificador de potencia y un sensor de posición. El modelo de un motor de CD puede descomponerse a su vez en dos subsistemas: un subsistema eléctrico y un subsistema mecánico como se muestra en la Figura 1. Las variables y constantes de estos se encuentran en la Tabla 1.

El modelo del subsistema eléctrico se obtiene mediante la aplicación de la segunda ley de Kirchhoff correspondiente a la suma de voltajes en una malla con lo cual se obtiene la ecuación siguiente:

$$R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + V_b = V_a \quad (1)$$

De manera análoga al caso anterior, el modelo del subsistema mecánico se obtiene mediante la aplicación de la segunda ley de Newton para sistemas mecánicos rotacionales obteniéndose la siguiente ecuación:

$$J_m \frac{d^2\theta}{dt^2} + B_m \frac{d\theta}{dt} + T_L = T_e \quad (2)$$

La conexión entre ambos subsistemas se logra mediante la fuerza contra-electromotriz descrita por la relación siguiente:

$$V_b = K_b \frac{d\theta}{dt} \quad (3)$$

Asimismo, se utilizan dos relaciones más, correspondientes a la relación Par-Corriente y al amplificador de potencia (4):

$$T_e = K i_a, \quad V_a = K_A u \quad (4)$$

Aplicando la transformada de Laplace a las ecuaciones (1) y (2) correspondientes al modelo obtenido del subsistema eléctrico y mecánico, además de sustituir las relaciones previamente descritas (3) y (4) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} K_A U(s) - K_b s \theta(s) &= (R_a + L_a s) I_a(s) \\ K I_a(s) - T_L(s) &= s(J_m s + B_m) \theta(s) \end{aligned} \quad (5)$$

La ecuación (5) permite la obtención de la siguiente función de transferencia:

$$\frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{K K_A}{s(L_a J_m s^2 + (L_a B_m + R_a J_m)s + R_a B_m + K_b K)} \quad (6)$$

Se divide la función de transferencia entre  $R_a J_m$  y si se despreja la dinámica eléctrica, i.e.  $\frac{L_a}{R_a} \approx 0$  se obtiene:

$$\frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{K K_A}{R_a J_m}}{s \left( s + \frac{R_a B_m + K_b K}{R_a J_m} \right)} = \frac{b}{s(s+a)} \quad (7)$$

donde:

$$a = \frac{R_a B_m + K_b K}{R_a J_m} > 0, \quad b = \frac{K K_A}{R_a J_m} > 0 \quad (8)$$

### 2.2 Algoritmo I-PD

La ley de control empleada para controlar al servosistema corresponde a un controlador I-PD similar al descrito en Ogata (2002). En la Figura 2 se muestra como interactúa este controlador con el modelo (7). Una ventaja del controlador I-PD sobre el controlador PID clásico con estructura paralela es el hecho de que no se producen sobretiros en el sistema en lazo cerrado ante entradas escalón debido a la ausencia de ceros en la función en lazo cerrado. Esta característica es conveniente en la regulación en posición de servo sistemas cuando la referencia cambia abruptamente. Notar que la acción integral suaviza el efecto de una entrada escalón y permite contrarrestar el efecto de perturbaciones de par, lo cual no es posible con el integrador que posee el modelo del servosistema.

El controlador I-PD se muestra en la ecuación (9) donde  $K_p$  corresponde a la constante proporcional,  $K_i$  es la constante integral y  $K_d$  es la constante derivativa:

$$\begin{aligned} u &= K_p K_i \int_0^t e d\tau - K_p y - K_d \frac{dy}{dt} \\ e &= y_d - y \end{aligned} \quad (9)$$



Tabla 3. Parámetros del algoritmo de Evolución Diferencial

Parámetro	Variable	Valor
Tamaño de la población	$N_p$	30
Número de variables	$D$	3
Probabilidad de cruza	$C_r$	0.9
Número de generaciones	$g_{max}$	50

y superior para la señal de control, ya que físicamente el amplificador que impulsa al motor tiene un rango de voltaje de entrada finito el cual cumple con las desigualdades (17):

$$-10 \leq u \leq 10 \quad (17)$$

Adicionalmente, un requerimiento crítico en el problema de optimización es asegurar estabilidad en el sistema en lazo cerrado por lo que se tomaron en cuenta como restricción las condiciones del criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz (11).

### 3.2 Función de costo

La función de costo a minimizar para resolver el problema de sintonización del controlador I-PD es:

$$J(e, u) = \omega_1 \int_0^t \left( \frac{e(\tau)}{15} \right)^2 d\tau + \omega_2 \int_0^t \left( \frac{u(\tau)}{10} \right)^2 d\tau \quad (18)$$

donde, los valores de las constantes 10 y 15 son resultado de la normalización de cada uno de los términos de la función de costo respecto a los valores máximos permisibles. Los pesos  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son los que ponderarán la función de costo. La función de costo (18) es semejante a la función de costo cuadrática empleada en el Regulador Cuadrático Lineal, sin embargo, en (18) no se considera todo el estado, el cual correspondería a las señales de error  $e$  y a la velocidad  $-\dot{y}$ , esto significa que en (18) no se pondera la señal de velocidad.

### 3.3 Planteamiento del problema de optimización

De manera formal, el planteamiento del problema de optimización que permite la sintonización del controlador I-PD queda expresado de la siguiente manera:

$$J(e, u) = \min_X \left[ \omega_1 \int_0^t \left( \frac{e(\tau)}{15} \right)^2 d\tau + \omega_2 \int_0^t \left( \frac{u(\tau)}{10} \right)^2 d\tau \right]$$

$$X = [K_p \ K_i \ K_d] = [x_1 \ x_2 \ x_3]$$

Sujeto a:

$$g_1(X) = a + K_d b > 0$$

$$g_2(X) = x_1 > 0$$

$$g_3(X) = x_2 > 0$$

$$g_4(X) = (a + x_3 b) - x_2 > 0$$

$$0 \leq x_1 \leq 10$$

$$0 \leq x_2 \leq 8$$

$$0 \leq x_3 \leq 1.5$$

$$-10 \leq u \leq 10$$

(19)

El Pseudo código para la implementación del algoritmo de Evolución Diferencial aplicado a la sintonización del controlador I-PD se visualiza en el Algoritmo 1:

**Algoritmo: 1** Pseudocódigo del algoritmo ED aplicado a la sintonización del controlador IP-D

**Señales:**

- 1:  $u(t)$ : Controlador
- 2:  $y(t)$ : Salida
- 3:  $y_d(t)$ : Respuesta deseada
- 4:  $e(t) = y_d(t) - y(t)$ : Error

**Entrada:**

- 5:  $f(x)$ ,  $X = (x_1, x_2, x_3) = (K_p, K_i, K_d)$
- 6:  $N_p = 50$ ,  $G_{max} = 50$ ,  $F = \text{rand}(0,1)$ ,  $C_r = 0.9$
- 7: Inicializar la población aleatoria
- 8:  $x_{i,j,0} = x_j^L + \text{rand}_j(0,1) \cdot (x_j^U - x_j^L)$
- 9: Evaluar  $X_{i,g}$ ,  $g_i(X_{i,g})$ ,  $h_k(X_{i,g})$
- 10: **for**  $t = 1 : G_{max}$  **do**
- 11:     **for**  $i = 1 : N_p$  **do**
- 12:          $i_1, i_2, i_3 \in [1, N_p]$  **Donde:**  $i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq i$
- 13:          $u_{i,j,g} = \begin{cases} \nu_{i,j,g}, & \text{Si } (\text{rand}_j(0,1) \leq C_r \text{ o } j = j_{rand}) \\ x_{i,j,g}, & \text{Por otro lado} \end{cases}$
- 14:         **Evaluar**  $U_{i,g}$  en el sistema dinámico y verificar  $g_i(U_{i,g}) \leq 0$ ,  $h_k(U_{i,g}) = 0$
- 15:          $X_{i,g+1} = \begin{cases} U_{i,g}, & \text{Si } f(U_{i,g}) \leq f(X_{i,g}) \\ X_{i,g}, & \text{Si } f(U_{i,g}) > f(X_{i,g}) \end{cases}$
- 16:     **end for**
- 17: **end for**

## 4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Para la implementación del algoritmo de Evolución Diferencial se utilizaron los parámetros que se observan en la tabla (3) cuyos valores fueron propuestos de manera empírica. Los valores de los parámetros empleados en el modelo (7) se obtienen mediante el método de Mínimos Cuadrados, los valores son:  $a = 2$  y  $b = 50$ . Se consideraron tres casos en la sintonización del controlador I-PD los cuales corresponden a diferentes valores de los pesos  $\omega$  en la función de costo (18). Variando el valor de  $\omega_1$  y  $\omega_2$  se modifica el énfasis de la variable que se desea minimizar, ya sea el error de posición o el valor de la señal de control. En la Prueba 1 se da énfasis a la minimización de la señal de control, la Prueba 2 pondera de igual manera al error de posición y a la señal de control, y en la Prueba 3 se da prioridad a la minimización del error. Los valores de los pesos para cada prueba se visualizan en la Tabla 4 El objetivo de control es la regulación de la posición angular en un servosistema empleando como señal de referencia una onda cuadrada filtrada. Las Figuras 3, 4 y 5 muestran respectivamente la posición angular, el error de posición y la señal de control para cada prueba.

En el caso de la Prueba 1 se observa que la evolución de la posición es más lenta comparada con las Pruebas 2 y 3. También se observa que el error de posición disminuye más lento respecto de los errores correspondientes a las Pruebas 2 y 3. Sin embargo, la señal de control es la más pequeña de las tres. Esto comprueba que la ponderación de la Prueba 1 minimiza el valor de la señal de control. Por otro lado, en la Prueba 3 sucede lo contrario, es

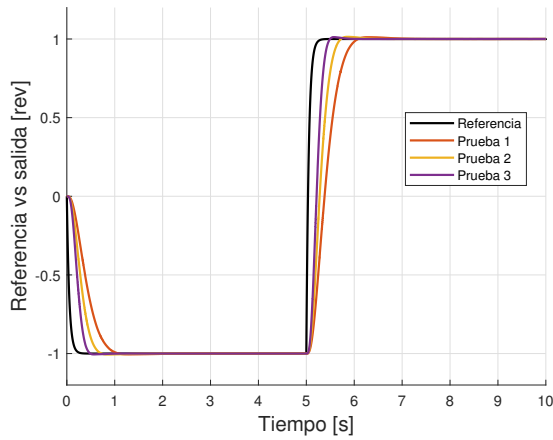


Figura 3. Referencia vs posición angular en las tres pruebas.

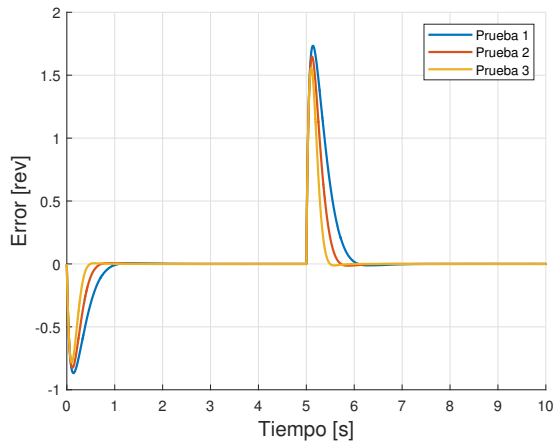


Figura 4. Gráfica experimental de los errores de seguimiento

decir, la señal de control es la mayor en las tres pruebas pero el error de posición decrece más rápido, lo cual muestra que en esta prueba se pondera más al error de posición. Finalmente, la Prueba 2 muestra resultados intermedios, es decir, la rapidez con la que la señal de posición evoluciona en el tiempo es mayor respecto a la Prueba 1 y menor que en la Prueba 2. Un comportamiento similar se observa en la evolución de la señal de error de posición. Notar también que el pico inicial de la señal de control toma un valor intermedio a los correspondientes a las Pruebas 1 y 3. También conviene mencionar que los valores de las ganancias mostradas en la Tabla 5 producen respuestas estables. Esa tabla también muestra el índice de desempeño  $J(e, u)$ . La Tabla 6 muestra la comparación de los índices individuales para la señal de error  $I_e$  y la señal de control  $I_u$  para cada prueba en el intervalo  $t \in [0, 10]s$ :

$$I_e = \int_0^t e(\tau)^2 d\tau, \quad I_u = \int_0^t u(\tau)^2 d\tau \quad (20)$$

La Tabla 5 muestra que la ganancia proporcional tiene el mismo valor en todas las pruebas, i.e.  $K_p=9.9999$ . Esto se debe al límite físico de 10 impuesto en las restricciones de la optimización. Por otro lado, el incremento del peso  $\omega_1$

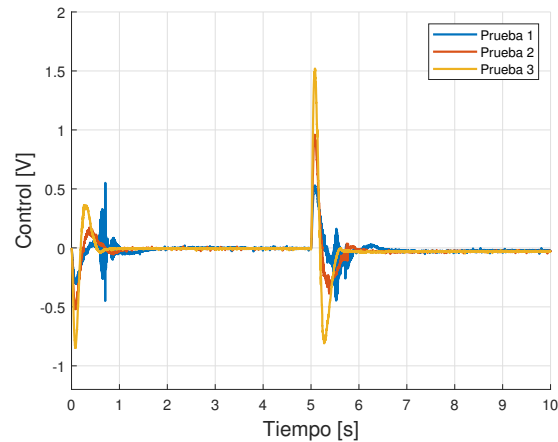


Figura 5. Gráfica de las señales de control.

Tabla 4. Pruebas

Prueba	$\omega_1$	$\omega_2$
1	0.2	0.8
2	0.5	0.5
3	0.8	0.2

Tabla 5. Variables de diseño obtenidas

Parámetro	Prueba 1	Prueba 2	Prueba 3
$x_1 = K_p$	9.9999	9.9999	9.9999
$x_2 = K_i$	2.7701	4.0549	5.8151
$x_3 = K_d$	1.3352	0.9693	0.7249
$J(e, u)$	1.4417	2.3759	2.5427

Tabla 6. Comparación cuantitativa de cada prueba

Prueba	$I_e$	$I_u$
Prueba 1	1100.2869	65.9467
Prueba 2	730.3538	138.3364
Prueba 3	492.9931	358.3438

produce un aumento de la ganancia integral  $K_i$  lo cual ocasiona una disminución rápida del error de posición. Notar también que una disminución del peso  $\omega_2$  produce una disminución de la ganancia derivativa  $K_d$ , es decir del amortiguamiento que genera el controlador I-PD, esto se traduce en una respuesta más rápida. Notar también que el índice  $J(e, u)$  aumenta conforme se incrementa  $\omega_1$  y disminuye  $\omega_2$ . Esto se debe a que se exige mayor esfuerzo, que se traduce en una señal de control más elevada, del sistema en lazo cerrado con el fin de minimizar rápidamente el error de posición.

Respecto a los resultados reportados en la Tabla 6, notar que el índice  $I_e$  está inversamente relacionado con el incremento del peso  $\omega_1$ , lo cual es de esperarse puesto que el aumento de este le da más relevancia a la disminución del error de posición. Por otro lado, el índice  $I_u$  tiene una relación inversa con el peso  $\omega_2$ , si este último disminuye, lo cual significa darle menos importancia a la señal de control, el índice  $I_u$  aumenta.

## 5. CONCLUSIONES

El presente trabajo muestra la implementación del algoritmo de Evolución Diferencial (ED) para sintonizar un controlador I-PD con el fin de regular la posición angular de un servosistema. La implementación del algoritmo de ED incluye como restricciones de búsqueda los valores límites de la señal de control y las restricciones impuestas por el Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz. Las pruebas experimentales muestran que la sintonización empleando el algoritmo de ED permite la selección de los pesos en la función de costo para dar más importancia a la señal del error de posición o a la señal de control. Esta característica permite balancear el consumo de energía y el error de posicionamiento. Una ventaja del algoritmo de ED sobre el Regulador Cuadrático Lineal es que permite incluir el uso explícito de restricciones. Además, el algoritmo de ED permite el empleo de funciones de costo no cuadráticas.

El método de sintonización propuesto puede aplicarse a sistemas lineales de alto orden en donde existen restricciones en la señal de control, en los estados así como limitaciones físicas impuestas por el sistema a controlar.

## REFERENCIAS

- Agarwal, J., Parmar, G., Gupta, R., and Sikander, A. (2018). Analysis of grey wolf optimizer based fractional order pid controller in speed control of dc motor. *Microsystem Technologies*, 24, 4997–5006.
- Belegundu, A.D. and Chandrupatla, T.R. (2019). *Optimization concepts and applications in engineering*. Cambridge University Press.
- Çelik, E. and Karayel, M. (2024). Effective speed control of brushless dc motor using cascade 1pdf-pi controller tuned by snake optimizer. *Neural Computing and Applications*, 1–16.
- Das, S. and Suganthan, P.N. (2011). Differential evolution: A survey of the state-of-the-art. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 15(1), 4–31. doi: 10.1109/TEVC.2010.2059031.
- He, Q., Li, X., Mao, W., Yang, X., and Wu, H. (2024). Research on vehicle frame optimization methods based on the combination of size optimization and topology optimization. *World Electric Vehicle Journal*, 15(3), 107.
- Hekimoğlu, B. (2019). Optimal tuning of fractional order pid controller for dc motor speed control via chaotic atom search optimization algorithm. *IEEE access*, 7, 38100–38114.
- Hubálovská, M., Hubálovský, Š., and Trojovský, P. (2024). Botox optimization algorithm: A new human-based metaheuristic algorithm for solving optimization problems. *Biomimetics*, 9(3), 137.
- Inasley, B., Bartkoski, D., Balter, P., Prajapati, S., Tailor, R., Jaffray, D., and Salehpour, M. (2024). Numerical optimization of longitudinal collimator geometry for novel x-ray field. *Physics in Medicine & Biology*, 69(10), 105004.
- Kitade, T., Kanda, R., Matsui, K., Nishikawa, A., Loesing, A., Fukunaga, I., and Sekiguchi, H. (2024). Optimization of gate structure for damageless microled thin films in optogenetic applications. *physica status solidi (a)*, 2300834.
- Li, J., Soradi-Zeid, S., Yousefpour, A., and Pan, D. (2024). Improved differential evolution algorithm based convolutional neural network for emotional analysis of music data. *Applied Soft Computing*, 153, 111262.
- Lu, Z., Xu, Z., Zhao, D., and Yang, T. (2024). Ankle joint motion recognition system and algorithm optimization based on plantar pressure. *Journal of Mechanics in Medicine and Biology*.
- Morari, M. (1983). Design of resilient processing plants—iii: A general framework for the assessment of dynamic resilience. *Chemical Engineering Science*, 38(11), 1881–1891.
- Ogata, K. (2002). *Modern control engineering*. Prentice Hall.
- Price, K., Storn, R.M., and Lampinen, J.A. (2006). *Differential Evolution: A Practical Approach to Global Optimization*. Springer Science & Business Media.
- Puangdownreong, D. (2018). Optimal pid controller design for dc motor speed control system with tracking and regulating constrained optimization via cuckoo search. *Journal of Electrical Engineering and Technology*, 13(1), 460–467.
- Razmjoooy, N., Vahedi, Z., Estrela, V.V., Padilha, R., and Monteiro, A.C.B. (2020). Speed control of a dc motor using pid controller based on improved whale optimization algorithm. In *Metaheuristics and Optimization in Computer and Electrical Engineering*, 153–167. Springer.
- Rodríguez-Molina, A., Villarreal-Cervantes, M.G., and Aldape-Pérez, M. (2019). An adaptive control study for the dc motor using meta-heuristic algorithms. *Soft Computing*, 23, 889–906.
- Storn, R. and Price, K. (1997). Differential evolution—a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*, 11(4), 341–359.
- Su, C.J. and Zhao, T. (2024). Collaborative optimization of thermal conductivity distribution and heat source layout based on bayesian optimization. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 224, 125324.
- Youla, D., Bongiorno, J., and Jabr, H. (1976). Modern wiener-hopf design of optimal controllers part i: The single-input-output case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21(1), 3–13.
- Zameer, A., Naz, S., and Raja, M.A.Z. (2024). Parallel differential evolution paradigm for multilayer electro-mechanical device optimization. *Modern Physics Letters B*, 2450312.
- Zhang, S.X., Hu, X.R., and Zheng, S.Y. (2024). Differential evolution with evolutionary scale adaptation. *Swarm and Evolutionary Computation*, 85, 101481.
- Ziegler, J.G. and Nichols, N.B. (1942). Optimum settings for automatic controllers. *Transactions of the American society of mechanical engineers*, 64(8), 759–765.