

# Application of the ADRC Tuned with the Attractive Ellipsoid Approach for Continuous Bioreactors

Víctor Reza \* Jorge Torres \* Jesús Guerrero \*\*

\* *Departamento de Control Automático, CINVESTAV-IPN. Ciudad de México, 07360, México. (email: {vreza, jtorres}@ctrl.cinvestav.mx)*

\*\* *Departamento de Mecatrónica, Tecnológico Nacional de México/ITS Abasolo, México (e-mail: jesus.gt@abasolo.tecnm.mx)*

---

**Abstract:** The control of continuous bioreactors is essential for many bioprocesses. However, it is challenging to design and analyze controllers in a closed loop with a bioreactor due to the presence of uncertainties, external disturbances, and highly nonlinear and complex unknown dynamics. In this work, an active disturbance rejection controller is designed and analyzed for continuous bioreactors. For this task, the attractive ellipsoid approach is applied to analyze and tune the proposed controller based on an observer in a closed loop with the bioreactor's nonlinear dynamic. Finally, the proposed algorithm is tested in a second-order continuous bioreactor simulation.

*Keywords:* Active disturbance rejection control, attractive ellipsoid method, continuous bioreactors, bioprocess control

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Actualmente, los bioprocesos presentan una gran diversidad de aplicaciones como la producción de biocombustibles y el tratamiento de aguas residuales. Una estrategia para mejorar el rendimiento de un bioproceso es controlar su biorreactor asociado. La ventaja de este método es que mejora la calidad de la biorreacción al garantizar cierta robustez ante perturbaciones e incertidumbres del sistema (Simutis and Lübbert (2015)). Cabe mencionar que los biorreactores pueden ser operados en forma continua para su fácil escalamiento, así como garantizar un desempeño económico y óptimo del reactor (Yang and Sha (2019)).

Se han analizado, diseñado e implementado diversas políticas de control para biorreactores continuos. Por un lado, es deseable el uso de **control óptimo** para que una función de costo, asociada al comportamiento del reactor, sea optimizada, como se describe en Harmand et al. (2019). Lamentablemente, este enfoque dista de ser útil porque requiere que el estado sea completamente medible, así como un conocimiento total del modelo del sistema sin incertidumbres ni perturbaciones externas (Poznyak et al. (2014)). Otro enfoque consiste en usar estrategias de **control lineal** como el PID en modelos linealizados (Hernjak and Doyle (2003)). Sin embargo, este enfoque garantiza resultados locales y no es robusto ante perturbaciones externas en la entrada (Hernjak and Doyle (2003)). A consecuencia de lo anterior, se puede

aplicar el **control linealizante** de forma exacta o por entrada/salida al sistema, como se describe en Bastin and Dochain (1990) y PRÖLL and Karim (1994). No obstante, el sistema en lazo cerrado es sumamente sensible a incertidumbres y perturbaciones, además es desafiante proponer una transformación para biorreactores con dinámicas complejas. Dadas las deficiencias previamente mencionadas, se pueden utilizar estrategias de **control adaptable** (Bastin and Dochain (1990)). Un enfoque que requiere poco conocimiento del modelo es **búsqueda del extremo**, un algoritmo de realimentación adaptable que minimiza una función de costo en tiempo real (Dochain et al. (2011)). Lamentablemente, su sintonización es desafiante y requiere que la función de costo sea medible (Dochain et al. (2011); Wang et al. (1999)).

En los últimos años, se ha incrementado el uso del **control por rechazo activo de perturbaciones** (ADRC) en biorreactores, como se describe en Carreño-Zagarra et al. (2019), Garzón-Castro et al. (2018) y Wei et al. (2020). La idea de este enfoque es garantizar el seguimiento robusto de una trayectoria deseada a partir de la estimación y rechazo de la incertidumbre total del sistema, es decir, la suma de todas las perturbaciones, dinámicas desconocidas e incertidumbres paramétricas del sistema (Guo and Zhao (2017)). Para estimar esta dinámica, es necesario usar un observador de estados. Por consecuencia, un problema a considerar en este algoritmo es el análisis del controlador-observador en lazo cerrado, así como sintonizar las ganancias del algoritmo (Guo and Zhao (2017)). El enfoque

de la elipsoide atractiva es una herramienta que puede usarse en este caso porque consiste en seleccionar adecuadamente los parámetros de un algoritmo de control para minimizar la elipsoide que contiene las trayectorias solución de un sistema dinámico en lazo cerrado sujeto a perturbaciones externas, dinámicas desconocidas e incertidumbres paramétricas (Poznyak et al. (2014)). Así, el objetivo de este trabajo es diseñar y analizar un controlador-observador usando el enfoque de la elipsoide atractiva para el rechazo activo de perturbaciones en un biorreactor continuo.

El resto del artículo está organizado de manera que la formulación del problema y el modelo del biorreactor son descritos en la Sección 2. La Sección 3 está dedicada al análisis y diseño del controlador-observador propuesto usando el enfoque de rechazo activo de perturbaciones y elipsoide atractiva. Los resultados de la simulación son presentados en la Sección 4, y para finalizar las conclusiones se describen en la Sección 5.

## 2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Sea el modelo general de biorreactores Bastin and Dochain (1990):

$$\dot{\xi}(t) = Y\varphi(\xi, t) + F_g(t) - Q(t) + u(t)(\xi^{in}(t) - \xi(t)) \quad (1)$$

donde<sup>1</sup>  $\xi \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$  es el estado conformado por las concentraciones bioquímicas del reactor,  $Y \in \mathbb{R}^{n \times m}$  es la matriz de coeficientes pseudo-estequiométricos,  $\varphi \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m$  es el vector de tasas de reacción,  $F_g, Q \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$  son las transferencias gas-líquido y líquido-gas, respectivamente,  $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  es la tasa de dilución, mientras que  $\xi^{in} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$  es la concentración de alimentación de  $\xi$ .

En general, basta manipular un solo elemento del estado  $\xi_i$  para que siga una referencia deseada  $\xi_r$  porque es suficiente para cumplir el objetivo de control del biorreactor, como maximizar la producción de biomasa o minimizar la concentración de un reactivo limitante en la biorreacción (Bastin and Dochain (1990); Wang et al. (1999)). Cabe mencionar que el controlador debe ser robusto ante las incertidumbres y perturbaciones externas del reactor, como es el desconocimiento de las tasas de reacción, perturbaciones aditivas en la tasa de dilución o incertidumbres paramétricas en la transferencia gas-líquido y viceversa (Bastin and Dochain (1990); Reza López et al. (2023)).

Así, considere la dinámica de un elemento de  $\xi$ :

$$\dot{\xi}_i = \phi_i + u(\xi_i^{in} - \xi_i) \quad (2a)$$

$$\phi_i = \sum_{j=1}^m Y_{ij}\varphi_j + F_{g_i} - Q_i + \delta(\xi_i^{in} - \xi_i) \quad (2b)$$

<sup>1</sup> Sin pérdida de generalidad, solo se adicionará las variables explícitas de cada función vectorial o escalar cuando sea necesario. También  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  y  $\mathbb{R}_{> 0}$  representan a los números reales positivos y estrictamente positivos, respectivamente.

donde  $\xi_i$  es medible,  $\phi_i$  es la incertidumbre total, mientras que  $\delta \in \mathbb{R}$  es la perturbación de  $u$ . El objetivo de control es garantizar que  $\xi_i$  siga robustamente la trayectoria constante  $\xi_{r_i}$  ante la incertidumbre  $\phi_i$ . Para esto, asumiremos que  $\phi_i$  satisface la siguiente hipótesis.

*Suposición 1.* La incertidumbre total  $\phi_i$  es continuamente diferenciable y acotada, es decir,  $\dot{\phi}_i = \sigma$  está bien definida y  $\exists \sigma_0 \in \mathbb{R}_{> 0}$  tal que  $|\sigma| \leq \sigma_0$ .

Cabe mencionar que esta hipótesis es realista dado que todos los elementos de  $\phi_i$  son continuamente diferenciables. En la siguiente sección, se describirá la estructura del controlador-observador propuesto para el seguimiento de la trayectoria deseada.

## 3. CONTROLADOR ADRC

Considere el siguiente controlador-observador:

$$\dot{\hat{\xi}}(t) = \hat{\phi}_i(t) + u(\xi_i^{in}(t) - \xi_i(t)) + L_1(\xi_i(t) - \hat{\xi}_i(t)) \quad (3a)$$

$$\dot{\hat{\phi}}_i(t) = L_2(\xi_i(t) - \hat{\xi}_i(t)) \quad (3b)$$

$$u(t) = \frac{1}{\xi_i^{in}(t) - \xi_i(t)} \left( K(\xi_{r_i} - \xi_i(t)) - \hat{\phi}_i(t) \right) \quad (3c)$$

donde  $\hat{\xi}_i, \hat{\phi}_i \in \mathbb{R}$  son los estimados de  $\xi_i$  y  $\phi_i$ , respectivamente,  $K \in \mathbb{R}$  es la ganancia del controlador, mientras que  $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$  son las ganancias del observador. El algoritmo consiste en una acción linealizante acoplado a una realimentación de estado para el seguimiento de  $\xi_{r_i}$  más el rechazo de  $\phi_i$  estimado con un observador de Luenberger. Así, note que el controlador-observador propuesto mantiene el enfoque del rechazo activo de perturbaciones.

Ahora, note que es necesario analizar el algoritmo propuesto en lazo cerrado con la dinámica del estado a manipular del reactor. Para ello, se usará el enfoque de la elipsoide atractiva, cuya definición se da a continuación (Poznyak et al. (2014)).

*Definición 2.* La elipsoide

$$\mathcal{E}_{\hat{x}}(P_a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - \hat{x})^T P_a (x - \hat{x}) \leq 1\}$$

con centro en  $\hat{x}$  y matriz elipsoidal  $P_a = P_a^T > 0$ , se dice que es atractiva para el sistema  $\dot{x} = f(x, t, u, \rho)$  con incertidumbres y/o perturbaciones  $\rho$  y acción de control  $u$  si las trayectorias del sistema satisfacen lo siguiente:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} (x - \hat{x})^T P_a (x - \hat{x}) \leq 1$$

Por lo tanto, el siguiente resultado describe que las trayectorias solución del biorreactor en lazo cerrado con el algoritmo propuesto convergen a una elipsoide atractiva cuyo centro es el origen.

*Teorema 3.* Suponga que el sistema (2) satisface la Suposición 1. Si existen escalares  $X_1 \in \mathbb{R}_{> 0}$  y  $Y_1 \in \mathbb{R}$ , una matriz simétrica positiva definida  $X_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , una matriz  $Y_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ , más constantes  $\alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}_{> 0}$ , tales que satisfacen la siguiente desigualdad matricial lineal (LMI):

$$Q_\zeta = \begin{bmatrix} -2Y_1 + \alpha X_1 & -D^T & 0 \\ -D & \bar{Q}_x & X_2 D \\ 0 & D^T X_2 & -\varepsilon \end{bmatrix} < 0 \quad (4a)$$

$$\bar{Q}_x = X_2 A - Y_2 C + A^T X_2 - C^T Y_2 + \alpha X_2 \quad (4b)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0], \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces el siguiente conjunto:

$$\mathcal{E}_0(P_a) = \{\zeta \in \mathbb{R}^3 \mid \zeta(t)^T P_a \zeta(t) \leq 1\}$$

$$\zeta = \begin{bmatrix} \xi_{r_i} - \xi_i \\ \xi_i - \hat{\xi}_i \\ \phi_i - \hat{\phi}_i \end{bmatrix}, \quad P_a = \frac{\alpha}{\varepsilon \sigma_0^2} \text{diag}(X_1^{-1}, X_2)$$

Es una elipsoide atractiva del sistema (2) en lazo cerrado con el controlador-observador (3) con las ganancias  $K = Y_1 X_1^{-1}$  y  $L = X_2^{-1} Y_2$  con  $L = [L_1 \ L_2]^T$ .  $\square$

**Demostración.** Definiendo los errores  $x = \xi_{r_i} - \xi_i$ ,  $\tilde{\xi} = \xi_i - \hat{\xi}_i$ ,  $\tilde{\phi} = \phi_i - \hat{\phi}_i$  y  $z = [\tilde{\xi} \ \tilde{\phi}]^T$ , se tiene el sistema (2) en lazo cerrado con (3):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -Kx - D^T z \\ \dot{z} &= (A - LC)z + D\sigma \end{aligned}$$

Luego, considérese la función de almacenamiento  $V(\zeta) = P_1 x^2 + z^T P_2 z$ , donde  $P_1 \in \mathbb{R}_{>0}$  y  $P_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es simétrica positiva definida. Por la desigualdad de Rayleigh-Ritz, se puede concluir que  $V$  es definida positiva. Luego, derivando  $V$  con respecto a  $t$ :

$$\dot{V} = 2P_1 x \dot{x} + 2z^T P_2 \dot{z} \pm \alpha V \pm \varepsilon \sigma^2$$

Por lo tanto:

$$\dot{V} = -\alpha V + \varepsilon \sigma^2 + \zeta_\sigma^T \bar{Q} \zeta_\sigma$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= \begin{bmatrix} -2P_1 K + \alpha P_1 & -P_1 D^T & 0 \\ -P_1 D & \bar{Q}_x & P_2 D \\ 0 & D^T P_2 & -\varepsilon \end{bmatrix} \\ \bar{Q}_x &= P_2(A - LC) + (A - LC)^T P_2 + \alpha P_2 \\ \zeta_\sigma &= [x \ \zeta^T \ \sigma]^T \end{aligned}$$

Note que  $\bar{Q} < 0$  si y solo si  $\exists T \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  simétrica positiva definida tal que  $T \bar{Q} T^T < 0$ . Definiendo  $X_1 = P_1^{-1}$ ,  $Y_1 = K X_1^{-1}$ ,  $X_2 = P_2$ ,  $Y_2 = X_2 L$  y  $T = \text{diag}(X_1, I_2, 1)$  con  $I_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  como la matriz identidad, entonces  $T \bar{Q} T^T = Q_\zeta < 0$ . Por consecuencia:

$$\dot{V} \leq -\alpha V + \varepsilon \sigma_0^2$$

Usando el criterio de comparación:

$$V(\zeta(t)) \leq V(\zeta(t_0)) e^{-\alpha(t-t_0)} + \frac{\varepsilon \sigma_0^2}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(t-t_0)})$$

Por último, evaluando para  $t \rightarrow \infty$ :

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \zeta^T(t) P \zeta(t) \leq \frac{\varepsilon \sigma_0^2}{\alpha}$$

Por lo que se concluye el resultado.  $\blacksquare$

Cabe mencionar que el resultado obtenido se puede mejorar. Por un lado, es deseable acotar la acción de control. Aunque no es trivial acotar el controlador por la acción linealizante, se puede acotar la realimentación de estado y el rechazo de la perturbación, es decir,  $\exists u_0 \in \mathbb{R}_{>0}$  tal que  $|Kx - \hat{\phi}|^2 \leq u_0$ . Así, de esta expresión:

$$\chi^T \begin{bmatrix} K^2 & K & -K \\ K & 1 & -1 \\ -K & -1 & 1 \end{bmatrix} \chi < u_0, \quad \chi = \begin{bmatrix} x \\ \tilde{\phi}_i \\ \phi_i \end{bmatrix}$$

Lo anterior es equivalente a  $\chi^T \bar{Q}_u \chi > 0$ , donde:

$$\bar{Q}_u = \begin{bmatrix} u_0 - Y_1 X_1^{-1} X_1^{-1} Y_1 & -Y_1 X_1^{-1} & Y_1 X_1^{-1} \\ -Y_1 X_1^{-1} & u_0 - 1 & 1 \\ Y_1 X_1^{-1} & 1 & u_0 - 1 \end{bmatrix} > 0$$

Note que  $\bar{Q}_u > 0$  si y solo si  $\exists T_u \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  simétrica positiva definida tal que  $T_u \bar{Q}_u T_u^T > 0$ . Más aún, note que las siguientes desigualdades son válidas

$$2x Y_1 \phi_i \leq x Y_1 Y_1 x + \phi_i^2, \quad 2\tilde{\phi} \phi_i \leq \tilde{\phi}^2 + \phi_i^2$$

Así, para  $T_u = \text{diag}(X_1, I_2)$  y para una constante  $q_u \in \mathbb{R}_{>0}$  tal que  $X_1 > \sqrt{q_u}$ , se tiene las siguientes condiciones para satisfacer la saturación parcial del controlador:

$$Q_u = \begin{bmatrix} u_0 q_u & -Y_1 & 0 \\ -Y_1 & u_0 & 0 \\ 0 & 0 & u_0 + 1 \end{bmatrix} > 0, \quad X_1 > \sqrt{q_u} \quad (5)$$

Por otro lado, como se menciona en Poznyak et al. (2014), para reducir la dimensión de  $\mathcal{E}_0(P_a)$ , es necesario minimizar la traza de  $P_a^{-1}$  en lugar de su determinante para evitar no linealidades y garantizar la minimización del eigenvalor más grande de  $P_a$ . Por ende:

$$\text{tr}(P_a^{-1}) = \frac{\varepsilon \sigma_0^2}{\alpha} \text{tr}(\text{diag}(X_1, X_2^{-1}))$$

Es fácil ver que esta expresión es no lineal por  $X_2^{-1}$ . Luego, suponga que existe una matriz simétrica positiva definida  $H_x \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  tal que  $H_x > X_2^{-1}$ . Por el complemento de Schur, se tiene:

$$\begin{bmatrix} H_x & I_2 \\ I_2 & X_2 \end{bmatrix} > 0 \quad (6)$$

A partir de lo anterior, el siguiente corolario describe como minimizar la dimensión de la elipsoide atractiva.

**Corolario 4.** Las ganancias óptimas  $K^* = Y_1^* X_1^{*-1}$  y  $L^* = X_2^{*-1} Y_2^*$  que minimizan la dimensión de  $\mathcal{E}_0(P_a)$  bajo la condición  $|Kx - \hat{\phi}|^2 < u_0$ , corresponden al siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{tr}(P_a^{-1}) \longrightarrow & \inf_{X_1 > 0, X_2 > 0, Y_1, Y_2, \alpha > 0, \varepsilon > 0, q_u > 0} \\ & \text{Sujeto a las restricciones (4)-(6)} \end{aligned}$$

$\square$

*Nota 5.* Es necesario que la tasa de dilución  $u$  sea positiva. Aunque se puede saturar la política de control, una condición para garantizar que esta entrada sea positiva es que  $\phi_i < 0$  y  $\xi_i^{in} > \xi_{r_i} > \xi_i(t_0) > 0$ .  $\square$

*Nota 6.* Como se describe en Poznyak et al. (2014), el método para resolver el problema de optimización descrito es el siguiente. Para cada iteración  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , se asigna un valor fijo de  $\alpha_k > 0$  y  $\varepsilon_k > 0$ . Así, se resuelven las LMI's (4)-(6) con un algoritmo de programación semidefinido y se calcula la traza de  $P_a^{-1}$ . Además, se utiliza algún criterio para modificar los valores de  $\alpha_k$  y  $\varepsilon_k$ , como por ejemplo:

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k + \Delta\alpha_k, \Delta\alpha_k \geq 0 \quad (7a)$$

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k - \Delta\varepsilon_k, \Delta\varepsilon_k > 0 \quad (7b)$$

Si  $\varepsilon_{k+q}$  se vuelve negativo, se retoma el valor anterior. Por último, se hacen múltiples iteraciones hasta que no exista una solución admisible para las LMI's o se minimice localmente la traza de  $P_a^{-1}$ . Cabe mencionar que la existencia de una solución admisible para las LMI's dependen de asignar valores adecuados para  $\alpha$ ,  $\varepsilon$  y  $K$ , así como una ganancia adecuada para  $L$  tal que  $A - LC$  sea Hurwitz estable.  $\square$

Previo a concluir esta sección, parece razonable asumir otras condiciones sobre  $\phi_i$  o proponer otros observadores para mejorar el desempeño del controlador en lazo cerrado. Por un lado, se puede asumir que  $\phi_i$  es  $p$ -veces continuamente diferenciable tal que su  $p$ -ésima derivada sea aproximadamente nula. Esta hipótesis es comúnmente asumida en el ADRC (Garzón-Castro et al. (2018); Guo and Zhao (2017)). No obstante, esta suposición es bastante fuerte en bioprocesos, dado que no es factible justificar que algunos de los elementos de  $\phi_i$  sean continuamente diferenciables más de una vez, como es el caso de las tasas de reacción. Por otro lado, se puede sustituir el observador de Luenberger por un observador de alta ganancia o modos deslizantes. Aunque ambos algoritmos mejoran la convergencia del estimado, puede presentar diversos problemas como el fenómeno de sobrepico o castaño en observadores de alta ganancia y modos deslizantes, respectivamente (Reza López et al. (2023)).

#### 4. SIMULACIÓN NUMÉRICA

Considere el siguiente biorreactor de segundo orden:

$$\dot{X}(t) = \mu(X, S)X(t) - (u(t) + \delta(t) + \beta)X(t) \quad (8a)$$

$$\dot{S}(t) = -Y\mu(X, S)X(t) + (u(t) + \delta(t))(S^{in} - S(t)) \quad (8b)$$

donde  $X, S \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  son la concentración de biomasa y sustrato, respectivamente,  $\beta \in \mathbb{R}_{> 0}$  es la tasa de mortalidad,  $\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  es la tasa de crecimiento específica, mientras que  $S^{in} \in \mathbb{R}_{> 0}$  es la concentración constante de alimentación. Este proceso puede representar biorreactores donde la concentración de sustrato deba ser relativamente baja, como en el tratamiento de desechos agroindustriales (Domínguez-Bocanegra et al. (2015)). Por ende, el objetivo de control es garantizar que  $\xi_i = S$  siga una

referencia deseada  $\xi_{r_i} = S_r$ , robusto a la incertidumbre total  $\phi_i = -Y\mu X + \delta(S^{in} - S)$ .

Para comparar el comportamiento del algoritmo propuesto en (3), se usará la siguiente política de control<sup>2</sup>:

$$u(t) = Y\mu(X, S)X(t) \frac{2S_r - S(t)}{S_r(S^{in} - S(t))} \quad (9)$$

El algoritmo propuesto se diseñó a partir del enfoque de conjuntos invariantes desarrollado en De Battista et al. (2018), es decir, la política de control (9) es evaluada con las siguientes condiciones:

$$\text{WAC: } \lim_{X \rightarrow 0} \mu(X, S) - u(X, S) - \delta(t) > 0$$

$$\text{sBAC: } \lim_{S \rightarrow 0} u(X, S) > 0$$

$$\text{wBAC: } \lim_{S \rightarrow 0} \frac{u(X, S) - \delta(t)}{\mu(X, S)} - X(t) > 0$$

donde WAC es la condición para evitar la remoción del microorganismo, mientras que sBAC y wBAC es la condición fuerte y débil para evitar que el reactor opere por lotes, respectivamente. Para que el reactor en lazo cerrado con la tasa de dilución tenga un buen desempeño, se deben satisfacer WAC y la condición sBAC o wBAC. Así, la ley de control (9) garantiza WAC y wBAC, siempre que  $\beta = \delta = 0$ .

*Nota 7.* El controlador-observador propuesto (3) satisface las condiciones WAC y sBAC para valores despreciables de  $\beta$ . Asumiendo que  $\hat{\phi}_i \approx \phi_i$ , entonces las condiciones mencionadas se satisfacen siempre que:

$$\text{WAC: } K(S_r - S) + \mu(0, S)(S^{in} - S) > 0$$

$$\text{sBAC: } K \frac{S_r}{S^{in}} - \delta > 0$$

$\square$

Para la simulación numérica<sup>3</sup> se consideraron las siguientes estructuras para  $\mu$  y  $\delta$ :

$$\mu(X, S) = \begin{cases} \bar{\mu}(X, S) & 60 > t \geq 0 \\ \frac{\bar{\mu}(X, S)}{4}(5 - 4e^{-0.1(t-60)}) & t \geq 60 \end{cases}$$

$$\bar{\mu}(X, S) = \frac{\mu_m S(t)}{K_s + S(t) + (S(t)^2/K_i)}$$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & 120 > t \geq 0 \\ 0.02(1 - e^{-0.1(t-120)}) & t \geq 120 \end{cases}$$

donde  $\mu_m, K_s, K_i \in \mathbb{R}_{> 0}$  son parámetros cinéticos. Luego, se solucionó el problema de optimización descrito en el Corolario 4 usando el método descrito en la Nota 6 más YALMIP (Lofberg (2004)) con SEDUMI (Sturm (1999)). Así, para  $u_0 = 1$ ,  $\sigma_0 = 0.3$  y  $q_s = 10$ , los resultados de la optimización se muestran a continuación:

<sup>2</sup> En las simulaciones, el algoritmo (9) sera denotado como **Reacción**. Cabe destacar que la tasa de crecimiento específica del controlador (9) es equivalente a  $\bar{\mu}(X, S)$ .

<sup>3</sup> La simulación fue ejecutada en MATLAB/Simulink (Versión 2023b) con método de integración Euler a un paso de 1 msec.

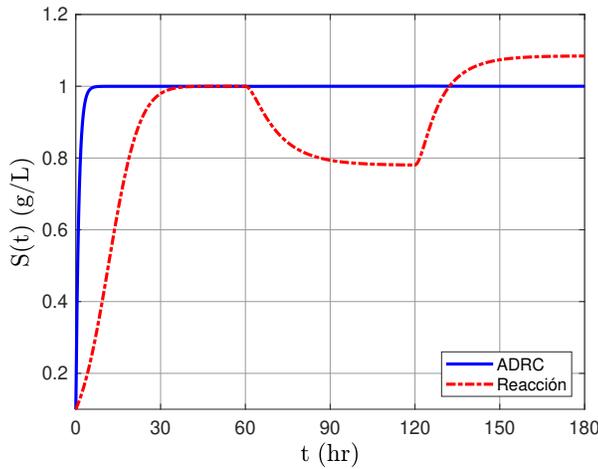


Fig. 1. Seguimiento del sustrato  $S(t)$  de la referencia deseada  $S_r = 1$  g/L con los controladores ADRC (3) y reacción proporcional (9).

$$\begin{aligned} \alpha^* &= 1.5, & \varepsilon^* &= 0.01 \\ X_1^* &= 3.2946, & Y_1^* &= 3.0801 \\ X_2^* &= \begin{bmatrix} 27.5564 & -0.7079 \\ -0.7079 & 0.0609 \end{bmatrix}, & Y_2^* &= \begin{bmatrix} 50.6044 \\ 22.5789 \end{bmatrix} \\ K^* &= 0.9349, & L^* &= \begin{bmatrix} 16.2055 \\ 559.3731 \end{bmatrix} \\ H_x^* &= \begin{bmatrix} 13.7692 & 0.7684 \\ 0.7684 & 31.6208 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Así, para  $\mu_m = 0.8 \text{ hr}^{-1}$ ,  $K_s = 2 \text{ g/L}$ ,  $K_i = 10 \text{ g/L}$ ,  $\beta = 0.01 \text{ hr}^{-1}$ ,  $Y = 0.5$ ,  $S^{in} = 10 \text{ g/L}$ ,  $X(0) = 5 \text{ g/L}$ ,  $S(0) = 0.1 \text{ g/L}$ ,  $\hat{\xi}_i(0) = 0.08 \text{ (g/L)}$ ,  $\hat{\phi}_i(0) = 0 \text{ g/(L} \cdot \text{hr)}$  y  $\xi_{r_i} = 1 \text{ g/L}$ , los resultados de la simulación del sistema (8) en lazo cerrado con los controladores (3) y (9) se muestran en las Figuras 1-4. Para iniciar, los dos controladores evitan que el biorreactor opere por lotes, se remuevan los microorganismos y que la tasa de dilución sea estrictamente positiva, como se esperaba. Sin embargo, observe que el sistema en lazo cerrado con el ADRC (3) garantiza un menor tiempo de asentamiento a la referencia deseada y es robusto al desconocimiento de la tasa de reacción y la perturbación externa en la tasa de dilución. Lo anterior se debe a que el observador de la incertidumbre total tienen un buen desempeño. Más aún, note que esta variable siempre es negativa y por tanto, se satisfacen las condiciones descritas en la Nota 5. Por el contrario, note que el controlador con reacción proporcional (9) tiene un mayor tiempo de asentamiento a la referencia deseada y no es robusto a las incertidumbres y perturbaciones del modelo. Por último, observe que las trayectorias de los errores de seguimiento y estimación descritos en  $\zeta(t)$  convergen a la elipsoide atractiva calculada a partir de la optimización descrita en el Corolario 4, como se muestra en la Figura 5.

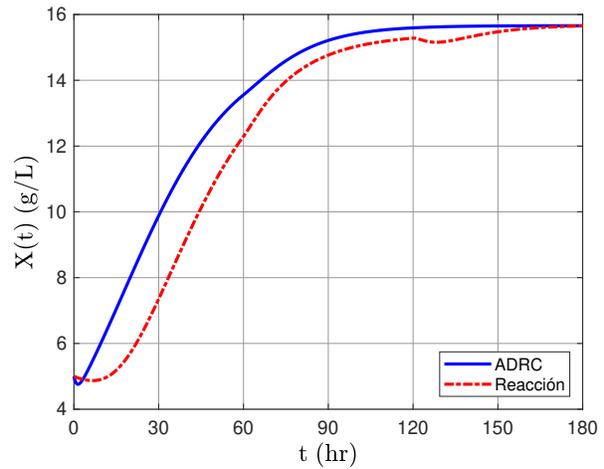


Fig. 2. Dinámica de la biomasa  $X(t)$  con los controladores ADRC (3) y reacción proporcional (9).

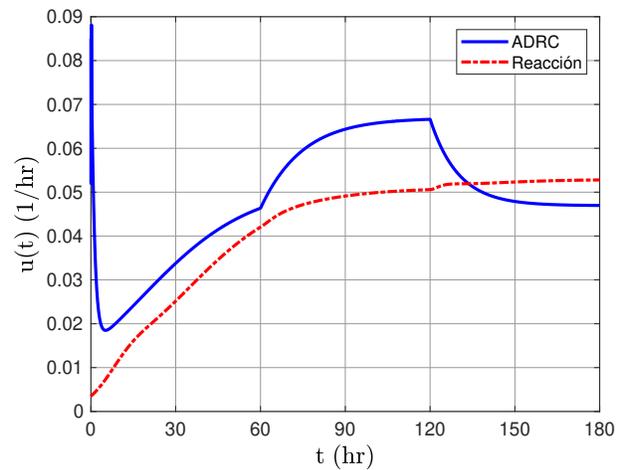


Fig. 3. Dinámica de la tasa de dilución  $u(t)$  con los controladores ADRC (3) y reacción proporcional (9).

## 5. CONCLUSIONES

Se diseñó un controlador por rechazo activo de perturbaciones para el seguimiento robusto de una referencia deseada de una concentración bioquímica clave para biorreactores continuos. El análisis y sintonización del controlador-observador propuesto esta basado en el enfoque de la elipsoide atractiva, tal que la optimización de las ganancias del algoritmo son consecuencia de la solución de diversas desigualdades matriciales lineales. Los experimentos numéricos muestran que el algoritmo propuesto es robusto ante las incertidumbres, dinámicas no modeladas y perturbaciones del sistema, además de que evita condiciones de remoción de microorganismo y operación del reactor por lotes.

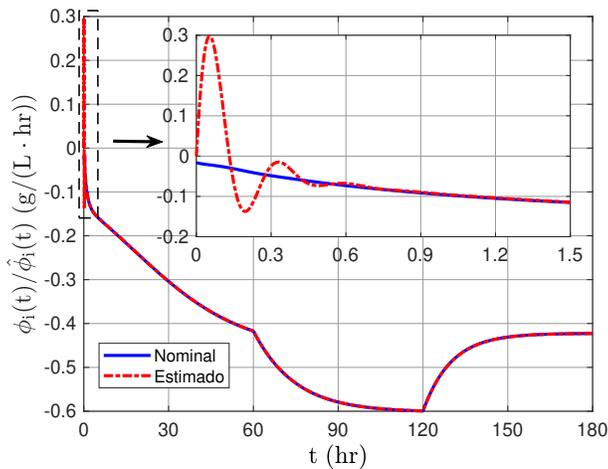


Fig. 4. Estimación de la incertidumbre total  $\phi_i(t)$  con el ADRC.

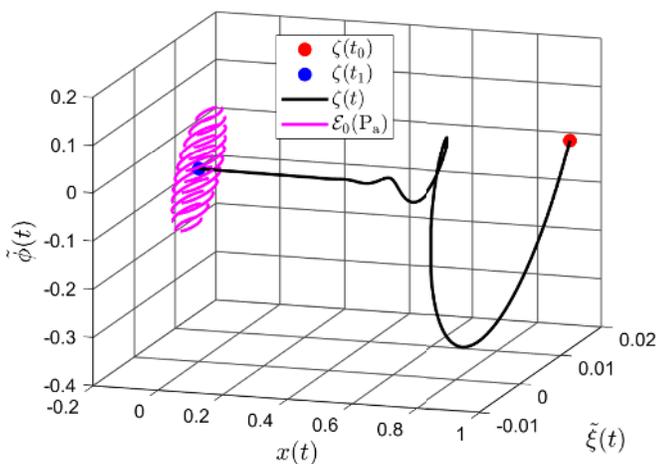


Fig. 5. Gráfica de la elipsoide atractiva  $\mathcal{E}_0(P_a)$  y la trayectoria  $\zeta = [x \ \xi \ \tilde{\phi}]^T$  con  $t_0 = 0$  hr y  $t_1 = 180$  hr.

#### AGRADECIMIENTOS

El primer autor expresa su gratitud al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) México, por proporcionarle una beca para sus estudios de doctorado.

#### REFERENCIAS

Bastin, G. and Dochain, D. (1990). *On-line estimation and adaptive control of bioreactors*. Elsevier New York, Amsterdam.

Carreño-Zagarra, J., Guzmán, J., Moreno, J., and Villamizar, R. (2019). Linear active disturbance rejection control for a raceway photobioreactor. *Control Engineering Practice*, 85, 271–279.

De Battista, H., Jamilis, M., Garelli, F., and Picó, J. (2018). Global stabilisation of continuous bioreactors:

Tools for analysis and design of feeding laws. *Automatica*, 89, 340–348.

Dochain, D., Perrier, M., and Guay, M. (2011). Extremum seeking control and its application to process and reaction systems: A survey. *Mathematics and Computers in Simulation*, 82(3), 369–380.

Domínguez-Bocanegra, A.R., Torres-Muñoz, J.A., and López, R.A. (2015). Production of bioethanol from agro-industrial wastes. *Fuel*, 149, 85–89.

Garzón-Castro, C.L., Delgado-Aguilera, E., Cortés-Romero, J.A., Tello, E., and Mazzanti, G. (2018). Performance of an active disturbance rejection control on a simulated continuous microalgae photobioreactor. *Computers & Chemical Engineering*, 117, 129–144.

Guo, B.Z. and Zhao, Z.L. (2017). *Active disturbance rejection control for nonlinear systems: An introduction*. John Wiley & Sons.

Harmand, J., Lobry, C., Rapaport, A., and Sari, T. (2019). *Optimal Control in Bioprocesses: Pontryagin's Maximum Principle in Practice*. John Wiley & Sons.

Hernjak, N. and Doyle, F.J. (2003). Correlation of process nonlinearity with closed-loop disturbance rejection. *Industrial & engineering chemistry research*, 42(20), 4611–4619.

Lofberg, J. (2004). Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in matlab. In *2004 IEEE international conference on robotics and automation (IEEE Cat. No. 04CH37508)*, 284–289. IEEE.

Poznyak, A., Polyakov, A., and Azhmyakov, V. (2014). *Attractive ellipsoids in robust control*. Springer.

PRÖLL, T. and Karim, N.M. (1994). Nonlinear control of a bioreactor model using exact and i/o linearization. *International Journal of Control*, 60(4), 499–519.

Reza López, V., Guerrero Tavares, J., and Torres Muñoz, J. (2023). An extended super-twisting algorithm for simultaneous estimation of reaction rates and input disturbance in bioprocess. *Journal of Process Control*, 123, 131–140.

Simutis, R. and Lübbert, A. (2015). Bioreactor control improves bioprocess performance. *Biotechnology journal*, 10(8), 1115–1130.

Sturm, J.F. (1999). Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization methods and software*, 11(1-4), 625–653.

Wang, H.H., Krstić, M., and Bastin, G. (1999). Optimizing bioreactors by extremum seeking. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 13(8), 651–669.

Wei, W., Xia, P., Liu, Z., and Zuo, M. (2020). A modified active disturbance rejection control for a wastewater treatment process. *Chinese Journal of Chemical Engineering*, 28(10), 2607–2619.

Yang, Y. and Sha, M. (2019). A beginner's guide to bioprocess modes—batch, fed-batch, and continuous fermentation. *Enfield, CT: Eppendorf Inc*, 408, 1–16.