

# Control design for linear systems with commensurate delays via Coordinate Transformation: A Single-Input Case Study

Juan Luis Guadarrama y Francisco Javier Bejarano

*Instituto Politécnico Nacional, ESIME Ticomán, Ciudad de México  
(e-mail: guacas.jl@gmail.com / fjbejarano@ipn.mx).*

**Abstract:** The design of control for systems with commensurate delays with single input is proposed. The key to the design is to find a similarity transformation such that, in the new coordinates, all delays are aligned in the same input channel. A necessary and sufficient condition is established for transforming the system into the desired controllable form. Moreover, our analysis demonstrates that incorporation of a stable asymptotic observer in the state feedback does not impair stability of the system.

**Keywords:** Commensurate delays, controllable canonical form, control design, relative degree.

## 1. INTRODUCCIÓN

*Antecedentes.* Los sistemas con retardos pueden ser utilizados para modelar diversos sistemas físicos, así como procesos químicos y biológicos, entre otros, (ver, por ejemplo, Mounier et al. (1997), Richard (2003)). La literatura sobre este tipo de sistemas presenta diversos resultados que abordan el estudio de diferentes problemas como la controlabilidad (Fliess and Mounier (1998)), estabilidad (Fridman (2014)), control (Belhamel et al. (2020)), seguimiento (Estrada-Garcia et al. (2007)), observabilidad (Zheng et al. (2011)), identificabilidad (Anguelova and Wennberga (2008), Zheng et al. (2013)), y desacoplamiento de perturbaciones (Moog et al. (2000)). En Hou et al. (2002) se propone un método para el diseño de un observador basado en la transformación del sistema, tal que, en las nuevas coordenadas el sistema adopte una forma canónica observable. Este enfoque establece una condición necesaria y suficiente para construir dicha transformación, simplificando considerablemente el diseño del observador y obteniendo una dinámica de error de estimación libre de retardos. Es importante destacar que, en general, la transformación encontrada en este trabajo no es biyectiva, sino solo inyectiva, es decir, el sistema se incrusta en un espacio de dimensión mayor. En estudios posteriores se obtuvieron resultados para sistemas con retardos commensurados afectados por entradas desconocidas (Bejarano and Zheng (2014) y Zheng et al. (2015)). La transformación a un sistema libre de retardos se abordan en (Gárate-García et al. (2011)), mientras que la dinámica cero y el problema del desacoplamiento de perturbaciones para sistemas lineales con retardos commensurados y retardos distribuidos se estudiaron en Bejarano (2021).

*Contribución.* En este trabajo, se busca implementar un enfoque similar al presentado en Hou et al. (2002). El objetivo específico es encontrar condiciones bajo las cuales se puede transformar un sistema lineal con una entrada a una forma de controlador mediante una transformación biyectiva. Esta transformación facilita el diseño de la ley de control, permitiendo compensar los términos que agrupan los retardos y aplicar una retroalimentación estándar como se utiliza en sistemas libres de retardos.

*Notación.*  $\mathbb{R}$  representa el conjunto de números reales,  $\mathbb{R}^+$  simboliza los números reales positivos,  $\mathbb{R} \setminus 0$  indica los números reales excluyendo el cero, mientras que  $\mathbb{R}^n$  denota el espacio euclidiano  $n$ -dimensional.  $\mathbb{R}[\delta]$  representa el anillo de polinomios sobre  $\mathbb{R}$  en la indeterminada  $\delta$ . Con  $\mathbb{R}^{p \times q}[\delta]$ , expresamos el conjunto de matrices  $p \times q$  cuyas entradas están en  $\mathbb{R}[\delta]$ .  $I_p$  es la matriz identidad de dimensión  $p \times p$ . Para una matriz  $\mathcal{M}(\delta)$ ,  $\Lambda_{\mathcal{M}}$  denota la forma normal de Smith de  $\mathcal{M}(\delta)$ , mientras que  $\text{rank} \mathcal{M}(\delta)$  es el rango de  $\mathcal{M}(\delta)$  sobre  $\mathbb{R}[\delta]$ . Denotamos  $\mathcal{M}^+(\delta)$  como la matriz unimodular por la izquierda y  $\mathcal{M}^{-1}(\delta)$  como la matriz inversa de  $\mathcal{M}(\delta)$ . La transpuesta de  $\mathcal{M}(\delta)$  se expresa como  $\mathcal{M}^T(\delta)$ . Si  $B \in \mathbb{R}$ , entonces  $|B|$  representa el valor absoluto de  $B$ .

*Descripción de las secciones.* El problema a estudiar se plantea en la Sección 2, donde el objetivo principal es poner el sistema en la llamada forma de controlador. En la Sección 3, recordamos algunos conceptos preliminares que son necesarios para seguir el método utilizado a lo largo del artículo. Los principales resultados de este trabajo se encuentran en la Sección 4, donde proporcionamos una condición necesaria y suficiente para transformar el sistema en la forma deseada. En la Sección 5, presentamos la forma de observador obtenida en Hou et al. (2002) y abordamos el principio de separación.

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Consideremos la clase de sistemas lineales e invariantes en el tiempo con retardos conmensurados, que, siguiendo la propuesta de Morse (1976), pueden ser modelados sobre el anillo de polinomios como:

$$\dot{x}(t) = A(\delta)x(t) + b(\delta)u(t), \quad (1)$$

esto mediante el operador de retardo  $\delta$ , que define el cambio  $\delta x(t) = x(t-h)$ . En (1),  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  y  $u(t) \in \mathbb{R}$  representan el vector de estados y el control del sistema en el instante de tiempo  $t$ , respectivamente. La matriz  $A(\delta) \in \mathbb{R}^{n \times n}[\delta]$  y el vector  $b(\delta) \in \mathbb{R}^{n \times 1}[\delta]$  existen sobre el anillo de polinomios. La condición inicial  $\phi(s)$  es una función continua a trozos definida en  $\phi(s) : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Decimos que un sistema, como en (1), adopta la forma del controlador si puede expresarse como:

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + G[\psi(\delta)x(t) + \gamma u(t)] \quad (2)$$

donde,  $(F, G)$  es controlable y la constante  $\gamma \in \mathbb{R} \setminus 0$ . En esta forma,  $\psi(\delta)$  agrupa los retardos del sistema.

Una vez que el sistema está en la forma del controlador, el diseño del control para estabilizarlo es más sencillo. De hecho, al seleccionar:

$$u(t) = \frac{1}{\gamma} [-\psi(\delta)x(t) - Kx(t)] \quad (3)$$

obtenemos el sistema libre de retardos en lazo cerrado:

$$\dot{x}(t) = (F - GK)x(t). \quad (4)$$

En general, la representación directa del sistema (1) como en (2) puede ser compleja o incluso imposible. Para abordar este problema, buscaremos un cambio de coordenadas  $z(t) = T(\delta)x(t)$ , donde,  $z(t) \in \mathbb{R}^n$  y  $T(\delta) \in \mathbb{R}^{n \times n}[\delta]$  es unimodular, de modo que el sistema (1) en sus nuevas coordenadas adopte la forma de controlador:

$$\dot{z}(t) = A_c z(t) + b_c [\bar{\psi}(\delta)z(t) + \bar{\gamma}u(t)] \quad (5)$$

donde el par de matrices constantes  $(A_c, b_c)$  debe ser controlable y  $\bar{\gamma} \in \mathbb{R} \setminus 0$ .

## 3. PRELIMINARES

Dado que el sistema (1) está descrito por matrices polinomiales sobre  $\mathbb{R}[\delta]$ , proporcionemos algunas definiciones sobre unimodularidad.

*Definición 1.* Dada la matriz polinomial  $\mathcal{M}(\delta) \in \mathbb{R}^{p \times q}[\delta]$  con  $p \geq q$ , se dice que es unimodular por la izquierda sobre  $\mathbb{R}[\delta]$  si existe una matriz  $\mathcal{M}^+(\delta) \in \mathbb{R}^{q \times p}[\delta]$ , tal que,  $\mathcal{M}^+(\delta)\mathcal{M}(\delta) = I_q$ . Una matriz cuadrada  $\mathcal{M}(\delta) \in \mathbb{R}^{q \times q}[\delta]$  es unimodular (invertible) sobre  $\mathbb{R}[\delta]$  si existe  $\mathcal{M}^{-1}(\delta)$  tal que  $\mathcal{M}(\delta)\mathcal{M}^{-1}(\delta) = \mathcal{M}^{-1}(\delta)\mathcal{M}(\delta) = I_q$ .

*Definición 2.* (Kailath (1980)). Para cada matriz  $\mathcal{M}(\delta) \in \mathbb{R}^{p \times q}[\delta]$  con rango  $r$ , existen dos matrices unimodulares, no necesariamente únicas,  $U(\delta) \in \mathbb{R}^{p \times p}[\delta]$  y  $V(\delta) \in \mathbb{R}^{q \times q}[\delta]$ , tales que, reducen a  $\mathcal{M}(\delta)$  a su forma normal de Smith,  $\Lambda_{\mathcal{M}}(\delta)$ :

$$U(\delta)\mathcal{M}(\delta)V(\delta) = \Lambda_{\mathcal{M}}(\delta) = \begin{bmatrix} \text{diag}(\lambda_1(\delta) \cdots \lambda_r(\delta)) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde, los polinomios no nulos  $\lambda_{\mathcal{M}}(\delta) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$  son únicos y se conocen como factores invariantes de  $\mathcal{M}(\delta)$ .

Los siguientes resultados son bien conocidos (ver, por ejemplo, Antsaklis and Michel (1997)), por lo que omitimos su prueba.

*Proposición 1.* Una matriz polinomial  $\mathcal{M}(\delta) \in \mathbb{R}^{p \times q}[\delta]$  con  $p \geq q$  es unimodular por la izquierda, si y solo si, tiene  $q$  factores invariantes constantes.

*Proposición 2.* Una matriz polinomial cuadrada  $\mathcal{M}(\delta) \in \mathbb{R}^{p \times p}[\delta]$  es unimodular, si y solo si,  $\det \mathcal{M}(\delta) \in \mathbb{R} \setminus 0$ .

Para el estudio que realizamos más adelante, necesitamos el concepto de grado relativo. Por eso, nos apoyamos en Mueller (2009) para presentar la siguiente definición.

*Definición 3.* Dada una salida virtual  $y_v(t) = C_v(\delta)x(t)$  ( $y_v(t) \in \mathbb{R}$ ), el grado relativo  $\rho$  del sistema (1) con respecto a  $y_v$  se define como sigue:

$$\begin{aligned} C_v(\delta)A^k(\delta)b(\delta) &= 0, \quad \text{para } k \in \{0, 1, \dots, \rho - 2\} \\ C_v(\delta)A^{\rho-1}(\delta)b(\delta) &\neq 0 \end{aligned}$$

El grado relativo es regular si  $C_v(\delta)A^{\rho-1}(\delta)b(\delta) \in \mathbb{R} \setminus 0$ .

## 4. RESULTADOS PRINCIPALES

En esta sección, demostraremos que una condición necesaria y suficiente para transformar el sistema en la forma de controlador radica en que la matriz de controlabilidad sea unimodular. La matriz de controlabilidad para el sistema (1) denotado por  $\mathcal{C}(\delta)$  se define como<sup>1</sup>:

$$\mathcal{C}(\delta) = [b(\delta), A(\delta)b(\delta), \dots, A^{n-1}(\delta)b(\delta)]_{n \times n}. \quad (6)$$

Primero, estableceremos que una condición suficiente para transformar el sistema a la forma de controlador es que la matriz de controlabilidad sea unimodular. Posteriormente, demostraremos que esta condición también es necesaria.

*Lema 1.* (Condición suficiente). Supongamos que la matriz de controlabilidad es unimodular y que  $T(\delta)$  es construida como sigue:

$$T(\delta) = \text{col}(T_1(\delta) \cdots T_n(\delta)) \quad (7)$$

donde  $T_i(\delta) = C_v(\delta)A^{i-1}(\delta)$  para  $i = 1, \dots, n$  y  $C_v(\delta)$  seleccionada como la última fila de la matriz  $\mathcal{C}^{-1}(\delta)$ .

Si definimos a  $z(t) = T(\delta)x(t)$ , entonces, en esta transformación, el sistema adopta la forma de controlador (5), donde, las matrices  $A_c$ ,  $b_c$ ,  $\bar{\psi}(\delta)$  y  $\bar{\gamma}$  toman las siguientes formas:

<sup>1</sup> Por el teorema de Cayley-Hamilton, que aplica para matrices sobre anillos conmutativos, la matriz  $A^n(\delta)$  es una combinación lineal de todas las potencias inferiores de  $A(\delta)$  (ver, por ejemplo Brown (1993))

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad b_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}, \quad (8)$$

$$\bar{\psi}(\delta) = C_v(\delta) A^n(\delta) T^{-1}(\delta), \quad (9)$$

$$\bar{\gamma} = C_v(\delta) A^{n-1}(\delta) b(\delta) = 1. \quad (10)$$

**Demostración.** Supongamos que la matriz de controlabilidad es unimodular. Expresemos a  $\mathcal{C}^{-1}(\delta)$  como

$$\mathcal{C}^{-1}(\delta) = \text{col}(S_1(\delta) \ S_2(\delta) \ \cdots \ S_n(\delta)).$$

Si definimos  $C_v(\delta) := S_n(\delta)$ . Al realizar  $\mathcal{C}^{-1}(\delta)\mathcal{C}(\delta)$ , es fácil ver que,  $C_v(\delta)A^k(\delta)b(\delta) = 0$ , para  $k = 0, 1, \dots, n-2$ , y  $C_v(\delta)A^{n-1}(\delta)b(\delta) = 1$ .

Ahora, dividimos al vector  $z$  como  $z = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T$  y escogemos a  $z_i(t) = T_i(\delta)x(t)$ . Entonces, la derivada de  $z_i$  es

$$\dot{z}_i(t) = T_i(\delta)A(\delta)T^{-1}(\delta)z(t) + T_i(\delta)b(\delta)u(t)$$

con  $i = 1, \dots, n$ . La dinámica de  $z_i$  toma la forma:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= C_v(\delta)A(\delta)T^{-1}(\delta)z(t) = z_2(t) \\ &\vdots \\ \dot{z}_{(n-1)}(t) &= C_v(\delta)A^{n-1}(\delta)T^{-1}(\delta)z(t) = z_n(t) \\ \dot{z}_n(t) &= \bar{\psi}(\delta)z(t) + \bar{\gamma}u(t) \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $z(t) = T(\delta)x(t)$  transforma el sistema (1) en (5), con  $A_c$ ,  $b_c$ ,  $\bar{\psi}(\delta)$  y  $\bar{\gamma}$  como en (8), (9) y (10) respectivamente.  $\square$

#### 4.1 Resultado principal

En el Teorema 1, demostraremos a través de las igualdades que una condición necesaria y suficiente para transformar el sistema a la forma de controlador es que la matriz de controlabilidad sea unimodular.

*Theorem 1.* Consideremos al sistema (1). Lo siguiente es equivalente:

- Existe un cambio de coordenadas  $z(t) = T(\delta)x(t)$ , donde  $T(\delta) \in \mathbb{R}^{n \times n}[\delta]$  es unimodular, que transforma el sistema (1) en (5).
- Existe una matriz  $C_v(\delta)$ , tal que, la salida virtual  $y_v(t) = C_v(\delta)x(t)$  tiene grado relativo regular igual a  $n$ .
- La matriz de controlabilidad es unimodular.

**Demostración.** Primero demostremos que (a)  $\implies$  (b).

Supongamos que (a) se cumple. Esto implica que el par de matrices  $(A_c, b_c)$  es controlable, es decir, la matriz de controlabilidad  $\mathcal{C}_c = [b_c \ A_c b_c \ \cdots \ A_c^{n-1} b_c]$  para (5) es invertible. Si multiplicamos  $A_c$  por  $\mathcal{C}_c$ , obtenemos

$A_c \mathcal{C}_c = [A_c b_c \ A_c^2 b_c \ \cdots \ A_c^n b_c]$ , debido al teorema de Cayley-Hamilton  $A_c^n = \alpha_0 I + \alpha_1 A_c + \cdots + \alpha_{n-1} A_c^{n-1}$ , para algunas constantes  $\alpha_i$ . Entonces,  $A_c \mathcal{C}_c = \mathcal{C}_c \bar{A}^T$ , donde  $\bar{A}^T$  es la traspuesta de  $\bar{A}$  y

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Además,  $\bar{A}^T N = N \bar{A}$ , donde,

$$N = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ -\alpha_{n-1} & 1 & & \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix},$$

por lo tanto,  $A_c \mathcal{C}_c N = \mathcal{C}_c N \bar{A}$ . Entonces, las matrices  $\bar{A}$  y  $\bar{b}$  son

$$\begin{aligned} \bar{A} &= (\mathcal{C}_c N)^{-1} A_c (\mathcal{C}_c N) \\ \bar{b} &= (\mathcal{C}_c N)^{-1} b_c = [0 \ \cdots \ 0 \ 1]^T. \end{aligned}$$

Definiendo  $\bar{C}$  como  $\bar{C} := [1 \ 0 \ \cdots \ 0]$ , tenemos que  $\bar{C} \bar{A}^k \bar{b} = 0$ , para  $k = 0, 1, \dots, n-2$  y  $\bar{C} \bar{A}^{n-1} \bar{b} = 1$ .

Elijiendo  $\tilde{T} = (\mathcal{C}_c N)^{-1}$  y  $\tilde{C}_v = \bar{C} \tilde{T}^{-1}$ , obtenemos la siguiente identidad

$$\tilde{C} \bar{A}^k \bar{b} = \tilde{C}_v \tilde{T}^{-1} (\tilde{T} A_c^k \tilde{T}^{-1}) \tilde{T} b_c = \tilde{C}_v A_c^k b_c.$$

Así mismo de la condición (a), vemos que,  $A(\delta) = T^{-1}(\delta)(\bar{A}_c)T(\delta)$  y  $b(\delta) = T^{-1}(\delta)\bar{b}_c$ , donde  $\bar{A}_c = A_c + b_c \bar{\psi}(\delta)$  y  $\bar{b}_c = b_c \bar{\gamma}$ . Definiendo  $C_v(\delta) = \tilde{C}_v T(\delta)$ , obtenemos:

$$\tilde{C}_v A_c^k b_c = C_v T(\delta) (T^{-1}(\delta) \bar{A}_c^k T(\delta)) T^{-1}(\delta) \bar{b}_c = C_v(\delta) A^k(\delta) b(\delta),$$

lo cual implica que la salida virtual  $y_v(t) = C_v(\delta)x(t)$  tiene grado relativo regular igual a  $n$ .

Demostremos que (b)  $\implies$  (c).

Supongamos que (b) se cumple. Construyamos a  $T(\delta)$  como  $T(\delta) = \text{col}(C_v(\delta), C_v(\delta)A(\delta), \dots, C_v(\delta)A^{n-1}(\delta))$  con  $C_v(\delta)$  definida en (b). Veamos que:

$$T(\delta)\mathcal{C}(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \gamma \\ 0 & \cdots & \gamma & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \gamma & * & * & * \end{bmatrix}.$$

Dado que  $|\det(T(\delta)\mathcal{C}(\delta))| = |\gamma^n| \in \mathbb{R} \setminus 0$ , entonces, tanto la matriz de transformación  $T(\delta)$  como la matriz de controlabilidad  $\mathcal{C}(\delta)$  son unimodulares.

Demostremos que (c)  $\implies$  (a).

Esta demostración es justo el Lema 1.

## 5. PRINCIPIO DE SEPARACIÓN

Para diseñar el control por retroalimentación de estados, es necesario tener acceso completo al vector de los estados

del sistema. Sin embargo, en la práctica, nuestro acceso es parcial, ya que solo podemos obtener información a través de los sensores disponibles. En esta sección, abordaremos este problema mediante el conocido principio de separación, el cual establece que la estabilidad del sistema no se ve afectada si se utilizan estados estimados en la señal de control. Esto significa que podemos diseñar un observador para estimar los estados del sistema y luego utilizar estos estados estimados en el diseño del controlador.

El trabajo de Hou et al. (2002) presenta un método para el diseño de observador en sistemas con retardos commensurados. Este método se basa en un cambio de coordenadas generalizado  $w(t) = P(\delta)x(t)$ , donde  $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$  es el nuevo vector de estados y  $P(\delta) \in \mathbb{R}^{n_w \times n}[\delta]$ , definida en el Teorema en Hou et al. (2002), es la matriz de transformación, siendo  $n_w \geq n$  la dimensión de las nuevas coordenadas. Este cambio de coordenadas transforma el sistema (1) junto con  $y(t) = C(\delta)x(t)$  ( $y(t) \in \mathbb{R}^l$ ), a una forma observable:

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= A_o w(t) + b_o(\delta)u(t) + \bar{F}(\delta)y(t) \\ y(t) &= C_o w(t) \end{aligned} \quad (11)$$

donde el par de matrices  $(A_o, C_o)$  es observable y  $\bar{F}(\delta)y(t)$  es el término de la inyección de la salida que contiene los retardos.

Por lo tanto, el sistema

$$\dot{\hat{w}}(t) = A_o \hat{w}(t) + b_o(\delta)u(t) + \bar{F}(\delta)y(t) + \bar{L}(y(t) - C_o \hat{w}(t)) \quad (12)$$

junto con  $\hat{x}(t) = P^+(\delta)\hat{w}(t)$ , forma un observador de estado para el sistema (1). El error dinámico está dado por la siguiente ecuación:

$$\dot{e}_w(t) = (A_o - \bar{L}C_o)e_w(t) \quad (13)$$

donde  $e_w(t) = w(t) - \hat{w}(t)$  y  $\bar{L}$  es una matriz, tal que,  $(A_o - \bar{L}C_o)$  sea Hurwitz.

*Lema 2.* (Hou et al. (2002)).

- (a) Existe un cambio de coordenadas generalizado  $w(t) = P(\delta)x(t)$ , donde  $P(\delta) \in \mathbb{R}^{n_w \times n}[\delta]$  es unimodular por la izquierda, que transforma el sistema (1) en (11), si y solo si, la matriz de observabilidad  $\mathcal{O}_p(\delta)$  es unimodular. Aquí

$$\mathcal{O}_p(\delta) = \begin{bmatrix} C(\delta) \\ C(\delta)A(\delta) \\ \vdots \\ C(\delta)A^{p-1}(\delta) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(p \cdot l) \times n}[\delta], \quad (14)$$

donde  $p \leq n$  es el entero mínimo tal que  $\mathcal{O}_p(\delta)$  es unimodular.

Consideremos que el sistema (1) es transformable a la forma observable (11) y controlable (5).

Seleccionemos  $\hat{z}(t) = T(\delta)\hat{x}(t)$ . Del observador vemos que  $\hat{x}(t) = P^+(\delta)\hat{w}(t)$ , por lo tanto,  $\hat{z}(t) = T(\delta)P^+(\delta)\hat{w}(t)$ .

Ahora, reemplacemos a los estados  $z$  de la señal de control por los estados estimados  $\hat{z}$ , es decir,

$$u(t) = \frac{1}{\bar{\gamma}} [-\bar{\psi}\hat{z}(t) - K\hat{z}(t)]. \quad (15)$$

La dinámica de  $z(t)$  en lazo cerrado es

$$\dot{z}(t) = (A_c - b_c K)z(t) + (b_c \bar{\psi}(\delta) + b_c K)e_z \quad (16)$$

donde  $e_z = z(t) - \hat{z}(t)$ .

Por otra parte, podemos escribir al error  $e_z$  en términos del error  $e_w$ , tal que,

$$e_z = T(\delta)P^+(\delta)e_w. \quad (17)$$

Las dinámicas en forma matricial de  $z$  y  $e_w$ , expresadas en (16) y (13) respectivamente, en lazo cerrado son:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{e}_w(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A_c - b_c K) & \mathcal{D} \\ 0 & (A_o - \bar{L}C_o) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ e_w(t) \end{bmatrix} \quad (18)$$

donde  $\mathcal{D} = (b_c \bar{\psi}(\delta) + b_c K)T(\delta)P^+(\delta)$ .

Dado que  $\bar{L}$  se elige de manera que  $(A_o - \bar{L}C_o)$  sea Hurwitz; el error  $e_w$  tiende a cero a medida que  $t$  tiende a infinito, lo que a su vez implica que  $\mathcal{D}e_w$  se desvanece.

Por otro lado, la matriz  $K$  se elige de manera que la matriz  $(A_c - b_c K)$  sea Hurwitz. Esto asegura que la dinámica del sistema en lazo cerrado, representada por la ecuación (18), también sea Hurwitz, es decir, estable.

## 6. EJEMPLO ILUSTRATIVO

Se incluyen dos ejemplos. En el ejemplo 1 ilustramos cómo obtener la transformación de coordenadas utilizando el Teorema 1 o, equivalente, el Lema 1. En el ejemplo 2 retomamos el sistema del ejemplo 1 y aplicamos el principio de separación. Esto implica la retroalimentación de estados estimados en la ley de control.

*Ejemplo 1.* Consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-h) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-2h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \end{aligned}$$

mediante el operador de retardo  $\delta$ , representamos el sistema como en (1) con las siguientes matrices

$$A(\delta) = \begin{bmatrix} -\delta & -1 & -\delta^2 \\ 0 & 1 & \delta^2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b(\delta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz de controlabilidad  $\mathcal{C}(\delta)$  es definida como

$\mathcal{C}(\delta) = [b(\delta), A(\delta)b(\delta), A^2(\delta)b(\delta)]$ , cuyos factores invariantes son  $\Lambda_{\mathcal{C}(\delta)} = \{1, 1, 1\}$ , por lo tanto, es unimodular y  $\mathcal{C}^{-1}(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \delta \\ -1 & 0 & 1 - \delta \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ .

Por definición,  $C_v(\delta) := [0 \ 0 \ -1]$ . La matriz  $T(\delta)$  construida acorde a (7) es

$$T(\delta) = \begin{bmatrix} C_v(\delta) \\ C_v(\delta)A(\delta) \\ C_v(\delta)A^2(\delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 + \delta & 1 & -1 - \delta^2 \end{bmatrix}.$$

El sistema en las nuevas coordenadas toma la forma de controlador (5), con

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\psi}(\delta) = [-\delta - 2\delta^2 - 1 + 2\delta + \delta^2 \quad 2 - \delta], \quad \bar{\gamma} = 1.$$

Realizamos dos simulaciones, una para la constante de retardo  $h = 0.37s$  y otra con  $h = 2s$ , ambas con condiciones iniciales  $x(s) = [3 \sin t \quad 5 \cos t \quad -t]$ ,  $s \in [-h, 0]$  y una matriz de retroalimentación  $K = [-1 \quad -2 \quad -2]$ . La ley de control  $u(t) = \frac{1}{\bar{\gamma}}(-\bar{\psi}(\delta) - K)T(\delta)x(t)$  toma la forma

$$u(t) = [5 - 3\delta + 2\delta^2 \quad -4 + \delta \quad 6 + 3\delta^2 - \delta^3]x(t).$$

En la Figura 1 observamos que el sistema sin ley de control ( $u(t) = 0$ ) diverge. En contraste, las Figuras 2 y 3 muestran que las trayectorias del sistema convergen al origen al aplicar la ley de control diseñada para los casos donde la constante de retardo toma los valores  $h = 0.37s$  y  $h = 2s$  respectivamente.

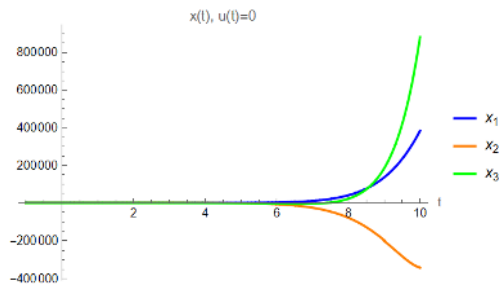


Fig. 1. Trayectorias del sistema sin control  $u(t) = 0$

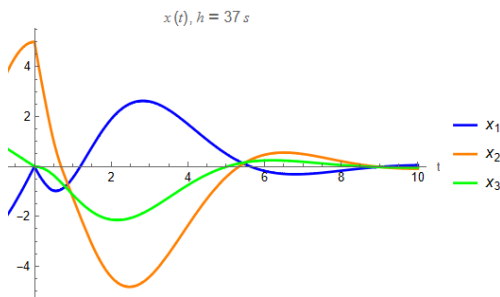


Fig. 2. Trayectorias del sistema con ley de control diseñado con  $h = 37s$

*Ejemplo 2.* Considere el sistema del Ejemplo 1 con

$$C(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \delta \end{bmatrix}.$$

Del Ejemplo 1 sabemos que el sistema es controlable. Ahora, la matriz de transformación  $P(\delta)$  que lleva el sistema (1) a la forma observable (11) es

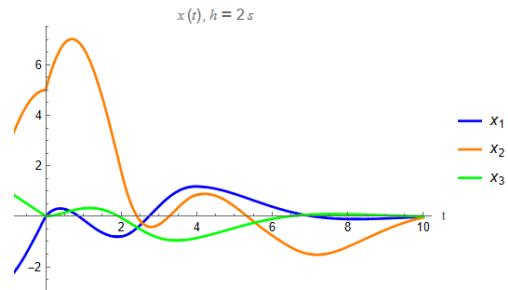


Fig. 3. Trayectorias del sistema con ley de control diseñado con  $h = 2s$

$$P(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \delta \\ 2 & -1 + \delta - \frac{7\delta^2}{4} + \frac{\delta^3}{2} - \frac{\delta^4}{4} & -2 - \frac{3\delta^2}{2} - \frac{3\delta^3}{4} - \frac{\delta^5}{4} \\ \delta & \frac{5\delta}{4} + \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^3}{4} + \frac{\delta^4}{4} & \frac{3\delta}{2} + \frac{\delta^2}{4} + \frac{\delta^3}{4} + \frac{\delta^4}{4} \\ -2 - 2\delta - \frac{3\delta^2}{2} - \frac{3\delta^3}{4} - \frac{\delta^5}{4} & -2 + 3\delta - 4\delta^2 + \frac{9\delta^3}{4} - \frac{\delta^4}{2} + \frac{\delta^5}{4} & -2\delta - 2\delta^2 - \frac{3\delta^3}{2} - \frac{3\delta^4}{4} - \frac{\delta^6}{4} \\ \frac{3\delta}{2} - \frac{5\delta^2}{4} + \frac{\delta^4}{4} + \frac{\delta^5}{4} & \frac{3\delta}{2} - \frac{7\delta^2}{4} + \frac{3\delta^3}{2} + \frac{\delta^4}{4} + \frac{\delta^5}{4} & \frac{3\delta^2}{2} - \frac{5\delta^3}{4} + \frac{\delta^5}{4} + \frac{\delta^6}{4} \end{bmatrix}$$

El sistema en las nuevas coordenadas toma la forma de observador (11), con

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{F}(\delta) = \begin{bmatrix} 2 - \delta + \frac{7\delta^2}{4} - \frac{\delta^3}{2} + \frac{\delta^4}{4} & 2 - \delta + \frac{7\delta^2}{4} - \frac{\delta^3}{2} + \frac{\delta^4}{4} \\ \frac{5\delta}{4} - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{4} - \frac{\delta^4}{4} & \frac{5\delta}{4} - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{4} - \frac{\delta^4}{4} \\ -1 - 2\delta + \frac{9\delta^2}{4} - \frac{7\delta^3}{4} + \frac{\delta^4}{4} - \frac{\delta^5}{4} & 6 - 3\delta + \frac{21\delta^2}{4} - \frac{3\delta^3}{2} + \frac{3\delta^4}{4} \\ \frac{3\delta}{4} - \frac{5\delta^2}{4} + \frac{5\delta^3}{4} - \frac{\delta^5}{4} & \frac{15\delta}{4} - \frac{3\delta^2}{2} + \frac{3\delta^3}{4} - \frac{3\delta^4}{4} \\ 5\delta - \frac{5\delta^2}{2} + 3\delta^3 - \frac{\delta^4}{2} + \frac{\delta^5}{2} & -12 - \delta - \frac{13\delta^2}{2} + \frac{21\delta^3}{4} + \frac{\delta^4}{2} - \frac{3\delta^5}{4} \\ 3\delta^2 - \frac{3\delta^3}{2} - \frac{\delta^5}{2} & \frac{15\delta}{2} - \frac{5\delta^2}{4} + \frac{\delta^3}{2} - \frac{\delta^4}{4} + \frac{3\delta^5}{4} \end{bmatrix}$$

$$b_o(\delta) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{\delta^4}{4} + \frac{\delta^3}{2} - \frac{7\delta^2}{4} + \delta - 1 \\ \frac{\delta^4}{\delta^4} - \frac{\delta^3}{\delta^3} + \frac{5\delta}{2} - \frac{\delta^4}{4} \\ \frac{\delta^5}{4} - \frac{\delta^4}{\delta^4} + \frac{9\delta^3}{4} - 4\delta^2 + 3\delta - 2 \\ -\frac{\delta^5}{4} + \frac{\delta^4}{4} - \frac{3\delta^3}{2} + \frac{7\delta^2}{4} - \frac{3\delta}{2} \end{bmatrix}.$$

Para fines de simulación, utilizamos las condiciones del Ejemplo 1 para la constante de retardo  $h = 37s$ . Con una matriz

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} 11.92 & 2.04 & 49.55 & 21.69 & 68.65 & 46.28 \\ -0.46 & 9.57 & 0.56 & 34.40 & 6.69 & 42.74 \end{bmatrix}$$

La ley de control es

$$u(t) = \frac{1}{\gamma} [-\bar{\psi}(\delta) - K] T(\delta) P^+(\delta) \hat{w}(t)$$

La Figura 4 muestra cómo las trayectorias del sistema, junto con las trayectorias estimadas, convergen al origen cuando aplicamos la ley de control diseñada anteriormente, la cual emplea la retroalimentación de los estados estimados basada en el principio de separación.

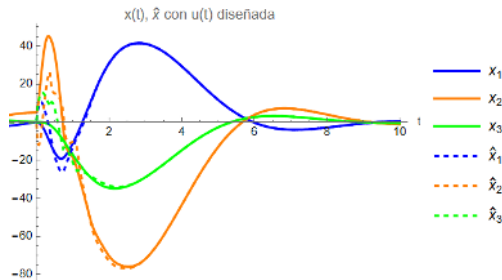


Fig. 4. Trayectorias del sistema y trayectorias estimadas

## 7. CONCLUSIONES

Hemos encontrado la condición necesaria y suficiente bajo la cual el sistema puede transformarse en una forma de controlador donde los retardos están en el mismo canal de entrada. Por lo tanto, los retardos pueden cancelarse mediante un control de realimentación de estado, lo que nos permite diseñar la ganancia para un sistema libre de retardos. La matriz de transformación es unimodular, lo que significa que las nuevas coordenadas tienen la misma dimensión que el sistema original; es decir, la transformación lineal es biyectiva. Hemos demostrado que la retroalimentación de los estados estimados no afecta la estabilidad del sistema.

Para futuras investigaciones, se sugiere expandir el estudio al caso de múltiples entradas y evaluar la robustez ante incertidumbres paramétricas.

## AGRADECIMIENTOS

Francisco Javier Bejarano agradece el apoyo del Proyecto SIP 20231425 y Proyecto SIP 20240939.

Juan Luis Guadarrama agradece el apoyo al Consejo Nacional de Humanidades Ciencias y Tecnologías (CONAH-CYT) bajo la beca CVU 1229308.

## REFERENCES

Anguelova, M. and Wennberga, B. (2008). State elimination and identifiability of the delay parameter for nonlinear time-delay systems. *Automatica*, 44(5), 1373–1378.

Antsaklis, P.J. and Michel, A.N. (1997). *Linear systems*, volume 8. Springer.

Bejarano, F.J. and Zheng, G. (2014). Observability of linear systems with commensurate delays and unknown inputs. *Automatica*, 50(8), 2077–2083.

Bejarano, F.J. (2021). Zero dynamics normal form and disturbance decoupling of commensurate and distributed time-delay systems. *Automatica*, 129.

Belhamel, L., Buscarino, A., Fortuna, L., and Xibilia, M.G. (2020). Delay independent stability control for commensurate multiple time-delay systems. *IEEE Control Systems Letters*, 5(4), 1249–1254.

Brown, W.C. (1993). *Matrices over commutative rings*. Marcel Dekker, Inc.

Estrada-Garcia, H., Moog, C., and Márquez-Martínez, L. (2007). Tracking problem for nonlinear time-delay multi-input multi-output systems. 1812 – 1816.

Fliess, M. and Mounier, H. (1998). Controllability and observability of linear delay systems: an algebraic approach. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 3, 301–314.

Fridman, E. (2014). *Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control*. Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser.

Gárate-García, A., Márquez-Martínez, L.A., and Moog, C.H. (2011). Equivalence of linear time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(3), 666–670. doi:10.1109/TAC.2010.2095550.

Hou, M., Zítek, P., and Patton, R.J. (2002). An observer design for linear time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47, 121–125.

Kailath, T. (1980). *Linear systems*, volume 156. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ.

Moog, C., Castro-Linares, R., Velasco-Villa, M., and Marque-Martínez, L.A. (2000). The disturbance decoupling problem for time-delay nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(2).

Morse, A.S. (1976). Ring models for delay-differential systems. *Automatica*, 12.

Mounier, H., Rouchon, P., and Joachim, R. (1997). Some examples of linear systems with delays. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 31(6), 911–925.

Mueller, M. (2009). Normal form for linear systems with respect to its vector relative degree. *Linear Algebra and its Applications*, 430, 1292–1312.

Richard, J.P. (2003). Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39(10), 1667–1694.

Zheng, G., Bejarano, F.J., Perruquetti, W., and Richard, J.P. (2015). Unknown input observer for linear time-delay systems. *Automatica*, 61, 35–43.

Zheng, G., Barbot, J.P., and Boutat, D. (2013). Identification of the delay parameter for nonlinear time-delay systems with unknown inputs. *Automatica*, 49(6), 1755–1760.

Zheng, G., Barbot, J.P., Boutat, D., Floquet, T., and Richard, J.P. (2011). On observation of time-delay systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(8), 1973–1978.