

## Multi-predictor based scheme for the stabilization of delayed first-order systems

A. D. Cabañez Vilchis,<sup>\*</sup> A. Urquiza Castro,<sup>\*</sup>  
R. J. Vázquez Guerra,<sup>\*\*</sup> B. Del Muro Cuellar,<sup>\*</sup>  
J. F. Márquez Rubio<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup> *Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Unidad Culhuacán, Instituto Politécnico Nacional, México D.F., 04430.*

<sup>\*\*</sup> *Instituto Politécnico Nacional, CECyT 7, Cuauhtémoc, Ermita Iztapalapa 3241, Iztapalapa C.P. 09570, México*

---

**Abstract:** The stabilization and control of continuous linear systems with delay are significant challenges, as well as the complexity of their analysis, which offers important research opportunities. This article presents a prediction-based scheme to control a first-order system with an unstable pole and any size of time delay. Moreover, the necessary and sufficient conditions are provided to ensure the stability of the closed-loop system with static output feedback. To implement the strategy, a scheme based on an observer-predictor is developed to mitigate the impact of the delay. This method involves partitioning the time delay into a series of sub-predictors, where each one estimates the signal with its assigned portion of the delay. This approach ensures an accurate estimation of the complete desired signal, allowing the application of a classical controller using the signal before being delayed to stabilize the system. The main contribution of this work is to establish a minimum number of sub-predictors such that the closed-loop system can be stabilized regardless of the delay size. Finally, an example with simulation is presented to illustrate the obtained results.

*Keywords:* Stability, delay, unstable systems, predictor, observer.

---

### 1. INTRODUCCIÓN

En el campo de estudio del control automático, se utilizan diferentes técnicas para modelar sistemas dinámicos, ya sea, a través de ecuaciones diferenciales y/o funciones de transferencia, lo que permite describir el comportamiento del sistema. Al evaluar la conducta de ciertos procesos químicos e industriales tales como tanques de almacenamiento de líquido (Liu et al., 2005), calderas de calefacción, comunicaciones satélites (Hernández and Leonardo, 2009), etc., se debe tomar en cuenta la existencia del tiempo que tarda el sistema en reaccionar ante un cambio en la entrada, a este fenómeno se le conoce como retraso o retardo de tiempo. Su origen se debe a distintos factores, generalmente es a causa del tiempo en el transporte de información, energía o materia, por tanto, puede influir significativamente en la dinámica y estabilidad del sistema.

El análisis de los sistemas con retardo presentan grandes oportunidades de investigación, sin embargo, lograr su estabilidad es un gran desafío ya que diseñar un controlador que proporcione un comportamiento aceptable del sistema en lazo cerrado no es nada sencillo. Se han presentado en la literatura diversas estrategias de control para tratar con este tipo de sistemas, si el tamaño del re-

tardo no es significativo comparado con las características del sistema, puede despreciarse para fines de diseño del controlador, en caso contrario, es necesario aplicar otras técnicas para el diseño de controladores que mitiguen el efecto de dicho retardo.

Para dar solución a esta problemática, diversos autores han presentado propuestas para estabilizar sistemas que involucren retardo de tiempo, algunos plantean el uso de controladores clásicos, es decir, Proporcional (P), Proporcional-Integral (PI), Proporcional-Derivativo (PD) (Márquez-Rubio et al., 2014) y Proporcional-Integral-Derivativo (PID) (Hernández-Pérez et al., 2015).

Otro enfoque que se ha propuesto consiste en contrarrestar los efectos del retardo de tiempo a través de estrategias que intentan predecir los efectos de la entrada actual para una salida futura. La estrategia de predicción más popular se conoce como el Predictor de Smith (PS) (Smith, 1957), el cual proporciona una estimación de la salida futura, es decir, estima la variable o las variables del sistema antes de ser retardadas, por medio de un esquema tipo observador, sin embargo, una limitación del predictor es que solo se puede aplicar para el caso de sistemas estables.

Por tal motivo, se han publicado una gran cantidad de trabajos en los cuales se proponen modificaciones de la estructura clásica del PS para que pueda ser usado en sistemas inestables. Por ejemplo, en el trabajo de (Najafi et al., 2013) se propone un esquema con múltiples observadores y más tarde en los trabajos de (Fragoso-Rubio et al., 2019) y (Hernández-Pérez et al., 2020) se presentan mejoras en el esquema de estimación. No obstante, ninguno de los trabajos referidos ofrece una estrategia para determinar el número mínimo de sub-predictores necesarios para garantizar la estabilidad del observador. Este aspecto es crucial, ya que sin esta información, el orden del observador empleado podría ser excesivamente alto.

El objetivo de este trabajo es enfocarse en el problema de estabilización de una clase de sistemas lineales de primer orden inestables con retardo en la salida con base en el esquema observador-predictor presentado en el artículo de (Najafi et al., 2013), dichas modificaciones se mencionan a continuación,

- Utilizar una retroalimentación estática de la salida para conseguir la convergencia de las variables internas del sistema.
- Determinar el número mínimo de sub-predictores que puede tener el sistema.

La estrategia de control se basa en descomponer el retardo total de tiempo en segmentos más pequeños. Para esto, se diseñan múltiples sub-predictores, cada uno encargado de una partición del retardo. A cada sub-predictor se le aplica una retroalimentación estática de la salida, con el propósito de estimar la señal interna asociada a su segmento correspondiente del retardo. Una vez obtenida la estimación completa del retardo de tiempo, es posible diseñar un controlador que asegure la estabilización del sistema libre de retardo.

El trabajo esta organizado de la siguiente manera, en la Sección 2 se presenta el planteamiento del problema en donde se menciona la clase de sistemas que se consideraron durante el desarrollo de este trabajo. En la Sección 3 se describen los resultados preliminares en el cual se dan a conocer las ecuaciones del esquema propuesto por (Najafi et al., 2013), las condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de los sistemas de primer orden y la obtención del intervalo estabilizante para la ganancia de la retroalimentación estática de la salida. En la Sección 4 se exhiben los resultados obtenidos en donde se muestra el esquema propuesto, así como, la obtención del número mínimo de sub-predictores que puede tener el sistema dependiendo del tamaño de retardo. En la Sección 5 se desarrollan unos ejemplos con la simulación correspondiente y para concluir en la Sección 6 se dan unas observaciones finales del presente trabajo.

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La clase de sistemas que se abordan en este trabajo son sistemas lineales continuos de una entrada, una salida

(SISO) con retardo de tiempo en la transferencia entrada-salida,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)e^{-\tau s} \quad (1)$$

Donde  $U(s)$  es la señal de entrada,  $Y(s)$  es la señal de salida,  $\tau$  es el retardo de tiempo que se supone conocido, siendo este mayor o igual a 0 y  $G(s)$  es la función de transferencia libre de retardo, definida como,

$$G(s) = \frac{b}{s - a} \quad (2)$$

Una estrategia de control clásico que se basa en una retroalimentación de salida esta dada por,

$$U(s) = [R(s) - Y(s)]C(s) \quad (3)$$

Donde  $R(s)$  es una referencia y  $C(s)$  es un controlador. Esta estrategia da como resultado un sistema en lazo cerrado, con la siguiente forma,

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)e^{-\tau s}}{1 + C(s)G(s)e^{-\tau s}} \quad (4)$$

Debido a que el término del retardo  $e^{-\tau s}$  aparece en la ecuación característica, se dificulta el análisis de estabilidad a causa del número infinito de polos del sistema en lazo cerrado que se generan.

La finalidad de este trabajo es abordar la problemática del retardo implementando un esquema basado en un multi-predictor inspirado en la ideas del trabajo (Najafi et al., 2013).

## 3. RESULTADOS PRELIMINARES

Considere una representación en espacio de estados de un sistema con retardo en la entrada, dado por,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau) \quad (5)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (6)$$

En el trabajo de (Najafi et al., 2013) se propone un esquema multi-predictor para estimar el estado  $x(t)$  del sistema (5)-(6) sin el efecto del retardo, definido por,

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= x(t + \bar{\tau}) \\ \omega_2(t) &= \omega_1(t + \bar{\tau}) = x(t + 2\bar{\tau}) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \omega_{m-1}(t) &= x(t + (m-1)\bar{\tau}) \\ \omega_m(t) &= x(t + m\bar{\tau}) = x(t + \tau) \end{aligned}$$

Donde  $m$  es el número de particiones y  $\bar{\tau}$  es el valor de la partición del retardo,

$$\omega_j(t) = [\omega_j(1) \cdots \omega_j(n)]^T \text{ para } j = 1, \dots, m.$$

Las ecuaciones de (7) producen,

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1(t) &= Ax(t + \bar{\tau}) + Bu(t - (m-1)\bar{\tau}) \\ &= A\omega_1(t) + Bu(t - (m-1)\bar{\tau}) \\ \dot{\omega}_2(t) &= A\omega_2(t) + Bu(t - (m-2)\bar{\tau}) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} &\vdots \\ \dot{\omega}_m(t) &= A\omega_m(t) + Bu(t) \end{aligned}$$

En la salidas se tiene,

$$\begin{aligned} y_1(t) &= C\omega_1(t) \\ y_2(t) &= C\omega_2(t) \\ &\vdots \\ y_m(t) &= C\omega_m(t) \end{aligned} \quad (9)$$

Un equivalente generalizado de (8) - (9) es,

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_j(t) &= A\omega_j(t) + Bu(t - (m - j)\bar{\tau}) \\ y_j(t) &= C\omega_j(t) \end{aligned} \quad (10)$$

Para  $j = 1, \dots, m$ . El conjunto de sub-predicadores propuestos en (Najafi et al., 2013) están dados por,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\omega}}_1(t) &= A\hat{\omega}_1(t) + Bu(t - (m - 1)\bar{\tau}) + L(y(t) - \hat{y}_1(t - \bar{\tau})) \\ \dot{\hat{\omega}}_2(t) &= A\hat{\omega}_2(t) + Bu(t - (m - 2)\bar{\tau}) + L(\hat{y}_1(t) - \hat{y}_2(t - \bar{\tau})) \\ &\vdots \\ \dot{\hat{\omega}}_m(t) &= A\hat{\omega}_m(t) + Bu(t) + L(\hat{y}_{m-1}(t) - \hat{y}_m(t - \bar{\tau})) \end{aligned} \quad (11)$$

De las salidas de (9) se definen los errores de inyección,

$$\begin{aligned} e_{\omega_1}(t) &= x(t + \bar{\tau}) - \hat{\omega}_1(t) = \omega_1(t) - \hat{\omega}_1(t) \\ e_{\omega_j}(t) &= \hat{\omega}_{j-1}(t + \bar{\tau}) - \hat{\omega}_j(t) \end{aligned} \quad (12)$$

Para  $j = 2, \dots, m$ . La ecuación (11) se puede reescribir como,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\omega}}_1(t) &= A\hat{\omega}_1(t) + Bu(t - (m - 1)\bar{\tau}) + LCe_{\omega_1}(t - \bar{\tau}) \\ \dot{\hat{\omega}}_2(t) &= A\hat{\omega}_2(t) + Bu(t - (m - 2)\bar{\tau}) + LCe_{\omega_2}(t - \bar{\tau}) \\ &\vdots \\ \dot{\hat{\omega}}_m(t) &= A\hat{\omega}_m(t) + Bu(t) + LCe_{\omega_m}(t - \bar{\tau}) \end{aligned} \quad (13)$$

De una forma generalizada,

$$\dot{\hat{\omega}}_j(t) = A\hat{\omega}_j(t) + Bu(t - (m - j)\bar{\tau}) + LCe_{\omega_j}(t - \bar{\tau}) \quad (14)$$

Para  $j = 1, \dots, m$ .

### 3.1 Retroalimentación estática de la salida

En esta sub-sección se presenta la condición necesaria y suficiente para estabilizar un sistema de primer orden retardado usando una retroalimentación estática de la salida.

**Lema 1.** (Márquez-Rubio et al., 2010) . Considere el sistema retardado dado por la ec. (1) y una retroalimentación proporcional de la salida,

$$U(s) = R(s) - kY(s) \quad (15)$$

Donde  $R(s)$  es la nueva entrada de referencia. Entonces existe  $k$  tal que el sistema en lazo cerrado formado por las ecs. (1) y (15),

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{be^{-\tau s}}{s - a + kbe^{-\tau s}} \quad (16)$$

es BIBO estable (bounded-input bounded-output) si y solo si  $\tau < \frac{1}{a}$

Para encontrar una ganancia  $k$  que pueda asegurar la estabilidad del sistema en lazo cerrado mencionado en el Lema (1) se puede realizar un análisis en el dominio de la frecuencia, usando un diagrama de Nyquist. Para este caso en particular, se requiere asegurar un rodeo antihorario al punto en -1, en el diagrama de Nyquist del sistema.

$$\bar{G}(s) = \frac{kb}{s - a} e^{-\tau s} \quad (17)$$

Este análisis da como resultado el intervalo estabilizante del parámetro  $k$ ,

$$\frac{a}{b} < k < \frac{a}{b} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c}{a}\right)^2} \quad (18)$$

donde  $\omega_c$  es la primera frecuencia positiva que satisface,

$$\text{atan}\left(\frac{\omega_c}{a}\right) - \omega_c\tau = 0 \quad (19)$$

## 4. RESULTADOS PRINCIPALES

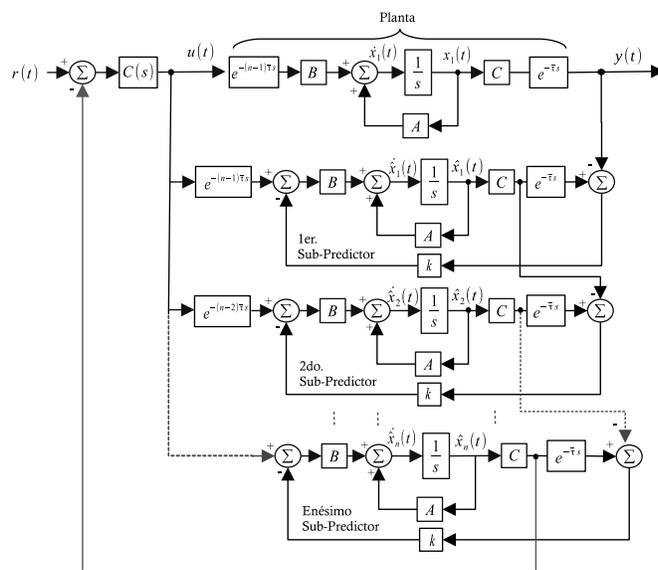


Fig. 1. Esquema propuesto del multi-predictor

Considere una partición en el retardo de entrada del sistema (5)-(6) definida como,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= Ax_1(t) + Bu(t - (n - 1)\bar{\tau}) \\ y(t) &= Cx(t - \bar{\tau}) \end{aligned} \quad (20)$$

Donde  $\bar{\tau}$  es el valor de la partición del retardo y  $n$  el número de particiones en las que se divide el retardo o número de sub-predicadores que tiene el sistema.

En la Fig. 1 se muestra la modificación del multi-predictor propuesto con una retroalimentación estática de la salida y la acción de control. Las ecuaciones de los sub-predicadores están definidas por,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1(t) &= A\hat{x}_1(t) + Bu(t - 2\bar{\tau}) - BkC\hat{x}_1(t - \bar{\tau}) \\ &\quad + BkCx(t - \bar{\tau}) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) &= A\hat{x}_2(t) + Bu(t - \bar{\tau}) - BkC\hat{x}_2(t - \bar{\tau}) \\ &\quad + BkC\hat{x}_1(t) \\ &\vdots \\ \dot{\hat{x}}_i(t) &= A\hat{x}_i(t) + Bu(t - (n - i)\bar{\tau}) - BkC\hat{x}_i(t - \bar{\tau}) \\ &\quad + BkC\hat{x}_{i-1}(t)\end{aligned}\tag{21}$$

Donde,  $i = 3, 4, 5, \dots, n$ .

A continuación se presenta el resultado principal de este trabajo.

**Teorema 1.** *Considere una representación en variables de estado del sistema (1) dada por (5)-(6), la partición del retardo definida en (20) y el observador propuesto por (21), entonces el estado del predictor-observador  $x_n(t)$  converge el valor futuro  $x(t + \tau)$  con un número de sub-predictores  $n^*$ , donde  $n^*$  es el entero superior inmediato de  $n$ , con  $n = \frac{\alpha\tau}{\alpha}$ , donde  $a$  el valor del polo y  $0 < \alpha < 1$ .*

*Demostración 1.* A continuación se establecen los errores de estimación,

$$\begin{aligned}e_1(t) &= x_1(t) - \hat{x}_1(t) \\ e_2(t) &= \hat{x}_1(t) - \hat{x}_2(t - \bar{\tau}) \\ &\vdots \\ e_i(t) &= \hat{x}_{i-1}(t) - \hat{x}_i(t - \bar{\tau})\end{aligned}\tag{22}$$

Por lo que los errores dinámicos se definen como,

$$\begin{aligned}\dot{e}_1(t) &= \dot{x}_1(t) - \dot{\hat{x}}_1(t) \\ \dot{e}_2(t) &= \dot{\hat{x}}_1(t) - \dot{\hat{x}}_2(t - \bar{\tau}) \\ &\vdots \\ \dot{e}_i(t) &= \dot{\hat{x}}_{i-1}(t) - \dot{\hat{x}}_i(t - \bar{\tau})\end{aligned}\tag{23}$$

Al sustituir las ecuaciones (20)-(22) en (23) se obtienen los errores dinámicos del esquema propuesto, fijados por,

$$\begin{aligned}\dot{e}_1(t) &= Ae_1(t) - BkCe_1(t - \bar{\tau}) \\ \dot{e}_2(t) &= Ae_2(t) - BkCe_2(t - \bar{\tau}) + BkCe_1(t - \bar{\tau}) \\ &\vdots \\ \dot{e}_i(t) &= Ae_i(t) - BkCe_i(t - \bar{\tau}) + BkCe_{i-1}(t - (n - i)\bar{\tau})\end{aligned}\tag{24}$$

Se representa de forma matricial las ecuaciones de los errores obtenidos en (24), delimitado por,

$$\dot{e}(t) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & BkC & A \end{bmatrix} e(t) +$$

$$\begin{bmatrix} -BkC & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ BkC & -BkC & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & BkC & -BkC & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -BkC \end{bmatrix} e(t - \bar{\tau})\tag{25}$$

Donde el polinomio característico de (25) es,

$$P(s) = \prod_{i=1}^n \det(sI - A + BkCe^{-\bar{\tau}s})\tag{26}$$

Considerando que la representación en variables de estado de un sistema de primer orden se puede establecer como  $A = a$ ,  $B = b$  y  $C = 1$ , entonces el polinomio característico se puede escribir como,

$$P(s) = \prod_{i=1}^n (s - a + bke^{-\bar{\tau}s})\tag{27}$$

el cual coincide con la ecuación característica del sistema en lazo cerrado del Lema (1). Por otro lado, sabemos que  $\bar{\tau} = \frac{\tau}{n}$  entonces se puede escribir,

$$n = \frac{\tau}{\bar{\tau}} = \frac{\tau}{(\frac{1}{a})\alpha}\tag{28}$$

donde  $0 < \alpha < 1$ . Observe que para valores de  $\alpha \approx 1$  el número de particiones  $n$  se aproxima al valor mínimo necesario para garantizar la adecuada estimación de los estados del sistema. Esto se debe a que, con  $\alpha \approx 1$ , la condición  $\bar{\tau} < \frac{1}{a}$  se cumple casi en el límite. Por otro lado, para valores  $\alpha \approx 0$ , el número de particiones  $n \rightarrow \infty$ , y en este caso la condición  $\bar{\tau} < \frac{1}{a}$  se cumple muy por debajo del límite.

En conclusión, a medida que aumenta  $n$ , la condición  $\bar{\tau} < \frac{1}{a}$  se cumple con mayor facilidad. Sin embargo, un mayor número de predictores incrementa el orden del multi-predictor. Esto demuestra que, para cualquier valor de  $0 < \alpha < 1$ , la señal estimada  $x_n(t)$  converge hacia el valor futuro  $x(t + \tau)$ .  $\square$

**Corolario 1.** *Considere una representación en variables de estado del sistema (1) dada por (5)-(6), la partición del retardo definida en (20) y el observador propuesto por (21), entonces el estado del predictor-observador  $x_n(t)$  converge con el valor futuro  $x(t + \tau)$  con un número mínimo de sub-predictores  $n_{min}$ , donde  $n_{min}$  es el entero superior inmediato de  $n$ , con  $n = \frac{\alpha\tau}{\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$  y  $\alpha \rightarrow 1$ .*

*Demostración 2.* La demostración de este corolario queda incluida en la demostración de Teorema 1.  $\square$

Para determinar el número de predictores necesario para implementar el multi-predictor en la práctica, es importante considerar el número mínimo de predictores que se puede establecer según el Corolario 1. No obstante, no se recomienda utilizar el número mínimo de predictores, ya que la condición  $\bar{\tau} < \frac{1}{a}$  estaría muy próxima al límite. Para resolver este problema, se recomienda utilizar el resultado del Teorema 1 con  $\alpha \approx 0.6$ .

## 5. RESULTADOS EN SIMULACIÓN

### 5.1 Ejemplo 1

Considere el siguiente sistema de primer orden en lazo abierto con retardo de tiempo,

$$G(s) = \frac{1}{s-2} e^{-0.9s} \quad (29)$$

Los datos del sistema son:  $a = 2$  y  $\tau = 0.9$ . Se determina el tamaño máximo de retardo que asegura la existencia de una ganancia  $k$  para un sistema de primer orden con retardo. En este caso, con los parámetros dados,  $\tau < 0.5$ , y debido a que esta condición no se cumple, se propone diseñar un multi-predicor. Aplicando el Teorema 1, con un factor  $\alpha = 0.7$ , se establece que el sistema requiere  $n^* = 3$  particiones o sub-predicor. Para asegurar una adecuada convergencia de la señal deseada, es crucial garantizar la correcta estimación de cada sub-predicor por medio de una retroalimentación estática de la salida  $k$ . Cada partición en el sub-predicor debe cumplir la condición  $\bar{\tau} < 0.5$ , y dado que cada partición tiene un valor de  $\bar{\tau} = 0.3$ , se asegura la existencia de la ganancia  $k$ . Con esto confirmado, se procede a calcular los rangos estabilizantes de la ganancia  $k$  según la ecuación (18), se obtiene con apoyo del Diagrama de Nyquist mostrado en la Fig. 2 la frecuencia de corte  $\omega_c = 3.46 \text{ rad/s}$ .

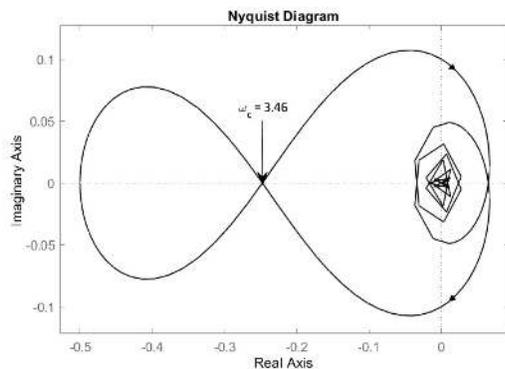


Fig. 2. Diagrama de Nyquist del ejemplo 1.

El rango estabilizante de la ganancia  $k$  resultante es,

$$2 < k < 4$$

Se aplican en el esquema multi-predicor los cálculos realizados con una ganancia de  $k = 3$ . En la Fig. 3, se observan los errores de estimación convergiendo a cero, lo que indica una correcta convergencia de cada sub-predicor y, en consecuencia, una estimación precisa de la señal completa con el tiempo total de retardo.

Finalmente, para abordar el problema de estabilidad, se diseñó un controlador proporcional para el sistema libre de retardo. Dado que el sistema es de primer orden y presenta un polo inestable en 2, su rango de estabilidad es  $C > 2$ . En la Fig. 4 se muestra la respuesta de salida estable del sistema, considerando condiciones iniciales diferentes de cero.

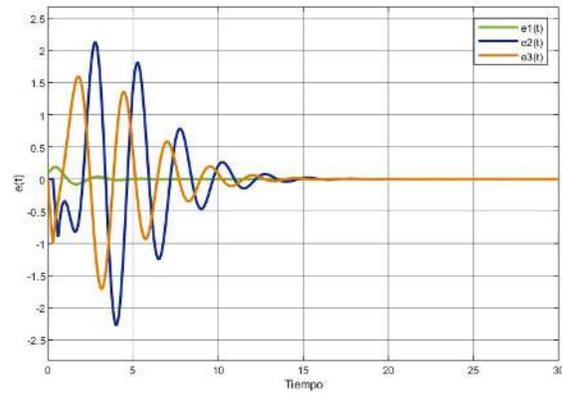


Fig. 3. Errores de estimación del ejemplo 1.

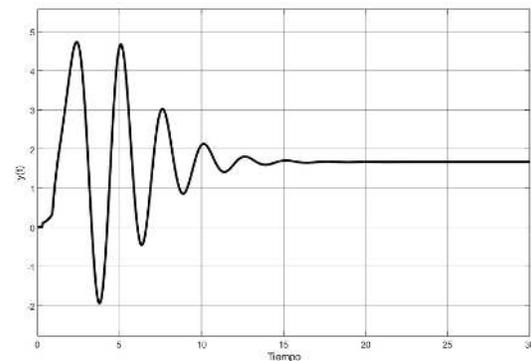


Fig. 4. Respuesta de salida del ejemplo 1 considerando condiciones iniciales distintas de cero (CI=0.1).

### 5.2 Ejemplo 2

A continuación, se presenta un segundo ejemplo con el mismo sistema pero con un retardo de mayor tamaño,

$$G(s) = \frac{1}{s-2} e^{-2s} \quad (30)$$

Dado que los datos del sistema permanecen constantes, el tamaño máximo de retardo que garantiza la existencia de la ganancia  $k$  sigue siendo el mismo, con  $\tau < 0.5$ , por lo que se propone diseñar un multi-predicor. Usando un factor  $\alpha = 0.85$ , se determina que el sistema requiere  $n^* = 5$  particiones o sub-predicor. En este caso, el valor de cada partición es  $\bar{\tau} = 0.4$ . Tras asegurar esto, se procede a calcular los rangos estabilizantes de la ganancia  $k$  de la ecuación (18), con base en el Diagrama de Nyquist mostrado en la Fig. 5, se obtiene así la frecuencia de corte  $\omega_c = 1.89 \text{ rad/s}$ .

El rango estabilizante de la ganancia  $k$  resultante es,

$$2 < k < 2.75$$

Se implementan los valores obtenidos en el esquema multi-predicor utilizando una ganancia de  $k = 2.3$ . En la Fig. 6, los errores de estimación convergen a cero, lo que evidencia una adecuada convergencia de cada sub-predicor y, por ende, una estimación precisa de la señal completa teniendo en cuenta el tiempo total de retardo.

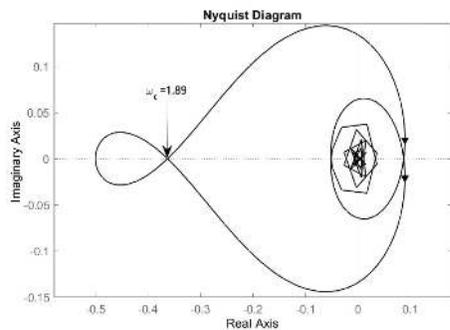


Fig. 5. Diagrama de Nyquist del ejemplo 2

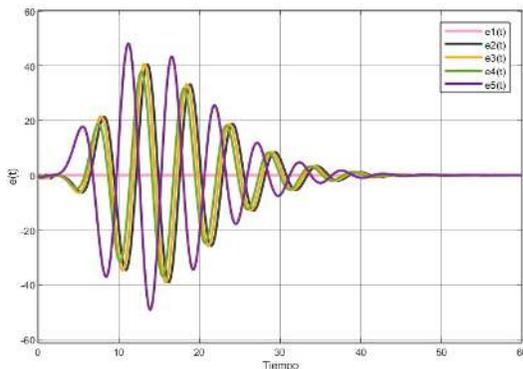


Fig. 6. Errores de estimación del ejemplo 2

Para concluir, se aborda el problema de estabilidad utilizando un controlador proporcional para el sistema sin retardo, manteniendo el mismo rango de estabilidad,  $C > 2$ . En la Fig. 7, se muestra la respuesta de salida estable del sistema, teniendo en cuenta condiciones iniciales no nulas.

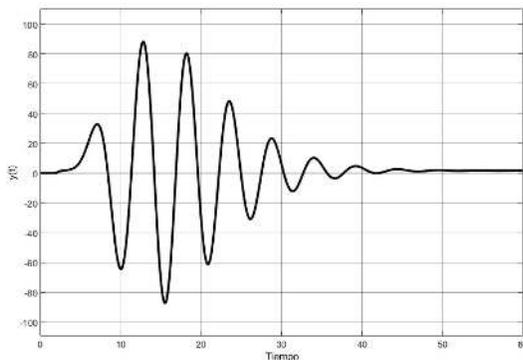


Fig. 7. Respuesta de salida del ejemplo 2 considerando condiciones iniciales distintas de cero (CI=0.001).

## 6. CONCLUSIONES

El estudio de sistemas con retardo es fundamental para el correcto modelado, control y optimización de una amplia gama de sistemas reales. Permite anticipar problemas, mejorar la eficiencia y desarrollar nuevas tecnologías y estrategias para manejar sistemas complejos y dinámicos.

El propósito de este trabajo fue crear una estrategia de control centrada en la estabilización de sistemas lineales de primer orden con retardo. Esta dificultad se abordó mediante la implementación de un esquema basado en un multi-predicor, diseñado para contrarrestar los efectos del retardo. Esta propuesta ofrece una mejora a la precisión, la robustez y la adaptabilidad del sistema, al tiempo que reduce el impacto del retardo y proporciona flexibilidad en el diseño del controlador.

La contribución a este trabajo radica en la ausencia de trabajos previos que hayan abordado el proceso para determinar el número mínimo de sub-predicadores requeridos por un sistema inestable con retardo.

Para investigaciones futuras, se pueden considerar alternativas como diferentes tipos de controladores o estrategias adicionales que permitan el seguimiento de referencias y el rechazo de perturbaciones.

## REFERENCES

- Fragoso-Rubio, V., Velasco-Villa, M., Hernández-Pérez, M.A., del Muro-Cuéllar, B., and Márquez-Rubio, J.F. (2019). Prediction-observer scheme for linear systems with input-output time-delay. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 17, 2012 – 2025.
- Hernández, R. and Leonardo, R. (2009). Análisis del método mfsp (multiple frames into single packet) para contrarrestar los retardos en los sistemas satelitales en transmisión de voip.
- Hernández-Pérez, M.A., del Muro-Cuéllar, B., and Velasco-Villa, M. (2015). Pid para la estabilización de sistemas retardados inestables de alto orden con posibles polos conjugados complejos. *Asia-Pacific Journal of Chemical Engineering*, 10, 687–699.
- Hernández-Pérez, M.A., Fragoso-Rubio, V., Velasco-Villa, M., del Muro-Cuéllar, B., Márquez-Rubio, J.F., and Puebla, H. (2020). Prediction-based control for a class of unstable time-delayed processes by using a modified sequential predictor. *Journal of Process Control*, 92, 98–107.
- Liu, T., Cai, Y., Gu, D., and Zhang, W. (2005). New modified smith predictor scheme for integrating and unstable processes with time delay.
- Márquez-Rubio, J.F., del Muro-Cuellar, B., Velasco-Villa, M., and Álvarez-Ramírez, J. (2010). Control basado en un esquema observador para sistemas de primer orden con retardo. *Revista Mexicana De Ingeniería Química*, 9, 43–52.
- Márquez-Rubio, J.F., del Muro-Cuéllar, B., and Ramírez, J.Á. (2014). Stabilization region of pd controller for unstable first order process with time delay. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 12, 265–273.
- Najafi, M., Hosseinnia, S., Sheikholeslam, F., and Karimadini, M. (2013). Closed-loop control of dead time systems via sequential sub-predictors. *International Journal of Control*, 86, 599 – 609.
- Smith, O. (1957). Closer control of loops with dead time.