

# Time-Delay Estimation and State Prediction of a Differential Mobile Robot

G. Castillo-García \* J. A. Baéz-Hernández \*  
J. González-Sierra \*\* M. Velasco-Villa \*

\* CINVESTAV, Depto. de Ing. Eléctrica, Sec. de Mecatrónica, Av.  
I.P.N. No. 2508, Col. San Pedro Zacatenco, 07360, México,  
{gustavo.castillo, julio.baez, velasco}@cinvestav.mx

\*\* Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería Campus  
Hidalgo, Instituto Politécnico Nacional, Carretera Pachuca-Actopan  
Kilómetro 1+500, Distrito de Educación, Salud, Ciencia, Tecnología e  
Innovación, San Agustín Tlaciaca 42162, Hidalgo, México,  
jagonzalezsi@ipn.mx

**Abstract:** The present work focuses on two main aspects: the estimation of an unknown time-varying input time-delay and the use of this estimation on the design of a state predictor for a differential drive mobile robot. It is shown how, previously reported work for the estimation of constant time delay, can be extended for the case of time-varying delays. Based on the time-delay estimation, it is proposed a predictor-observer strategy to obtain the future values of the system. The convergence of the prediction errors is shown by means of standard stability results on time delay systems. To show the potentiality of the time delay estimation and the state prediction results, the future state is used to solve a trajectory tracking problem.

**Keywords:** Time-delay estimation, time-varying delay, nonlinear state prediction, mobile robotics, trajectory tracking.

## 1. INTRODUCCIÓN

En la robótica móvil, el control de vehículos autónomos enfrenta un problema debido a los posibles retardos de tiempo involucrados en su estrategia de control, lo que representa un importante y amplio campo de estudio. Estos retardos pueden presentarse de manera puntual, distribuida o variable a lo largo del tiempo, tanto en la entrada del sistema como en sus estados, Niculescu (2001), Kharitonov (2013). Este tema ha sido de interés desde el trabajo de Smith (1957), quien desarrolló un predictor para compensar un retardo constante en la entrada de un sistema lineal estable en lazo abierto. La idea es utilizar una copia del sistema para predecir una salida futura y así corregir el control basándose en esta predicción, mejorando la estabilidad y la respuesta dinámica del sistema. Sin embargo, el denominado Predictor de Smith tiene algunas limitaciones: el sistema en lazo abierto debe ser estable y su desempeño depende en gran medida de la exactitud del modelo sin retardo; errores en el modelo pueden llevar a una compensación deficiente o incluso a la inestabilidad.

El Predictor de Smith ha influido en muchas investigaciones posteriores en el campo del control de sistemas con retardo, sirviendo de base para mejoras y modificaciones que han ampliado su aplicación a sistemas más complejos y no lineales. Uno de los investigadores destacados que continuó con este enfoque fue Horowitz (1966), quien introdujo el concepto de diseño de control robusto en los sistemas con retardos. Su enfoque se centró en garantizar que los sistemas de control mantuvieran un desempeño

deseado, incluso frente a incertidumbres en el modelo y variaciones en los parámetros del sistema.

Por otra parte, en Palmor (1996) se presentan diversas mejoras y extensiones al trabajo original de Smith. Palmor se enfocó en aumentar la robustez del predictor de Smith, mejorando la respuesta del sistema frente a incertidumbres en el modelo y variaciones del retardo. También propuso métodos para adaptar el predictor de Smith a sistemas cuyas características podían cambiar con el tiempo, permitiendo que el controlador se ajustara dinámicamente a estas variaciones. Además, extendió el uso del predictor de Smith a sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO), lo que amplió considerablemente su aplicabilidad.

Por otro lado, las investigaciones de Thau (1973) se centraron en la observación de estados que posteriormente fue muy importante en la predicción de sistemas no lineales. Más tarde, en Germani et al. (2002) se desarrollaron métodos avanzados para la observación y control en sistemas con retardo, basados en las técnicas de Mazenc and Bliman (2006) y junto con Krstic (2009), proporcionaron aproximaciones basadas en la retroalimentación de estados para abordar problemas no lineales en sistemas con retardo.

En el campo de la robótica móvil, se han presentado varias soluciones. Por ejemplo, Velasco-Villa et al. (2007) ofrecieron una solución en el tiempo discreto, mientras que Fragoso Rubio et al. (2018) propusieron un predictor de estados futuros basado en el observador de tipo Luenberger, (Luenberger, 1971). Además, el trabajo presentado por Báez-Hernández et al. (2021) se centra en el desarrollo de un predictor de estados futuros, considerando el concepto de subpredictores que permiten relajar las

\* G. Castillo-García agradece al CINVESTAV y al CONHACYT por el apoyo recibido a través de la beca CVU: 1240370.

\*\*J. González-Sierra agradece el apoyo del Instituto Politécnico Nacional a través del Proyecto SIP: 20240014.

condiciones de convergencia de la estimación. Se presenta una solución al problema de seguimiento de trayectorias.

En el presente trabajo se desarrolla un estimador de retardos variantes en el tiempo del tipo desarrollado en Guechi et al. (2010) para el caso de retardos constantes y su posterior utilización en el desarrollo de un predictor-observador de estados futuros para un robot del tipo diferencial.

El desarrollo de este trabajo se describe a continuación: En la Sección 2, se desarrolla el modelo cinemático de un robot móvil diferencial que experimenta un retardo en la entrada. La Sección 3 se enfoca en la estimación de un retardo desconocido, variante en el tiempo, basado en las señales de entrada del robot, mientras que en la Sección 4, se presenta el desarrollo de un predictor observador de estados futuros. Posteriormente, en la Sección 5 se muestra una evaluación numérica de la estrategia de estimación-predicción presentada. Finalmente, se exponen las conclusiones finales de este trabajo.

## 2. MODELO CINEMÁTICO

El análisis se desarrolla partiendo del modelo cinemático de un robot móvil diferencial o del tipo (2,0) como se muestra en la Figura 1. En (Campion et al., 1996) o (Canudas de Wit et al., 1996) se desarrolla y se muestran las ecuaciones cinemáticas en la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= u_1(t) \cos(x_3(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= u_1(t) \sin(x_3(t)) \\ \dot{x}_3(t) &= u_2(t) \end{aligned} \quad (1)$$

donde se asume que el robot se desplaza en una superficie plana y que no existen efectos de patinado de las ruedas o deslizamiento del cuerpo del robot, es decir, que existe un contacto puntual entre la superficie del área de trabajo y la rueda y que la velocidad entre la rueda y el piso es nula. En la Figura 1,  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  y  $x_3(t)$  representan variables de estado del robot diferencial con respecto al marco de referencia  $X - Y$  describiendo su posición por medio de  $x_1, x_2$  y su orientación mediante  $x_3$ . Las señales de entrada o de control están dadas por medio de la velocidad lineal  $u_1(t)$  y la velocidad angular  $u_2(t)$ .

Como es bien conocido, el robot (1) satisface la restricción no-holónoma,

$$\dot{x}_1 \sin x_3 - \dot{x}_2 \cos x_3 = 0$$

que representa una complejidad adicional a tener en cuenta en el robot diferencial.

Considerando el control de un robot móvil a distancia, mediante una computadora colocada en una posición remota, y conectada a través de una conexión inalámbrica al robot móvil, se asume la existencia de un retardo de tiempo variable en la comunicación. Específicamente, se define  $\tau_1(t)$  como el tiempo que tarda la señal de control emitida por la computadora en alcanzar al robot, y  $\tau_2(t)$  como el tiempo que tardan las señales generadas por los sensores en el robot en llegar de vuelta a la computadora. Este esquema se describe en la Figura 2.

A partir de los retardos descritos en la Figura 2 es posible ver que éstos pueden ser sumados para obtener un retardo total afectando las señales de entrada del robot móvil, esto es,  $\tau(t) = \tau_1(t) + \tau_2(t)$ . Este retardo total, que varía en el tiempo, afecta la entrada de control del sistema, introduciendo variaciones que deben ser compensadas, si es posible, para mantener el rendimiento y la precisión del control del robot. Por lo tanto, el retardo total  $\tau(t)$  puede incorporarse en el sistema (1) de la siguiente manera,

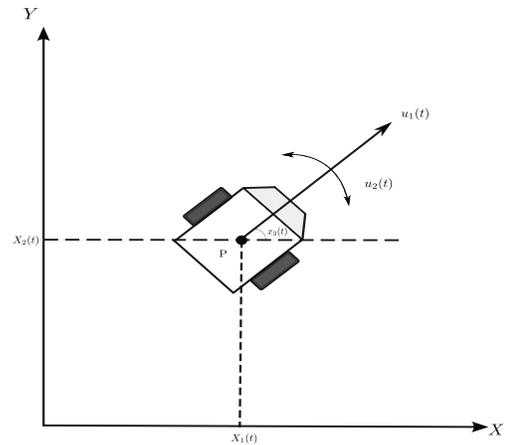


Fig. 1. Diagrama del robot móvil diferencial.

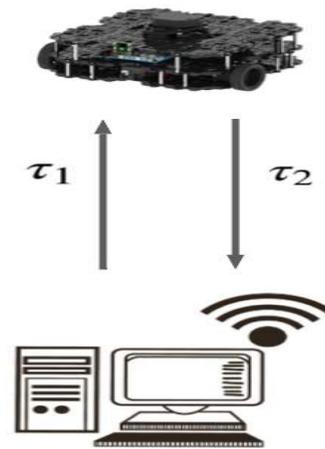


Fig. 2. Retardos de tiempo en la comunicación.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= u_1(t - \tau(t)) \cos(x_3(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= u_1(t - \tau(t)) \sin(x_3(t)) \\ \dot{x}_3(t) &= u_2(t - \tau(t)). \end{aligned} \quad (2)$$

## 3. ESTIMACIÓN DE RETARDOS VARIANTES EN EL TIEMPO

En la presente sección, se mostrará que es posible realizar la estimación de un retardo variante en el tiempo desconocido  $\tau(t)$  por medio del conocimiento de la velocidad y la aceleración angular del vehículo y de esta forma estar en posibilidades de utilizarlo en la predicción de los estados futuros del robot diferencial.

A partir del modelo cinemático del robot mostrado en (2) y respectivamente en la Figura 1, se consideran las siguientes suposiciones:

*Suposición 1.* El retardo variante desconocido, el cual afecta a la señales de entrada del sistema (2), satisface las cotas,

$$\sup_{t \geq 0} |\tau(t)| < \bar{\tau} \quad \text{y} \quad \sup_{t \geq 0} |\dot{\tau}(t)| < 1$$

donde  $\bar{\tau} \geq 0$  y además se asume que  $\tau(t_2) \geq \tau(t_1)$  para  $t_2 \geq t_1$ .

*Suposición 2.* La aceleración angular  $\dot{u}_2(t)$  satisface,

$$\eta_1 \leq \sup_{t \geq 0} |\dot{u}_2(t)| \leq \eta_2$$

para todo  $\eta_1, \eta_2 > 0$ .

Para obtener indirectamente la estimación del tiempo de retardo, considérese la señal de error,

$$\Delta(t) = u_2(t - \tau(t)) - u_2(t - \hat{\tau}(t)) \quad (3)$$

donde  $\tau(t)$  corresponde al valor desconocido del retardo y  $\hat{\tau}(t)$  corresponde a la estimación del retardo buscada.

El siguiente lema constituye una generalización, al caso de retardos variantes en el tiempo presentado en Guechi et al. (2010) para el caso de retardos constantes.

*Lema 1.* Considere el robot móvil (2) y asuma que el retardo  $\tau(t)$  es desconocido y considere que las señales de control  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  están disponibles. Considerando que se satisfacen las Suposiciones 1 y 2, el tiempo de retardo  $\tau(t)$  puede ser estimado mediante el siguiente observador,

$$\dot{\hat{\tau}}(t) = -G\dot{u}_2(t - \hat{\tau}(t)) \text{sign}(\Delta(t)) \quad (4)$$

donde  $G$  satisface la siguiente relación,

$$G > (1 + \alpha) \frac{\eta_2}{\eta_1^2}.$$

para alguna constante positiva  $\alpha < 1$ .

Como es usual, la función  $\text{sign}(\Delta(t))$  satisface,

$$\text{sign}(\Delta(t)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta > 0 \\ 0 & \text{si } \Delta = 0 \\ -1 & \text{si } \Delta < 0. \end{cases}$$

**Demstración.** Definiéndose inicialmente,

$$\phi(t) = t - \tau(t)$$

$$\hat{\phi}(t) = t - \hat{\tau}(t)$$

la función de error  $\Delta(t)$  puede escribirse como,

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= u_2(t - \tau(t)) - u_2(t - \hat{\tau}(t)) \\ &= u_2(\phi(t)) - u_2(\hat{\phi}(t)) \end{aligned} \quad (5)$$

Tomando la derivada con respecto al tiempo se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\Delta(t)] &= \frac{\partial u_2(\phi(t))}{\partial \phi(t)} \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} - \frac{\partial u_2(\hat{\phi}(t))}{\partial \hat{\phi}(t)} \frac{\partial \hat{\phi}(t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial u_2(\phi(t))}{\partial \phi(t)} \dot{\phi}(t) - \frac{\partial u_2(\hat{\phi}(t))}{\partial \hat{\phi}(t)} \dot{\hat{\phi}}(t) \end{aligned} \quad (6)$$

con lo cual, a partir de  $\dot{\phi}(t) = (1 - \dot{\tau})$  y  $\dot{\hat{\phi}}(t) = (1 - \dot{\hat{\tau}})$ ,

$$\dot{\Delta}(t) = \frac{\partial u_2(\phi(t))}{\partial \phi(t)} (1 - \dot{\tau}(t)) - \frac{\partial u_2(\hat{\phi}(t))}{\partial \hat{\phi}(t)} (1 - \dot{\hat{\tau}}(t)) \quad (7)$$

Considerando la función candidata de Lyapunov,

$$V(t) = \frac{1}{2} \Delta^2(t)$$

y, derivándola a lo largo de las trayectorias dadas en (7), se tiene lo siguiente,

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \Delta(t) \dot{\Delta}(t) \\ &= \Delta(t) \left[ \frac{\partial u_2(\phi(t))}{\partial \phi(t)} (1 - \dot{\tau}(t)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial u_2(\hat{\phi}(t))}{\partial \hat{\phi}(t)} (1 - \dot{\hat{\tau}}(t)) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

A partir de la estimación dada en (4), es posible escribir,

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \left[ \frac{\partial u_2(\phi(t))}{\partial \phi(t)} (1 - \dot{\tau}(t)) - \frac{\partial u_2(\hat{\phi}(t))}{\partial \hat{\phi}(t)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial u_2(\hat{\phi}(t))}{\partial \hat{\phi}(t)} G \dot{u}_2(\hat{\phi}) \text{sing}(\Delta(t)) \right] |\Delta(t)|. \end{aligned} \quad (9)$$

entonces, por medio de las Suposiciones 1 y 2 se obtiene,

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq [\eta_2 \alpha + \eta_2 - G \eta_1^2] |\Delta(t)| \\ &\leq [(1 + \alpha) \eta_2 - G \eta_1^2] |\Delta(t)| \\ &\leq -[G \eta_1^2 - (1 + \alpha) \eta_2] |\Delta(t)| \end{aligned}$$

De lo anterior, la convergencia al origen de  $\Delta(t)$  se asegura mediante la condición,

$$G > (1 + \alpha) \frac{\eta_2}{\eta_1^2}.$$

Esto concluye la demostración. ■

#### 4. PREDICTOR-OBSERVADOR CON RETARDO VARIANTE

Siguiendo las ideas en el diseño de un predictor-observador para sistemas lineales con retardo (V. Fragoso-Rubio et al., 2019) y su extensión al caso de robots móviles con retardos constantes en las señales de entrada (Báez-Hernández et al., 2023), en esta sección se presentará el diseño de un predictor de estados que contemple el caso de tiempos de retardo variantes cuando un robot móvil es controlado a distancia. El diseño del predictor propuesto se desarrolla a partir del sistema en adelanto del robot móvil y posteriormente diseñando un observador tipo Luenberger (Luenberger, 1971) para este sistema en adelanto.

El sistema en adelanto se obtiene al efectuar un corrimiento en el tiempo,  $\tau$  unidades en el futuro del sistema (2), esto es,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t + \tau(t)) &= u_1(t + \tau(t) - \tau(t + \tau(t))) \cos(x_3(t + \tau(t))) \\ \dot{x}_2(t + \tau(t)) &= u_1(t + \tau(t) - \tau(t + \tau(t))) \sin(x_3(t + \tau(t))) \\ \dot{x}_3(t + \tau(t)) &= u_2(t + \tau(t) - \tau(t + \tau(t))) \end{aligned} \quad (10)$$

que al considerar  $\bar{\tau} = \tau(t + \tau(t)) - \tau(t)$ , el sistema (10) puede reescribirse en la forma,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t + \tau(t)) &= u_1(t - \bar{\tau}) \cos(x_3(t + \tau(t))) \\ \dot{x}_2(t + \tau(t)) &= u_1(t - \bar{\tau}) \sin(x_3(t + \tau(t))) \\ \dot{x}_3(t + \tau(t)) &= u_2(t - \bar{\tau}) \end{aligned} \quad (11)$$

Defínase ahora las nuevas variables,

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= x_1(t + \tau(t)) \\ \omega_2(t) &= x_2(t + \tau(t)) \\ \omega_3(t) &= x_3(t + \tau(t)) \end{aligned} \quad (12)$$

cuyas derivadas con respecto al tiempo producen,

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= u_1(t - \bar{\tau}(t))(1 + \dot{\tau}(t)) \cos(\omega_3(t)) \\ \dot{\omega}_2 &= u_1(t - \bar{\tau}(t))(1 + \dot{\tau}(t)) \sin(\omega_3(t)) \\ \dot{\omega}_3 &= u_2(t - \bar{\tau}(t))(1 + \dot{\tau}(t)) \end{aligned} \quad (13)$$

Se propone entonces el observador para el sistema (13) o equivalentemente, el predictor para el sistema (2),

(V. Fragoso-Rubio et al., 2019), (Báez-Hernández et al., 2023),

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\omega}}_1(t) &= u_1(t - \bar{\tau}(t))(1 + \dot{\tau}(t)) \cos(\hat{\omega}_3(t)) \\ &\quad + \lambda_1 e_{\omega_1}(t - \tau(t)) \\ \dot{\hat{\omega}}_2(t) &= u_1(t - \bar{\tau}(t))(1 + \dot{\tau}(t)) \sin(\hat{\omega}_3(t)) \\ &\quad + \lambda_2 e_{\omega_2}(t - \tau(t))\end{aligned}\quad (14)$$

$$\dot{\hat{\omega}}_3(t) = u_2(t - \bar{\tau}(t))(1 + \dot{\tau}(t)) + \lambda_3 e_{\omega_3}(t - \tau(t))$$

donde los errores de predicción toman la forma,

$$e_{\omega_i}(t) = \omega_i(t) - \hat{\omega}_i(t) \quad (15)$$

y  $\lambda_i$  son constantes reales positivas para  $i = 1, 2, 3$ .

Las derivadas con respecto al tiempo de los errores de predicción producen,

$$\begin{aligned}\dot{e}_{\omega_1}(t) &= u_1(t - \bar{\tau}(t))(1 - \dot{\tau}(t)) \cos \omega_3(t) \\ &\quad - u_1(t - \bar{\tau}(t))(1 - \dot{\tau}(t)) \cos \hat{\omega}_3(t) \\ &\quad - \lambda_1 e_{\omega_1}(t - \tau(t)) \\ &= u_1(t - \bar{\tau}(t))(1 - \dot{\tau}(t)) [\cos \omega_3(t) - \cos \hat{\omega}_3(t)] \\ &\quad - \lambda_1 e_{\omega_1}(t - \tau(t)) \\ \dot{e}_{\omega_2}(t) &= u_1(t - \bar{\tau}(t))(1 - \dot{\tau}(t)) \sin \omega_3(t) \\ &\quad - u_1(t - \bar{\tau}(t))(1 - \dot{\tau}(t)) \sin \hat{\omega}_3(t) \\ &\quad - \lambda_2 e_{\omega_2}(t - \tau(t)) \\ &= u_1(t - \bar{\tau}(t))(1 - \dot{\tau}(t)) [\sin \omega_3(t) - \sin \hat{\omega}_3(t)] \\ &\quad - \lambda_2 e_{\omega_2}(t - \tau(t)) \\ \dot{e}_{\omega_3}(t) &= -\lambda_3 e_{\omega_3}(t - \tau(t))\end{aligned}$$

Por lo que puede escribirse la dinámica de los errores de predicción en la forma,

$$\begin{aligned}\dot{e}_{\omega_1}(t) &= -\lambda_1 e_{\omega_1}(t - \tau(t)) \\ &\quad - 2u_1(t - \bar{\tau}(t))(1 - \dot{\tau}(t)) \sin \mu \sin \frac{e_{\omega_3}(t)}{2} \\ \dot{e}_{\omega_2}(t) &= -\lambda_2 e_{\omega_2}(t - \tau(t)) \\ &\quad - 2u_1(t - \bar{\tau}(t))(1 - \dot{\tau}(t)) \cos \mu \sin \frac{e_{\omega_3}(t)}{2} \\ \dot{e}_{\omega_3}(t) &= -\lambda_3 e_{\omega_3}(t - \tau(t))\end{aligned}\quad (16)$$

donde

$$\mu = \frac{\omega_3(t) + \hat{\omega}_3(t)}{2}.$$

Para demostrar la convergencia al origen de la dinámica del error de predicción, tómesese primero la tercera ecuación en (16),

$$\dot{e}_{\omega_3}(t) = -\lambda_3 e_{\omega_3}(t - \tau(t)).$$

Considerando en primera instancia el caso  $\tau(t) = \bar{\tau}$  con  $\bar{\tau}$  igual a una constante es posible ver, a partir de Niculescu (2001), que  $e_{\omega_3}(t)$  convergerá al origen siempre que se satisfaga la condición,

$$\bar{\tau} = \frac{\pi}{2\lambda_3}.$$

En el caso de  $\tau(t)$  variante en el tiempo, asumiendo que se satisface la Suposición 1, es decir,  $\tau(t) \in [0, \bar{\tau}]$  y  $\dot{\tau}(t) \in [0, 1]$  es posible establecer la convergencia de  $e_{\omega_3}(t)$  mediante el resultado general presentado en la Proposición 1 de la Sección 3 en Fridman (2014), donde utilizando la técnica de Desigualdades Matriciales Lineales es posible mostrar que para un retardo acotado y una adecuada elección de  $\lambda_3$  es posible obtener el resultado deseado.

*Lema 2.* Asuma en los errores de predicción (16) que la señal de entrada  $u_1(t)$  es acotada y que  $e_{\omega_3}(t)$  converge

al origen. Entonces los errores de predicción cartesianos también convergen al origen.

**Demostración.** A partir de los errores de predicción (16) puede verse que bajo la hipótesis de convergencia de  $e_{\omega_3}(t)$ , los términos,

$$\begin{aligned}2u_1(t)(1 - \dot{\tau}(t)) \sin \mu \sin \frac{e_{\omega_3}(t)}{2} \\ 2u_1(t)(1 - \dot{\tau}(t)) \cos \mu \sin \frac{e_{\omega_3}(t)}{2}\end{aligned}\quad (17)$$

resultan desvanecientes y por lo tanto la convergencia de  $e_{\omega_1}(t)$  y  $e_{\omega_2}(t)$  dependerá de dinámicas similares a la mostrada para la convergencia de  $e_{\omega_3}(t)$ . ■

## 5. RESULTADOS EN SIMULACIÓN NUMÉRICA

Para mostrar el potencial de la estimación  $\hat{\tau}(t)$  de un retardo desconocido  $\tau(t)$  variante en el tiempo, junto con la estrategia de predicción desarrollada, en esta sección se abordará, el problema de seguimiento de trayectorias basadas en estados predichos.

### 5.1 Seguimiento de trayectorias

Se desea llevar a cabo el seguimiento de una trayectoria deseada tipo Lemniscata, descrita en la forma,

$$\begin{aligned}x_{1_d}(t) &= a \cos p(t) \\ x_{2_d}(t) &= b \sin p(t)\end{aligned}\quad (18)$$

donde se toma en particular,  $a = 4$ ,  $b = 3.2$  y  $p = 2 \left(\frac{\pi}{50}\right)$ .

Para resolver el problema de seguimiento de trayectoria se modificará la retroalimentación presentada en (Samson and Ait-Abderrahim, 1991), desarrollada para el caso libre de retardos. En el presente caso, los estados en tiempo  $t$  de la retroalimentación (Samson and Ait-Abderrahim, 1991), son sustituidos por los respectivos valores futuros obtenidos por medio del predictor propuesto, la retroalimentación a utilizar toma entonces la forma,

$$\begin{aligned}u_1 &= u_{1_d} \cos e_3 - k e_1 \\ u_2 &= u_{2_d} - k_3 e_3 - u_{1_d} e_2 \frac{\sin e_3}{e_3}\end{aligned}\quad (19)$$

donde las constantes  $k$  y  $k_3$  son constantes reales positivas con asignación  $k = 2$  y  $k_3 = 1.3$ ,  $u_{1_d}$ ,  $u_{2_d}$  se obtienen a partir de (18) y se define,

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\hat{\omega}_3) & \sin(\hat{\omega}_3) & 0 \\ -\sin(\hat{\omega}_3) & \cos(\hat{\omega}_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix}\quad (20)$$

con

$$\tilde{x}_1 = \hat{\omega}_1 - x_{1_d}, \tilde{x}_2 = \hat{\omega}_2 - x_{2_d}, \tilde{x}_3 = \hat{\omega}_3 - x_{3_d}$$

donde  $x_{1_d}(t)$ ,  $x_{2_d}(t)$  están dadas en (18) y  $x_{3_d}(t)$  está dada por,

$$x_{3_d}(t) = \arctan \frac{\dot{x}_{2_d}}{\dot{x}_{1_d}}.$$

Para validar el enfoque propuesto, se introduce un retardo variante desconocido, descrito de la forma,

$$\tau(t) = 0.2 + 0.1 \sin\left(\frac{t}{15}\right).$$

Para el estimador del tiempo de retardo dado en el Lema 1 se propone  $G = 1.5$  y en el caso del predictor (14) se utilizan las ganancias  $\lambda_1 = 1.5$ ,  $\lambda_2 = 1.4$  y  $\lambda_3 = 1.4$ .

Para evaluar empíricamente, la robustez de la estimación del retardo y de la predicción de los estados futuros, en

la evolución del robot en el plano  $X - Y$  se introducen desplazamientos en la posición del robot en los segundos  $t = 26$  y  $t = 46$ .

La evolución del robot con retardo de tiempo a la entrada (2) en lazo cerrado con la retroalimentación basada en predicción (19) puede observarse en la Figura 3. Puede verse claramente como se obtiene la convergencia de los errores de seguimiento, aún a pesar de las perturbaciones introducidas.

En la Figura 4 puede verse la convergencia al origen del error de estimación del retardo variante, la cual se obtiene eficientemente.

Los errores cartesianos de predicción  $e_{w_1}(t)$ ,  $e_{w_2}(t)$  se muestran en la Figura 5, mientras que el error de predicción de la orientación  $e_{w_3}(t)$  se muestra en la Figura 6. Nótese como a pesar de las perturbaciones introducidas en la posición del robot, inicialmente se observa que el estimador de retardo converge, lo que permite que, posteriormente, el predictor también comience a converger. Sin embargo, al introducir perturbaciones en los segundos 26 y 46, se nota un impacto en el error de predicción. A pesar de estas perturbaciones, el sistema demuestra su robustez al volver a converger después de cada perturbación, lo que indica la efectividad del estimador y del predictor en la corrección y estabilización del error de predicción.

Los errores generados al seguir la trayectoria deseada  $e_1(t)$ ,  $e_2(t)$  se muestran en la Figura 7 y el error de seguimiento en la orientación  $e_3(t)$  se describe en la Figura 8. Se observa que la convergencia de los error de seguimiento es más lenta. Esto se debe a que el predictor sólo comienza a converger después de que el estimador de retardo ha alcanzado su propia convergencia y, por lo tanto, la convergencia de los errores de seguimiento, queda supeditada a estas etapas iniciales.

Finalmente, la trayectoria del robot en el plano  $X - Y$  cuando no existen perturbaciones se muestra en la Figura 9, donde tan solo se tiene un transitorio inicial debido a las condiciones iniciales.

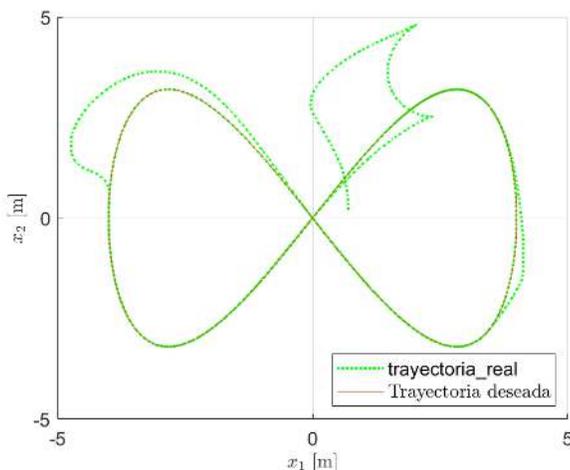


Fig. 3. Trayectoria en el plano  $X - Y$  del robot móvil.

## 6. CONCLUSIONES

Este trabajo se enfoca en dos puntos principales, la estimación de un retardo de tiempo desconocido, variante en el tiempo y el diseño de un predictor de estados que tome en cuenta la variación del retardo en el caso de un robot

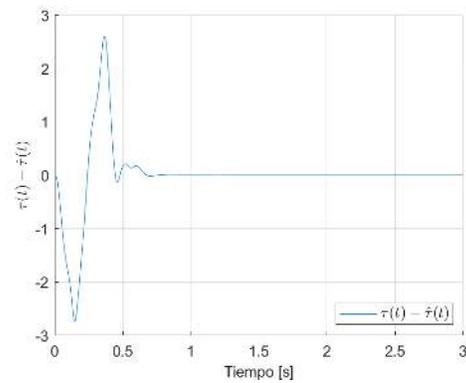


Fig. 4. Error de estimación del retardo variante.

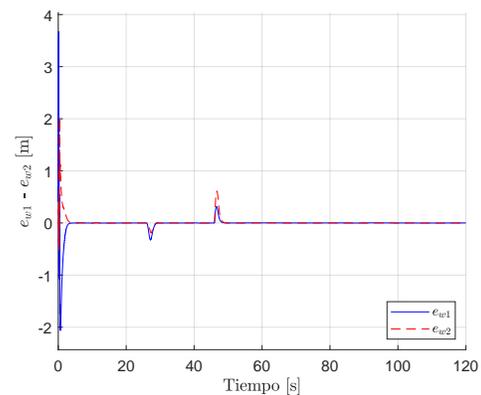


Fig. 5. Errores de predicción cartesianos  $e_{w_1}(t)$  y  $e_{w_2}(t)$ .

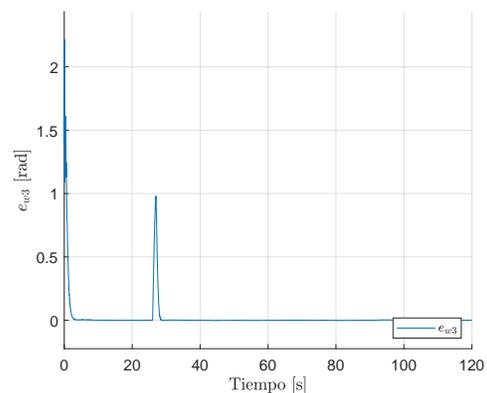


Fig. 6. Error de predicción  $e_{w_3}(t)$ .

móvil del tipo diferencial. Se muestra formalmente como es posible estimar retardos variantes en el tiempo a diferencia de resultados previos que abordan el caso de retardo constante y se diseña un predictor de estados, basado en los estados estimados, que es capaz de converger aún ante el problema de las variaciones mencionadas. Los resultados obtenidos se evalúan por medio de simulaciones numéricas considerando un problema de seguimiento de trayectorias, aún en el caso de que la estabilidad del sistema completo en lazo cerrado no es presentada. Los resultados de las simulaciones indican claramente que el estimador y el predictor desarrollados son capaces de manejar eficazmente el seguimiento de trayectoria y la estimación del retardo. Esta investigación proporciona una base inicial sólida para futuras aplicaciones en robótica

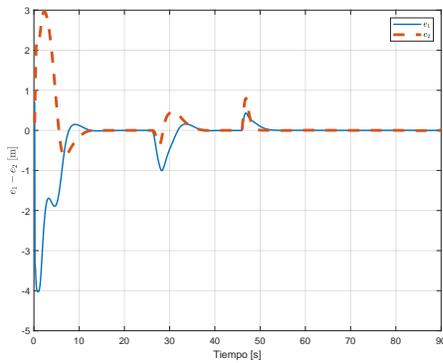


Fig. 7. Evolución de errores de seguimiento  $e_1(t)$  y  $e_2(t)$ .

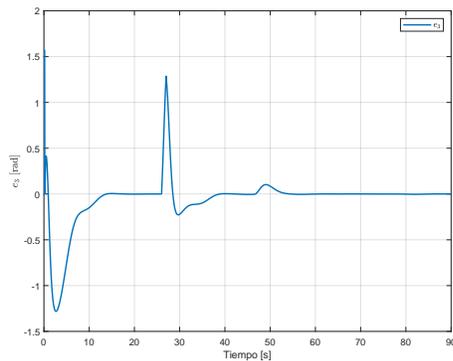


Fig. 8. Error de seguimiento de orientación  $e_3(t)$ .

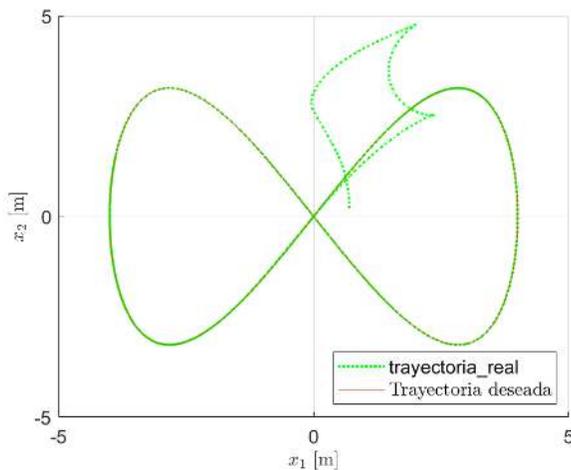


Fig. 9. Trayectoria del robot en el plano  $X - Y$  cuando no existen perturbaciones.

móvil, donde los retardos en las señales de entrada son comunes y pueden afectar significativamente el rendimiento del sistema.

## REFERENCIAS

Báez-Hernández, J.A., Velasco-Villa, M., and Mondie, S. (2021). Predicción no lineal de estados para un robot móvil diferencial. In *Congreso Nacional de Control Automático*.  
Báez-Hernández, J.A., Velasco-Villa, M., and Mondie, S. (2023). Non-linear prediction-based trajectory tracking

for non-holonomic mobile robots. *IEEE Access*, 11, 124265–124277. doi:10.1109/ACCESS.2023.3330145.  
Campion, G., Bastin, G., and D'andrea-Novell, B. (1996). Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 12(1), 47–62. doi:10.1109/70.481750.  
Canudas de Wit, C., Siciliano, B., and Bastin, G. (1996). *Theory of robot control*. Communications and control engineering. Springer-Verlag London.  
Fragoso Rubio, V., Vallejo Alarcón, M.A., and Velasco Villa, M. (2018). Control basado en predicción no lineal para un robot móvil omnidireccional con retardo a la entrada. In *Congreso Nacional de Control Automático*.  
Fridman, E. (2014). Tutorial on lyapunov-based methods for time-delay systems. *European Journal of Control*, 20(6), 271–283. doi: https://doi.org/10.1016/j.ejcon.2014.10.001.  
Germani, A., Manes, C., and Pepe, P. (2002). A new approach to state observation of nonlinear systems with delayed output. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47, 96–101.  
Guechi, E.H., Lauber, J., Dambrine, M., and Defoort Guechi, M. (2010). Output feedback controller design of a unicycle-type mobile robot with delayed measurements. *IET Control Theory and Applications*.  
Horowitz, I.M. (1966). Design of robust control for systems with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 11(3), 382–387.  
Kharitonov, V.L. (2013). *Time-Delay Systems: Lyapunov Functional and Matrices*. Birkhäuser.  
Krstic, M. (2009). *Delay compensation for nonlinear, adaptive, and PDE systems*. Springer.  
Luenberger, D. (1971). An introduction to observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(6), 596–602.  
Mazenc, F. and Bliman, P.A. (2006). Backstepping design for time delay nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51, 149–154.  
Niculescu, S. (2001). *Delay Effects on Stability, A Robust Control Approach*. Springer.  
Palmor, Z.J. (1996). Time-delay compensation smith predictor and its modifications. In *The Control Handbook*, 224–229.  
Samson, C. and Ait-Abderrahim, K. (1991). Feedback control of a nonholonomic wheeled cart in cartesian space. In *Proceedings. 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1136–1141 vol.2. doi:10.1109/ROBOT.1991.131748.  
Smith, O.J.M. (1957). Closer control of loops with deadtime. *Chem. Eng. Prog.*, 53(5), 217–219.  
Thau, F.E. (1973). Observing the state of non-linear dynamic systems. *International Journal of Control*, 17(3), 471–479.  
V. Fragoso-Rubio, M.V.V., Hernández-Pérez, M.A., del Muro-Cuéllar, B., and Márquez-Rubio, J.F. (2019). Prediction-observer scheme for linear systems with input-output time delay. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 17(8), 2012–2025. doi: 10.1007/s12555-018-0347-8.  
Velasco-Villa, M., del Muro-Cuellar, B., and Alvarez-Aguirre, A. (2007). Smith-predictor compensator for a delayed omnidirectional mobile robot. In *Mediterranean Conference on Control and Automation*.