

# Control of delayed systems with two unstable poles using a multi-predictor based strategy.

E. Sixto Santamaria,\* L. A. Barragan Bonilla,\*  
J. F. Márquez Rubio,\* B. del Muro Cuéllar,\*  
M. A. Hernández Pérez\*\*

\* *Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Unidad Culhuacán, Instituto Politécnico Nacional, México D.F., 04430, México.*

\*\* *Instituto de Ingeniería, Universidad Veracruzana, Juan Pablo II, Boca del Río 94294, Veracruz, México.*

---

**Abstract:** The stability analysis of linear systems with time delay is difficult because the delay term appears in the characteristic equation when closing the loop inducing an infinite order system. In this work a strategy based on a multi-predictor for linear delayed systems with two unstable poles is proposed. This strategy allows to estimate the system signal before been delayed in order to use it in the control stage. The great advantage of the multi-predictor is that it can be used for this type of systems with any delay size. Also, the necessary and sufficient stability conditions for the multi-predictor scheme are obtained and the minimum number of sub-predictors necessary to have an adequate estimation of the signal is determined. Finally, to show the effectiveness of the proposed strategy, a simulation example is presented.

*Keywords:* linear systems, unstable systems, time delay, observer, PID controller.

---

## 1. INTRODUCCIÓN.

En teoría de control, el objetivo primordial, generalmente, es lograr la estabilidad de los sistemas dinámicos para poder implementar estrategias de control efectivas y mantener el sistema dentro de los parámetros deseados. Un caso especial de los sistemas dinámicos son los sistemas con retardo. En control de procesos, retardo se refiere al tiempo que transcurre desde que se realiza un cambio en la señal de entrada hasta que su efecto es percibido en la variable de salida (Camacho et al., 2019).

Los sistemas con retardo se encuentran en muchas aplicaciones de ingeniería, como el control en red, la transmisión de vídeo y las comunicaciones inalámbricas (Zhang et al., 2019). Otros casos en los que se encuentra el retardo de tiempo son en los procesos industriales, como el reactor químico, la cámara de combustión y la columna de destilación (Karan and Dey, 2019) .

Cuando el retardo del sistema es lo suficientemente pequeño puede ser despreciado al momento de diseñar una estrategia de control. Por otro lado, cuando el retardo de tiempo es considerablemente grande en comparación con la dinámica del sistema, el análisis de estabilidad se complica. Esto se debe a que, al cerrar el lazo del sistema, la ecuación característica presenta un número infinito de raíces. Por lo tanto, es necesario desarrollar

estrategias que consideren los efectos del retardo en la ecuación característica para analizar adecuadamente la estabilidad del sistema.

En las últimas décadas se han desarrollado numerosas estrategias para resolver los desafíos del control para los sistemas con retardo. Por ejemplo, en Rosas et al. (2019) se realiza un análisis en el dominio de la frecuencia y se establecen las condiciones suficientes para garantizar la existencia de un controlador básico estabilizador del tipo Proporcional (P), Proporcional-Integral (PI), Proporcional-Derivativo (PD) y Proporcional Integral Derivativo (PID) para sistemas retardados con un polo inestable y  $m$  ceros de fase mínima.

Una de las estrategias más populares para tratar sistemas con retardo, es el Predictor de Smith (SP) (Smith, 1957) el cual consiste en estimar la señal de interés antes de ser retardada. No obstante, un problema que presenta el SP, es que solo funciona para sistemas estables. Por lo que algunos autores han propuesto diversas modificaciones a este esquema para poder utilizarlo en sistemas inestables. Por ejemplo, en Barragan-Bonilla et al. (2022) se propone el diseño de un observador/predictor para sistemas retardados de alto orden con un polo en el origen y un polo inestable mediante una estrategia de estimación que tiene tres parámetros de ajuste y un controlador PID de dos grados de libertad para la etapa de control. Otro resultado

se presenta en Najafi et al. (2013), en el cual se propone un esquema multi-predictor para sistemas inestables con un retardo de tiempo grande. Este esquema consiste en una secuencia de sub-predictores acoplados en serie, cada uno de los cuales se encarga de la predicción de una pequeña parte del retardo, de modo que, en conjunto predican los estados para un retardo de tiempo grande. Con la señal estimada es posible diseñar un controlador que estabilice al sistema libre de retardo. En los trabajos de Fragoso-Rubio et al. (2019) y Hernández-Pérez et al. (2020), se proponen algunas modificaciones sobre el esquema multi-predictor de Najafi et al. (2013) para tratar sistemas de alto orden con retardo. Sin embargo, en dichos trabajos no se establece el número mínimo de sub-predictores necesarios para lograr una estimación adecuada sobre la señal de interés antes de ser retardada.

En este trabajo se aborda el problema de la estabilidad y control de sistemas lineales con dos polos inestables y retardo de tiempo, utilizando un esquema multi-predictor basado en el de Najafi et al. (2013) y un controlador PID. Además, se presentan las condiciones de estabilidad necesarias y suficientes para un esquema de inyección utilizado en el multi-predictor, así como la sintonización de los parámetros de diseño correspondientes. Como principal aportación, en este estudio se establece el número mínimo de sub-predictores necesarios para lograr una estimación adecuada de los estados en sistemas retardados con dos polos inestables.

El trabajo presenta el siguiente orden: en la Sección 2 se describen la clase de sistemas a tratar. En la Sección 3 se presentan los resultados preliminares donde se analiza la estabilidad de un esquema de inyección, el cual se usa en el multi-predictor. En la Sección 4 se presenta el esquema multi-predictor así como la prueba de convergencia y el resultado principal sobre el número mínimo de sub-predictores necesarios para una adecuada estimación sobre los estados del sistema. En la Sección 5 se presenta el diseño del control PID el cual utiliza la señal libre de retardo del multi-predictor. En la Sección 6 se muestra un ejemplo con los resultados en simulación. Finalmente, en la Sección 7 se exponen las conclusiones del trabajo.

## 2. CLASE DE SISTEMAS.

Consideremos el siguiente sistema inestable con retardo de tiempo,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)e^{-\tau s} = \frac{b}{(s - a_1)(s - a_2)}e^{-\tau s}, \quad (1)$$

donde  $U(s)$  y  $Y(s)$  son las señales de entrada y salida respectivamente,  $b$  es la ganancia del sistema,  $\tau \geq 0$  es el retardo de tiempo que se supone conocido y es constante,  $a_1, a_2 > 0$  son las posiciones de los polos inestables y  $G(s)$  es la función de transferencia libre de retardo.

Una estrategia de control clásico basada en una retroalimentación de salida, aplicada a (1) de la forma,

$$U(s) = [R(s) - Y(s)]C(s), \quad (2)$$

donde  $R(s)$  es la nueva entrada de referencia y  $C(s)$  es el controlador, produce un sistema en lazo cerrado dado por,

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)e^{-\tau s}}{1 + C(s)G(s)e^{-\tau s}}. \quad (3)$$

Es importante observar que el término  $e^{-\tau s}$  localizado en el denominador de la función de transferencia de (3), implica un sistema con un número infinito de polos, lo cual dificulta el análisis de estabilidad.

## 3. RESULTADOS PRELIMINARES.

En el siguiente resultado se presenta la condición de estabilidad para sistemas de segundo orden con dos polos inestables utilizando un controlador PD.

**Lema 1.** *Novella-Rodríguez et al. (2019), considere el sistema (1) y una ley de control dada por (2), donde  $C(s)$  es un controlador PD de la forma,  $C(s) = k_p(k_d s - 1)$ . Existen  $k_p$  y  $k_d$  que estabilizan al sistema en lazo cerrado  $\frac{Y(s)}{R(s)}$ , sí y solo sí,*

$$\tau < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2}}. \quad (4)$$

La ecuación característica de la función de transferencia en lazo cerrado asociado al Lema 1 esta dada por,

$$(s - a_1)(s - a_2) + (k_p k_d s - k_p) b e^{-\tau s} = 0 \quad (5)$$

Los parámetros estabilizantes del controlador PD asociados al Lema 1 se obtienen mediante las siguientes expresiones.

- La ganancia  $k_d$  se encuentra establecida por,

$$k_d > \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \tau, \quad (6)$$

- La ganancia  $k_p$  queda establecida por,

$$\frac{f(\omega_{c1})}{b} < k_p < \frac{f(\omega_{ci})}{b}, \quad (7)$$

donde:

$$f(\omega_{ci}) = \frac{\sqrt{(\omega_{ci}^2 + a_1^2)(\omega_{ci}^2 + a_2^2)}}{\sqrt{(1 + k_d^2 \omega_{ci}^2)}}, \quad (8)$$

con:

- $i = 1$  para  $M(\omega_{c1}) > 1$
- $i = 2$  para  $M(\omega_{c2}) > M(\omega_{c0})$
- $i = 0$  para  $M(\omega_{c0}) > M(\omega_{c2})$

La prueba del Lema 1 puede obtenerse considerando un enfoque en el dominio de la frecuencia, ver Novella-Rodríguez et al. (2019).

### 3.1 Esquema de inyección.

En esta subsección se muestra un resultado clave que establece las condiciones de estabilidad para un esquema de inyección como el que se muestra en la Fig. 1. Este esquema será utilizado posteriormente en el diseño del multi-predictor.

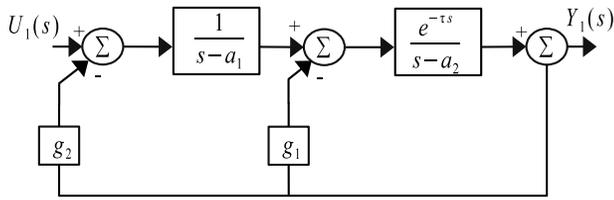


Fig. 1. Esquema de inyección de salida.

**Lema 2.** Considere el sistema (1) con una inyección de salida descrita en el esquema de la Fig. 1. Entonces, existen  $g_1$  y  $g_2$ , de modo que el sistema en lazo cerrado  $\frac{Y_1(s)}{U_1(s)}$  es estable sí y solo sí,

$$\tau < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2}}. \quad (9)$$

*Demostración 1.* Considere la función de transferencia  $\frac{Y_1(s)}{U_1(s)}$  de lazo cerrado del esquema de la Fig. 1, dada por,

$$\frac{Y_1(s)}{U_1(s)} = \frac{e^{-\tau s}}{(s - a_1)(s - a_2) + (g_1 s - (a_1 g_1 - g_2))e^{-\tau s}}, \quad (10)$$

donde su ecuación característica es,

$$(s - a_1)(s - a_2) + (g_1 s - (a_1 g_1 - g_2))e^{-\tau s} = 0. \quad (11)$$

Nótese que las ecuaciones características (5) y (11) son similares, por lo que se concluye que la condición de estabilidad para la ecuación (5) es la misma que para la ecuación (11). Observe que en la ecuación (11),  $g_1$  y  $g_2$  son parámetros libres de diseño, mientras que en la ecuación (5), son  $k_p$  y  $k_d$ . Entonces, la ecuación característica (11) es estable sí y solo sí  $\tau < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2}}$ .  $\square$

Los parámetros de  $g_1$  y  $g_2$  estabilizantes para el sistema de inyección son,

$$k_d f(\omega_{c1}) < g_1 < k_d f(\omega_{ci}), \quad (12)$$

$$g_2 = g_1 \left( a_1 - \frac{1}{k_d} \right), \quad (13)$$

donde los términos  $f(\omega_{c1})$  y  $f(\omega_{ci})$  están dadas por la expresión (8). Observe que la ecuación (13) depende de (12) ya que, cada valor de  $g_1$  está asociado a un único valor de  $g_2$ .

#### 4. ESTRATEGIA DE ESTIMACIÓN

Para el análisis, considere la planta dada por la ecuación (1) y una partición del retardo como,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)e^{-\tau s} = e^{-(\tau-\bar{\tau})s} G(s)e^{-\bar{\tau}s}, \quad (14)$$

donde  $\tau$  es el retardo de tiempo total de la planta y  $\bar{\tau}$  es el valor de la partición de dicho retardo, definida por la siguiente ecuación,

$$\bar{\tau} = \frac{\tau}{n}, \quad (15)$$

donde  $n$  es el número de particiones del retardo y a su vez es el número de sub-predictores del multi-predictor.

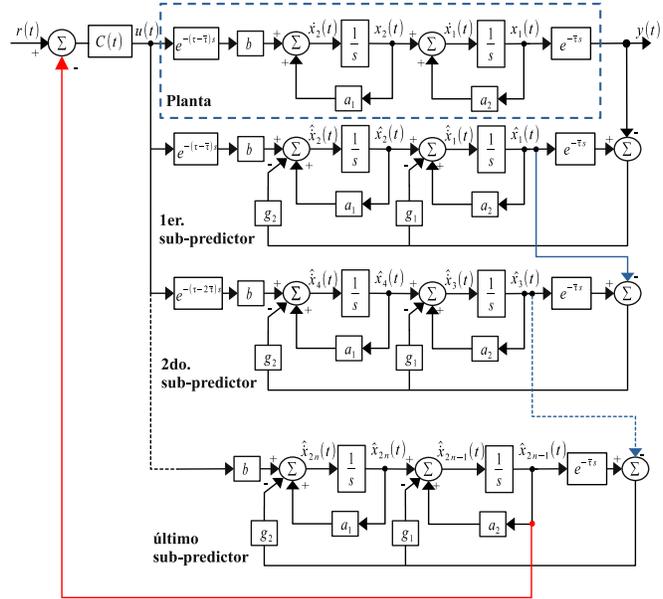


Fig. 2. Esquema multi-predictor propuesto con acción de control.

Considere una representación en variables de estados de la planta (14),

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a_2 x_1(t) + x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= a_1 x_2(t) + bu(t - (n-1)\bar{\tau}), \\ y(t) &= x_1(t - \bar{\tau}), \end{aligned} \quad (16)$$

donde  $n$  es el número de particiones del retardo. El primer sub-predictor para el sistema (14) se define como,

$$\begin{aligned} \hat{\hat{x}}_1(t) &= a_2 \hat{x}_1(t) + \hat{x}_2(t) - g_1 \hat{x}_1(t - \bar{\tau}) + g_1 x_1(t - \bar{\tau}), \\ \hat{\hat{x}}_2(t) &= a_1 \hat{x}_2(t) + bu(t - (n-1)\bar{\tau}) - g_2 \hat{x}_1(t - \bar{\tau}) + \dots \\ &\dots + g_2 x_1(t - \bar{\tau}). \end{aligned} \quad (17)$$

Los demás sub-predictores subsequentes para el sistema (14) se pueden definir de la forma general como,

$$\begin{aligned} \hat{\hat{x}}_i(t) &= a_2 \hat{x}_i(t) + \hat{x}_{(i+1)}(t) - g_1 \hat{x}_i(t - \bar{\tau}) + g_1 \hat{x}_{(i-2)}(t), \\ \hat{\hat{x}}_{(i+1)}(t) &= a_1 \hat{x}_{(i+1)}(t) + bu(t - (n - \frac{i+1}{2})\bar{\tau}) - g_2 \hat{x}_i(t - \bar{\tau}) + \dots \\ &\dots + g_2 \hat{x}_{(i-2)}(t), \\ &\vdots \\ \hat{\hat{x}}_{(2n-1)}(t) &= a_2 \hat{x}_{(2n-1)}(t) + \hat{x}_{(2n)}(t) - g_1 \hat{x}_{(2n-1)}(t - \bar{\tau}) + \dots \\ &\dots + g_1 \hat{x}_{(2n-3)}(t), \\ \hat{\hat{x}}_{(2n)}(t) &= a_1 \hat{x}_{(2n)}(t) + bu(t) - g_2 \hat{x}_{(2n-1)}(t - \bar{\tau}) + g_2 \hat{x}_{(2n-3)}(t), \end{aligned} \quad (18)$$

con  $i \in \{3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$ . Por lo tanto, las ecuaciones (17) y (18) forman el conjunto de sub-predictores para el sistema original. De esta manera, el multi-predictor propuesto en este trabajo para el sistema dado por (14) se muestra en la Fig. 2. A continuación se presenta el resultado más importante del trabajo, el cual establece el número de particiones mínimas en el retardo para obtener una adecuada estimación del multi-predictor.

**Teorema 1.** Considere el sistema dado por (1), la partición del retardo dada por (14), la representación en variables de estado (16) y el observador propuesto por (17)-

(18), entonces los estados  $\hat{x}_{2n}(t)$  y  $\hat{x}_{2n-1}(t)$  convergen con los valores futuros  $x_2(t + \tau)$  y  $x_1(t + \tau)$ , respectivamente, con un número de sub-predictores  $n^*$ , donde  $n^*$  es el entero superior inmediato de  $n$ , con  $n = \frac{\tau}{\tau^* \alpha}$  donde  $\tau^* = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2}}$  y  $0 < \alpha < 1$ .

**Demostración 2.** Considere el sistema dado por (1) y el multi-predictor propuesto en (17)-(18), los errores de estimación se definen como,

$$\begin{aligned} e_1(t) &= x_1(t) - \hat{x}_1(t), \\ e_2(t) &= x_2(t) - \hat{x}_2(t), \\ e_i(t) &= \hat{x}_{(i-2)}(t) - \hat{x}_i(t - \bar{\tau}), \\ e_{(i+1)}(t) &= \hat{x}_{(i-1)}(t) - \hat{x}_{(i+1)}(t - \bar{\tau}), \\ &\vdots \\ e_{(2n-1)}(t) &= \hat{x}_{(2n-3)}(t) - \hat{x}_{(2n-1)}(t - \bar{\tau}), \\ e_{(2n)}(t) &= \hat{x}_{(2n-2)}(t) - \hat{x}_{(2n)}(t - \bar{\tau}). \end{aligned} \quad (19)$$

Los errores dinámicos se definen como,

$$\begin{aligned} \dot{e}_1(t) &= \dot{x}_1(t) - \dot{\hat{x}}_1(t), \\ \dot{e}_2(t) &= \dot{x}_2(t) - \dot{\hat{x}}_2(t), \\ \dot{e}_i(t) &= \dot{\hat{x}}_{(i-2)}(t) - \dot{\hat{x}}_i(t - \bar{\tau}), \\ \dot{e}_{(i+1)}(t) &= \dot{\hat{x}}_{(i-1)}(t) - \dot{\hat{x}}_{(i+1)}(t - \bar{\tau}), \\ &\vdots \\ \dot{e}_{(2n-1)}(t) &= \dot{\hat{x}}_{(2n-3)}(t) - \dot{\hat{x}}_{(2n-1)}(t - \bar{\tau}), \\ \dot{e}_{(2n)}(t) &= \dot{\hat{x}}_{(2n-2)}(t) - \dot{\hat{x}}_{(2n)}(t - \bar{\tau}), \end{aligned} \quad (20)$$

para  $i \in \{3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$ . Sustituyendo (17)-(18) en (20), da como resultado,

$$\begin{aligned} \dot{e}_1(t) &= a_2 e_1(t) + e_2(t) - g_1 e_1(t - \bar{\tau}), \\ \dot{e}_2(t) &= a_1 e_2(t) - g_2 e_1(t - \bar{\tau}), \\ \dot{e}_3(t) &= a_2 e_3(t) + e_4(t) + g_1 e_1(t - \bar{\tau}) - g_1 e_3(t - \bar{\tau}), \\ \dot{e}_4(t) &= a_1 e_4(t) + g_2 e_1(t - \bar{\tau}) - g_2 e_3(t - \bar{\tau}), \\ \dot{e}_i(t) &= a_2 e_i(t) + e_{(i+1)}(t) + g_1 e_{(i-2)}(t) - g_1 e_i(t - \bar{\tau}), \\ \dot{e}_{(i+1)}(t) &= a_1 e_{(i+1)}(t) + g_2 e_{(i-2)}(t) - g_2 e_i(t - \bar{\tau}), \\ &\vdots \\ \dot{e}_{(2n-1)}(t) &= a_2 e_{(2n-1)}(t) + e_{(2n)}(t) + g_1 e_{(2n-3)}(t) - \dots \\ &\quad \dots - g_1 e_{(2n-1)}(t - \bar{\tau}), \\ \dot{e}_{(2n)}(t) &= a_1 e_{(2n)}(t) + g_2 e_{(2n-3)}(t) - g_2 e_{(2n-1)}(t - \bar{\tau}), \end{aligned} \quad (21)$$

para  $i \in \{5, 7, 9, 11, \dots\}$ . Esto se puede escribir en forma matricial como,

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbb{A} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbb{A} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbb{G} & \mathbb{A} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{G} & \mathbb{A} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbb{G} & \mathbb{A} \end{bmatrix} e(t) + \dots \\ \dots + &\begin{bmatrix} -\mathbb{G} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbb{G} & -\mathbb{G} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbb{G} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbb{G} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\mathbb{G} \end{bmatrix} e(t - \bar{\tau}), \end{aligned} \quad (22)$$

donde

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_2 & 1 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix}, \mathbb{G} = \begin{bmatrix} g_1 & 0 \\ g_2 & 0 \end{bmatrix},$$

para  $e(t) = [e_1(t), e_2(t), \dots, e_{(2n-1)}(t), e_{(2n)}(t)]^T$ . El polinomio característico de (22) es,

$$P(s) = \prod_{i=1}^n \det(sI - A + Ge^{-\tau s}), \quad (23)$$

o bien,

$$P(s) = \prod_{i=1}^n (s - a_1)(s - a_2) + (g_1 s - (a_1 g_1 - g_2)) e^{-\tau s}, \quad (24)$$

el cual coincide con la ecuación característica del sistema en lazo cerrado del Lema 2. Por lo tanto, usando el Lema 2, la condición para lograr una adecuada convergencia del observador es  $\bar{\tau} < \tau^*$ , con  $\tau^* = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2}}$ .

Por otro lado, de la ecuación (15) sabemos que  $\bar{\tau} = \frac{\tau}{n}$ , entonces podemos escribir,

$$n = \frac{\tau}{\bar{\tau}} = \frac{\tau}{\tau^* \alpha}, \quad (25)$$

donde  $0 < \alpha < 1$ . Observe que,

- Con  $\alpha \approx 1$ , el número de particiones  $n$  se aproxima al mínimo necesario que garantiza la estabilidad del sistema en lazo cerrado, ya que la condición  $\bar{\tau} < \tau^*$  se cumple casi al límite.
- Con  $\alpha \approx 0$ , el número de particiones  $n \rightarrow \infty$ , y la condición  $\bar{\tau} < \tau^*$  se cumple lejos del límite.

En resumen, un mayor  $n$  facilita el cumplimiento de la condición  $\bar{\tau} < \tau^*$ , aunque esto incrementa el orden del multi-predictor. Con esto se demuestra que para cualquier valor  $0 < \alpha < 1$ , las señales estimadas  $\hat{x}_{2n}(t)$  y  $\hat{x}_{2n-1}(t)$  convergen a los valores futuros  $x_2(t + \tau)$  y  $x_1(t + \tau)$ , respectivamente.  $\square$

De la Fig. 2, observe que cada sub-predictor es en realidad un esquema de inyección, el cual se abordó en la sección anterior. Por lo tanto, la convergencia del multi-predictor puede asegurarse seleccionando los valores de  $g_1$  y  $g_2$  que estabilicen al sistema (22). Esto es posible con las ecuaciones (12) y (13) ya establecidas.

**Corolario 1.** Considere el sistema dado por (1), la partición del retado dada por (14), la representación en variables de estado (16) y el observador propuesto por (17)-(18), entonces los estados del predictor-observador  $\hat{x}_{2n}(t)$  y  $\hat{x}_{2n-1}(t)$  convergen con los valores futuros  $x_2(t + \tau)$  y  $x_1(t + \tau)$ , respectivamente, con un número mínimo de sub-predictores  $n_{min}$ , donde  $n_{min}$  es el entero superior inmediato de  $n$ , con  $n = \frac{\tau}{\tau^* \alpha}$  donde  $\tau^* = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2}}$ ,  $0 < \alpha < 1$  y  $\alpha \rightarrow 1$ .

Para determinar el número de sub-predictores para implementar el multi-predictor en la práctica, se puede considerar el número mínimo establecido por el Corolario 1. Sin embargo, no es recomendable utilizar el mínimo de sub-predictores, ya que la condición  $\bar{\tau} < \tau^*$  se cumple muy cerca del límite, lo cual reduce los intervalos de los

parámetros estabilizantes ( $g_1$  y  $g_2$ ) de cada sub-predicador. Para corregir este problema, se recomienda usar el resultado del Teorema 1 con  $\alpha = 0.6$ .

## 5. DISEÑO DEL CONTROLADOR.

Una vez que se logra la convergencia del multi-predicador, es posible diseñar el controlador para el sistema libre de retardo usando la señal estimada en el multi-predicador.

Con la finalidad de que la señal de salida siga referencias, en este trabajo se utilizará un control PID dado por,

$$C(s) = K_p + K_d s + \frac{K_i}{s}. \quad (26)$$

Otra forma de representar el control PID es,

$$C(s) = \frac{K(s + \beta)(s + \gamma)}{s}. \quad (27)$$

Esta última configuración del PID, nos proporciona un polo en el origen y dos ceros libres de diseño. El objetivo es estabilizar el sistema (1) que en este punto del análisis está libre de retardo, por lo que, conviene ubicar los ceros del controlador (27) en el semiplano izquierdo del plano  $s$  y con ayuda del lugar geométrico de las raíces obtener el parámetro  $K$ . La relación del control (26) con (27) es de la siguiente forma,

$$K_p = K_d(\beta + \gamma), \quad (28)$$

$$K_i = K_d\beta\gamma, \quad (29)$$

$$K_d = K. \quad (30)$$

## 6. RESULTADOS EN SIMULACIÓN.

**Ejemplo 1.** En Sun et al. (2021), se plantea el siguiente sistema,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s-1)(s-0.5)} e^{-s}. \quad (31)$$

Los parámetros conocidos son:  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 0.5$ ,  $b = 1$ ,  $\tau = 1$ . En el trabajo mencionado, se indica que el retardo de tiempo  $\tau$  es demasiado grande para ser estabilizado por un controlador PD, lo cual coincide al aplicar el *Lema 1*, ya que no se cumple la condición  $\tau < 0.76$ . Esto implica que no existen valores de  $k_d$  y  $k_p$  que puedan estabilizar el sistema. Por lo tanto, la efectividad del esquema multi-predicador propuesto en este trabajo será evaluada en el sistema (31).

Aplicando el Teorema 1, con  $\tau^* = 0.76$  y  $\alpha = 0.6$ , se obtiene  $n = 2.19$ . Así, el entero superior inmediato es  $n^* = 3$ . Por lo tanto, se requieren tres sub-predicadores para el diseño del multi-predicador. Con la ec.(15), se obtiene la partición del retardo  $\bar{\tau} = 1/3 \approx 0.333$ . Con este tamaño del retardo en cada sub-predicador, se cumple la condición del *Lema 1* ( $\bar{\tau} < 0.76$ ), lo que garantiza la existencia de valores  $k_d$  y  $k_p$  que estabilizan el sistema en lazo cerrado. Con la ec.(6) se determina que  $k_d > 2.666$ . Obteniendo el diagrama de Nyquist con  $k_d = 4.8$ , las frecuencias de cruce son como se muestra en la Fig. 3. Con estas frecuencias y la ec.(7) se obtiene el rango de  $k_p$  ( $0.2984 < k_p < 0.5$ ). Estos valores de  $k_d$  y  $k_p$  aseguran

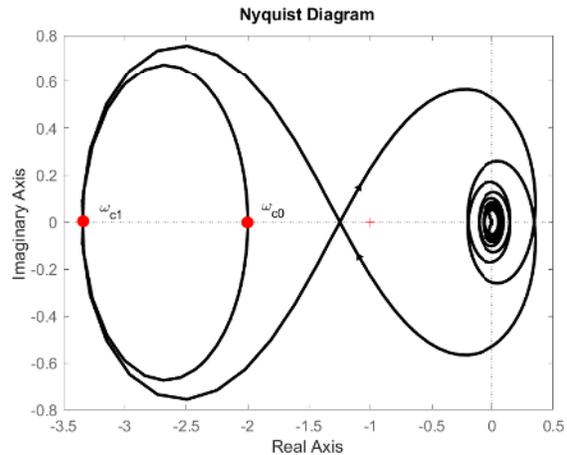


Fig. 3. Diagrama de Nyquist con las frecuencias de cruce  $\omega_{c0} = 0 \text{ rad/s}$  y  $\omega_{c1} = 0.629 \text{ rad/s}$

estabilidad ya que garantizan dos rodeos antihorario al punto  $-1 + 0j$  en el diagrama de Nyquist.

El retardo  $\bar{\tau} = 1/3 \approx 0.333$  también cumple con la condición del *Lema 2*. Esto asegura la existencia de  $g_1$  y  $g_2$  que estabilizan al esquema de inyección en lazo cerrado y por lo tanto, garantizan la convergencia del multi-predicador. Con la ec.(12) se establece que el rango de  $g_1$  es de  $1.43232 < g_1 < 2.4$ , eligiéndose  $g_1 = 1.85$  da como resultado que  $g_2 = 1.4646$  usando la ec.(13).

Para el controlador  $C(s)$  dado por (26), se propone usar las ganancias  $K_p = 15.385$ ,  $K_i = 5.973$ ,  $K_d = 9$ . En la simulación, se usó una entrada escalón de amplitud 1, con condiciones iniciales de 0.1 para los estados de la planta y condiciones nulas para los estados del multi-predicador. La Fig. 4, muestra como las señales de los errores convergen a cero conforme  $t \rightarrow \infty$ , asegurando una adecuada estimación de los estados del multi-predicador respecto a los de la planta. Una vez comprobada la convergencia de los errores, se verifica la estabilidad de la planta. En la Fig. 5 se muestra la salida 1, que corresponde a la respuesta del sistema al usar tres sub-predicadores.

Se realizó una segunda prueba con  $\alpha = 0.99$ , obteniendo el número mínimo de sub-predicadores  $n_{min} = 2$ . Al usar los mismos parámetros que en el caso anterior, el rango de  $g_1$  disminuyó a  $1.4928 < g_1 < 2.15$ . Se vuelve a seleccionar  $g_1 = 1.85$  en consecuencia  $g_2 = 1.4646$ . Para la simulación se usaron las mismas especificaciones y ganancias del controlador PID del caso anterior. La respuesta del sistema se muestra en la salida 2 de la Fig. 5. Observe que la salida 1 oscila menos y se estabiliza más rápido en comparación con la salida 2. Estos resultados muestran claramente que se obtiene una mejor respuesta al utilizar el número de sub-predicadores determinado por  $\alpha = 0.6$  en comparación con el número mínimo de sub-predicadores con  $\alpha = 0.99$ . Con estas simulaciones se comprueba la efectividad del esquema multi-predicador propuesto.

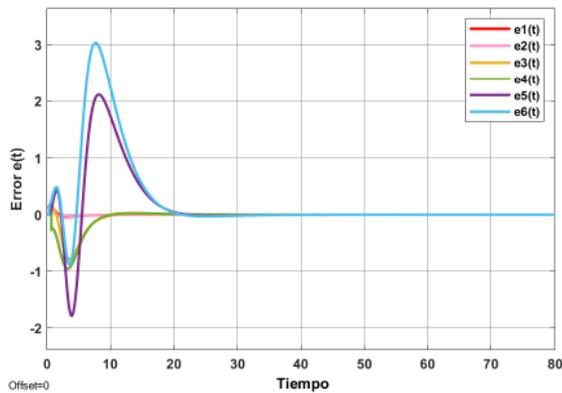


Fig. 4. Convergencia de las señales de error del ejemplo 1, prueba 1.

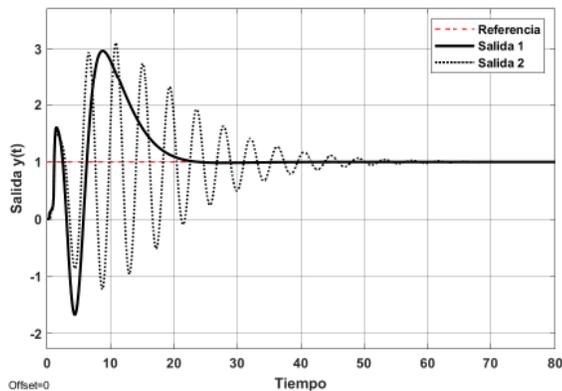


Fig. 5. Respuestas de salidas del sistema del ejemplo 1.

## 7. CONCLUSIÓN.

En este estudio se utilizó un esquema multi-predicor basado en el trabajo de Najafi et al. (2013) para tratar sistemas retardados con dos polos inestables. La estrategia del multi-predicor se basa en un esquema de inyección de salida, para el cual existen  $g_1$  y  $g_2$  que logran estabilizar al sistema sí y solo sí  $\tau < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2}}$ . Esto permite asegurar la convergencia del multi-predicor. Además, al hacer una partición del retardo en el esquema del multi-predicor, es posible lograr una adecuada estimación de las señales internas del proceso sin límites en el tamaño de retardo. Esto se debe a que cada sub-predicor estima la señal intermedia en presencia de un retardo pequeño, de modo que el último sub-predicor obtiene una adecuada estimación de la señal de interés ante el retardo completo del sistema. Al tener acceso a esta señal libre de retardo, es posible implementar estrategias de control clásico, como un controlador PD o un controlador PID. Como principal aportación, en este estudio se estableció el número mínimo de sub-predicores necesarios para asegurar una estimación adecuada de los estados del sistema dado por el corolario 1. La estrategia del multi-predicor fue efectiva porque permitió estabilizar y controlar el sistema (31) que en el trabajo de Sun et al. (2021) no

fue posible bajo sus condiciones. Como trabajo futuro, se explorará la robustez del sistema de control PID para observar su comportamiento ante perturbaciones externas y se realizarán pruebas comparativas con un controlador PD. Además, sería interesante extender el análisis a sistemas retardados con dos polos inestables y  $n$  polos estables.

## REFERENCES

- Barragan-Bonilla, L.A., Márquez-Rubio, J.F., del Muro Cuellar, B., Vázquez-Guerra, R.J., and Martínez, C. (2022). Observer-based control for high order delayed systems with an unstable pole and a pole at the origin. *Asian Journal of Control*, 25, 1759 – 1774.
- Camacho, O., Matinez, J.M., Patiño, K., Ulloa, F., Aro, K., and Mejía, C. (2019). Comparación de diferentes estrategias de control para sistemas con retardo a comparison of different control strategies for systems with delay.
- Fragoso-Rubio, V., Velasco-Villa, M., Hernández-Pérez, M.A., del Muro-Cuéllar, B., and Márquez-Rubio, J.F. (2019). Prediction-observer scheme for linear systems with input-output time-delay. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 1–14.
- Hernández-Pérez, M.A., Fragoso-Rubio, V., Velasco-Villa, M., del Muro-Cuéllar, B., Márquez-Rubio, J.F., and Puebla, H. (2020). Prediction-based control for a class of unstable time-delayed processes by using a modified sequential predictor. *Journal of Process Control*, 92, 98–107.
- Karan, S. and Dey, C. (2019). Set point weighted modified smith predictor for delay dominated integrating processes. In *2019 Devices for Integrated Circuit (DevIC)*, 172–176.
- Najafi, M., Hosseinnia, S., Sheikholeslam, F., and Karimadini, M. (2013). Closed-loop control of dead time systems via sequential sub-predictors. *International Journal of Control*, 86, 599 – 609.
- Novella-Rodríguez, D.F., Del-Muro-Cuéllar, B., Márquez-Rubio, J.F., Perez, M.A.H., and Velasco-Villa, M. (2019). Pd-pid controller for delayed systems with two unstable poles: a frequency domain approach. *International Journal of Control*, 92, 1196 – 1208.
- Rosas, C.D.V., Rubio, J.F.M., del Muro Cuéllar, B., Rodríguez, D.F.N., Sename, O., and Dugard, L. (2019). Stabilizing high-order delayed systems with minimum-phase zeros using simple controllers. *Studies in Informatics and Control*, 28, 381–390.
- Smith, O. (1957). Closer control of loops with dead time.
- Sun, L., Ma, D., and Chen, C. (2021). Necessary and sufficient conditions on stabilization of unstable second-order delay systems under pd control. In *2021 33rd Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*, 5548–5553.
- Zhang, Z., Zhou, B., and Michiels, W. (2019). Pseudo predictor feedback stabilization of linear systems with both state and input delays. In *2019 IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC)*, 49–53.