

# First order SMC in the presence of uncertain control coefficient for a class of LTI systems <sup>\*</sup>

Areli Resendiz <sup>\*</sup> Manuel A. Estrada <sup>\*</sup> Leonid Fridman <sup>\*</sup>

<sup>\*</sup> Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), 04510, Ciudad de México, México [rqa1926@gmail.com](mailto:rqa1926@gmail.com), [manny.estrada.94@gmail.com](mailto:manny.estrada.94@gmail.com), [lfridman@unam.mx](mailto:lfridman@unam.mx)

## Resumen

This paper analyzes the problem of the “unmatched” uncertain control coefficient in a class of linear systems. Sufficient conditions are determined to ensure the stability of the dynamics during the sliding mode. This communication states that it is possible to design first-order SMC when the direction in the control vector is unknown. Finally, the feasibility of the results is shown through simulations in a fin-controlled rocket model.

*Keywords:* sliding mode control, robust control, linear systems.

## 1. INTRODUCCIÓN

El control por modos deslizantes ha demostrado ser una de las mejores opciones ante la presencia de perturbaciones externas e incertidumbres acopladas. El diseño convencional de modos deslizantes de primer orden (FOSM, por sus siglas en inglés) consiste en dos pasos (Utkin, 1992):

1. La selección de una superficie de deslizamiento cuyas trayectorias restringidas a ella produzcan una dinámica deseada;
2. El diseño de un control discontinuo que lleve las trayectorias del lazo cerrado a dicha superficie y las mantenga ahí para todo tiempo futuro a pesar de perturbaciones acopladas.

Acorde al primer paso, una superficie deslizamiento adecuada puede obtenerse al asignar a la dinámica de deslizamiento un comportamiento deseado (Edwards and Spurgeon, 1998; Utkin, 1992). Para ello, existen distintas técnicas para asignar la dinámica durante el modo deslizante en sistemas lineales, como por ejemplo: una asignación de polos (Ackermann and Utkin, 1998), un comportamiento LQ-singular (Castillo and Fridman, 2013; Edwards and Spurgeon, 1998), o basándose en una dinámica nominal (Estrada et al., 2024). No obstante, en la mayoría de las ocasiones, el coeficiente de control, es decir, la dirección en la que el control actúa se asume conocida. Es por ello que es necesario estudiar los casos en los cuales la dirección del control es incierta.

En Yasuda and Nakatsuji (1996) estudian una clase de sistemas lineales inciertos considerando que las incertidumbres son no acopladas tanto en la matriz de entrada como en la matriz de estado. Caracterizan el diseño de superficies de deslizamiento por medio de las soluciones de una ecuación algebraica de Riccati (ARE, por sus siglas en inglés). Presentan condiciones suficientes que garantizan la estabilidad cuadrática durante el modo deslizante para incertidumbres suficientemente pequeñas de tal manera que exista dicha solución de la ARE. En dicho artículo se presentan condiciones suficientes, sin embargo las condición de existencia de dicha ecuación nunca se prueba. Más aún, no se tiene un entendimiento claro de las condiciones que se imponen sobre la incertidumbre en la matriz de control.

En Choi (1998, 1999), se propone un diseño de superficies utilizando desigualdades matriciales lineales (LMI, por sus siglas en inglés) en presencia de coeficiente incierto de control. Dicho diseño caracteriza las superficies lineales para dicha clase de sistemas a través de todas las soluciones de la LMI. A pesar de ello, su metodología no permite analizar el caso donde la dirección de la matriz de control es desconocida. Por otro lado, en Choi (2003) exponen que los métodos desarrollados para el diseño de superficies como en Choi (1999, 2001) no garantizan que la dinámica durante el modo deslizante sea completamente invariante frente a incertidumbres acopladas y no acopladas (Choi, 2003). En dicho trabajo, se parametrizan las superficies por medio de soluciones de LMIs. Así, a través de dicha condición la dinámica de deslizamiento restringida a la superficie será invariante frente a incertidumbres no acopladas Choi (2003).

<sup>\*</sup> Los autores agradecen el apoyo por parte de CONAHCyT (Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías) CVU 1239229, CVU 833748.

A pesar de todos estos esfuerzos por caracterizar las incertidumbres admisibles para el control por modos deslizantes, el problema de la incertidumbre en el coeficiente de control permanece abierto. En el presente trabajo: *se estudia el problema del coeficiente incierto de control para una clase de sistemas lineales, con lo que se permite,*

- obtener condiciones suficientes para la estabilidad del lazo cerrado;
- discutir sobre el concepto de acoplamiento, en el caso de incertidumbres en el modelo;
- cambiar el paradigma de diseño del control por modos deslizantes, demostrando qué, aunque se asuma la dirección del control conocida (el espacio rango de la matriz de control), es posible implementar FOSM si la incertidumbre es suficientemente pequeña.

El artículo está organizado de la siguiente forma: en la Sección 2 se presenta un ejemplo motivacional; en la Sección 3 se plantea el problema de estudio; la Sección 4 presenta el diseño del control discontinuo y el análisis de la dinámica de deslizamiento; en la Sección 5 se retoma el ejemplo motivacional para verificar los resultados. Las demostraciones de los resultados presentados en este trabajo se presentan en la sección de apéndices.

**Notación.**  $\mathbb{R}$  es el conjunto de todos los número reales.  $\|\cdot\|$  denota la norma euclídea. Sea  $\mathbb{I}$  a matriz identidad, y  $\lambda_{\max}(M)$  ( $\lambda_{\min}(M)$ ) el valor propio más grande (respectivamente, el más pequeño) de una matriz simétrica real  $M$ . Para una matriz  $M$  cualquiera,  $\text{sym}\{M\} = \frac{1}{2}(M + M^T)$  denota su parte simétrica. Para  $\sigma \in \mathbb{R}$ , la función  $\text{sign}(\sigma) = \sigma/|\sigma|$  para toda  $\sigma \neq 0$ , y se define  $\text{sign}(0) = [-1, 1]$ . A lo largo del artículo, las soluciones de las ecuaciones diferenciales se definen en el sentido de Filippov (Filippov, 2013).

## 2. EJEMPLO MOTIVACIONAL

Considere el modelo de un cohete controlado por aleta en el plano de lanzamiento con un diseño de ángulo de ataque auto pilotado, (Etkin, 1972; Jesionowski et al., 2023).

Este ejemplo pretende mostrar qué es una incertidumbre no acoplada y su efecto sobre la estabilidad del sistema.

La dinámica rotacional linealizada del cohete en el plano de lanzamiento corresponde a:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\frac{\bar{q}S_{ref}}{m\eta}C_{N\alpha}\alpha + q - \frac{\bar{q}S_{ref}}{m\eta}C_{N\delta}\delta + \varphi_1(t), \\ \dot{q} &= \frac{\bar{q}S_{ref}L_{ref}}{2I_{zz}}C_{m\alpha}\alpha + \frac{\bar{q}S_{ref}L_{ref}}{2I_{zz}}C_{m\delta}\delta + \varphi_2(t), \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $\alpha$  representa el ángulo de ataque,  $\delta$  el ángulo de desviación de la aleta con respecto al eje longitudinal del cuerpo, el estado  $q$  es la razón de inclinación,  $\bar{q} = \frac{1}{2}\rho v^2$  la presión aerodinámica,  $v > 0$  la densidad atmosférica,  $\eta$  la velocidad del cohete,  $C_{N\alpha}$ ,  $C_{m\alpha}$  son derivadas de los coeficientes de la fuerza normal e inclinación con respecto a  $\alpha$ ,  $C_{N\delta}$ ,  $C_{m\delta}$  son derivadas similares con respecto a  $\delta$ ,  $S_{ref}$  es el área de referencia,  $I_{zz}$  el momento de inercia

sobre el eje  $z_b$ ,  $m$  la masa del cohete, y  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$  son perturbaciones exógenas.

El objetivo para este sistema es controlar el ángulo de ataque  $\alpha$ . Dado que el término de entrada en el primer canal, dígame  $g_1 = \frac{\bar{q}S_{ref}}{m\eta}C_{N\delta}$ , es muy pequeño, la complicación surge con la existencia de un máximo en la señal de control ( $u_{\max}$ ), con lo cual  $g_1 u_{\max} \ll L$ , siendo  $|\varphi(t)| \leq L$ . Por ello, dado que el coeficiente en el segundo canal es mucho más grande, suelen considerar la salida  $\alpha$  de grado relativo dos, desestimando la existencia  $g_1$  (vea Jesionowski et al. (2023)). Sin embargo, esto afecta el rendimiento del controlador en lazo cerrado. Más aún, en presencia de incertidumbre paramétrica, no es posible transformar el sistema para llevarlo a una forma conveniente para diseño.

En Jesionowski et al. (2023), se da solución al problema de control utilizando modos deslizantes de alto orden. Sin embargo, dicha implementación requiere el conocimiento de los parámetros para poder diseñar un filtro que genere la señal de control requerida. En este trabajo, se analiza el problema de control utilizando el enfoque de FOSM, dado el caso en que no se conozca  $g_1$ . Más aún, se aborda qué pasa cuando el diseñador implementa FOSM, ignorando la existencia de  $g_1$ , algo común en la práctica.

Para analizar el diseño vía modos deslizantes en presencia de una  $g_1$  desconocida (objetivo diferente al que se presenta en Jesionowski et al. (2023)), supongamos que la perturbación se puede reescribir tal que:

$$\varphi = (g^T g)^{-1} g^T \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

con  $g^T = [g_1 \ g_2]$ . Note además que esto es necesario, al menos en FOSM, para satisfacer la condición de acoplamiento que se menciona en Draženović (1969); de otra forma este problema no tiene solución vía FOSM.

Siendo así, el sistema (1) se puede representar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= a_1 z_1 + a_2 z_2 + g_1(u(t) + \varphi(t)), \\ \dot{z}_2 &= a_3 z_1 + g_2(u(t) + \varphi(t)). \end{aligned} \quad (3)$$

donde  $z_1 = \alpha$  y  $z_2 = q$ , los coeficientes  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  y  $g_2$  corresponden a los términos asociados en (1) y  $u(t) = \delta$ . Además, supongamos que el sistema nominal es estable con la superficie diseñada (cuando  $g_1 = 0$ ):  $\sigma(z) = \bar{c}_1 z_1 + z_2$ , para cualquier  $\bar{c}_1 > 0$ . Con una ley de control  $u(t) = -\rho(z) \text{sign}(\sigma) - u_{neq}$ , siendo  $\rho(z)$  una ganancia previamente diseñada. La dinámica de la variable de deslizamiento está dada por:

$$\dot{\sigma} = (\bar{c}_1 a_1 - \bar{c}_1^2 a_2 + a_3) z_1 + \bar{c}_1 a_2 \sigma + (\bar{c}_1 g_1 + g_2)(u(t) + \varphi(t)).$$

Utilizando el método del control equivalente (Utkin, 1992), la dinámica de deslizamiento corresponde a:

$$\dot{z}_1 = (a_1 - \bar{c}_1 a_2) z_1 - \frac{g_1}{\bar{c}_1 g_1 + g_2} (\bar{c}_1 a_1 - \bar{c}_1^2 a_2 + a_3) z_1, \quad (4)$$

donde observamos que si la incertidumbre  $g_1 \equiv 0$  recuperamos el sistema nominal  $\dot{z}_1 = (a_1 - \bar{c}_1 a_2) z_1$  cuyo origen es exponencialmente estable con  $a_1 - \bar{c}_1 a_2 < 0$ .

De este modo, demostraremos primero que el problema es plausible a pesar de que el coeficiente de control es desconocido no sólo en magnitud, si no en dirección. En el siguiente resultado se demuestra que a pesar de la existencia de  $g_1$ , para valores pequeños, la estabilidad del origen del lazo cerrado permanece estable exponencialmente. Por otro lado, vamos a considerar que  $g_2 = 1$ .

**Proposición 1.** *Suponga que para el sistema (3) se satisface que  $|\varphi(t)| \leq \bar{\varphi}$ . Más aún, existe una constante  $\bar{\alpha}_1$  tal que  $-1 < \bar{\alpha}_1 \leq \bar{c}_1 g_1$ . Siempre existe un valor de  $g_1$  lo suficientemente pequeño tal que el origen del sistema (4) es exponencialmente estable.*

*Demostración.* Proponiendo la función candidata de Lyapunov:  $V_z = \frac{1}{2} z_1^2$ . Su derivada a lo largo de las trayectorias de (4):

$$\dot{V}_z = \left( \beta_1 - \frac{g_1}{\bar{c}_1 g_1 + 1} \beta_2 \right) z_1^2,$$

con  $\beta_1 = a_1 - \bar{c}_1 a_2$  y  $\beta_2 = \bar{c}_1(a_1 - \bar{c}_1 a_2) + a_3$ .

Recordando al lector que  $\beta_1 < 0$ , para asegurar la negatividad de  $\dot{V}_z$ , entonces:

$$\beta_1 - \frac{g_1}{\bar{c}_1 g_1 + 1} \beta_2 < 0,$$

dado que se cumple  $-1 < \bar{\alpha}_1 \leq \bar{c}_1 g_1$ , entonces  $\bar{c}_1 g_1 + 1$  nunca es singular, por lo tanto:

$$g_1(\beta_1 \bar{c}_1 - \beta_2) < -\beta_1.$$

De aquí podemos inferir dos casos: cuando  $(\beta_1 \bar{c}_1 - \beta_2)$  es positivo, o cuando es negativo. Tratando el caso donde  $(\beta_1 \bar{c}_1 - \beta_2) > 0$ , la siguiente desigualdad es suficiente para asegurar la negatividad de  $\dot{V}_z$ :

$$g_1 < \frac{-\beta_1}{\bar{c}_1 \beta_1 - \beta_2}, \quad (5)$$

y en el caso contrario, implica que:

$$g_1 > \frac{-\beta_1}{\bar{c}_1 \beta_1 - \beta_2}. \quad (6)$$

En ambos casos, siempre que  $|g_1| \leq \bar{\alpha}_2$ , entonces se satisface  $\dot{V}_z \leq -\bar{\alpha}_2 |z_1|^2 < 0$ , lo cual demuestra que para valores pequeños de  $g_1$ , siempre se puede asegurar la estabilidad exponencial del origen de (4).  $\square$

A través de este resultado, es posible ver que, a pesar de existir una incertidumbre en el coeficiente de control que parece ser “desacoplada”, es posible asegurar, bajo ciertas condiciones, que el control por modos deslizantes sigue funcionando.

### 3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

A pesar de que se puede realizar un análisis de la dinámica de deslizamiento escalar para el ejemplo motivacional, como el presentado en la Proposición 1, para casos de dimensión superior el análisis es mucho más complicado. Por ende, es necesario desarrollar una metodología que nos permita no sólo concluir la estabilidad del origen en presencia de perturbaciones no acopladas, si no que además nos otorgue una condición para mantener dicha

estabilidad. Con ese fin, permítanos considerar la siguiente clase de sistemas lineales:

$$\dot{x} = J_n x + (e_n + \Gamma)(u(t) + \varphi(t)), \quad (7)$$

donde  $J_n$  representa una matriz de corrimiento superior (upper shift matrix),  $e_n^T = [0 \cdots 0 \ 1]$ ,  $u \in \mathbb{R}$  corresponde a la entrada de control y  $\Gamma \in \mathbb{R}^n$  como la incertidumbre en el coeficiente de control. Note que en el caso de  $\Gamma$  ser un vector columna con elementos cero excepto en el último canal corresponde a un coeficiente de control desconocido en magnitud, pero no en dirección. Es común en la mayoría de los diseños por modos deslizantes suponer que  $\Gamma = 0$ , si es así, la siguiente variedad de deslizamiento:

$$\Sigma := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sigma = Cx = 0\}, \quad (8)$$

donde  $C = [C_1 \ 1]$  y  $C_1 \in \mathbb{R}^{1 \times (n-1)}$ , implica que las trayectorias restringidas al conjunto  $\Sigma$  tienen un equilibrio exponencialmente estable, si se satisface que  $(J_{n-1} - e_{n-1} C_1)$  es una matriz Hurwitz. Sin embargo, eso no necesariamente se cumple si el coeficiente de control es incierto,  $\Gamma \neq 0$ . Esto se puede ver considerando la siguiente partición del sistema (7) en la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= J_{n-1} x_1 + e_{n-1} x_2 + \vec{\gamma}_1 (u(t) + \varphi(t)), \\ \dot{x}_2 &= (1 + \gamma_2)(u(t) + \varphi(t)), \end{aligned} \quad (9)$$

donde el estado particionado  $x_1 \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}$ , y  $\Gamma^T = [\vec{\gamma}_1^T \ \gamma_2]$ , con  $\vec{\gamma}_1 \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $\gamma_2 \in \mathbb{R}$ . De esta manera, uno puede definir la variable de deslizamiento de la forma:

$$\sigma = C_1 x_1 + x_2. \quad (10)$$

Y calculando su dinámica podemos reescribir el sistema (7) en la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (J_{n-1} - e_{n-1} C_1) x_1 + e_{n-1} \sigma + \vec{\gamma}_1 (u(t) + \varphi(t)), \\ \dot{\sigma} &= C_1 (J_{n-1} - e_{n-1} C_1) x_1 + C_1 e_{n-1} \sigma \\ &\quad + (C_1 \vec{\gamma}_1 + \gamma_2 + 1)(u(t) + \varphi(t)). \end{aligned} \quad (11)$$

Es fácil ver ahora, que si el coeficiente de control es completamente conocido, es decir  $\vec{\gamma}_1 = 0$ , entonces la dinámica durante el modo deslizante, cuando  $\sigma(x(t)) \equiv 0$ , está dada por la matriz  $(J_{n-1} - e_{n-1} C_1)$ . Sin embargo, en el caso de  $\vec{\gamma}_1 \neq 0$ , no es claro que se mantenga la estabilidad del origen cuando las trayectorias se restringen al conjunto (8). Por ello, podemos definir el problema de estudio de la siguiente manera.

**Problema de control:** Dada una superficie de deslizamiento previamente diseñada  $\sigma = C_1 x_1 + x_2$ .

- (i) Determinar las condiciones sobre la matriz  $\Gamma$ , de manera que el origen del sistema (7) siga siendo exponencialmente estable.
- (ii) Analizar y diseñar una ley de control discontinua que lleve las trayectorias de lazo cerrado hacia la superficie en un tiempo finito, a pesar de las perturbaciones e incertidumbres.

Para ello, se consideran las siguientes hipótesis.

**Hipótesis 1.** *Para el sistema (7) se satisface lo siguiente:*

1. Existe una constante no negativa  $\bar{\varphi}$ , tal que para todo  $t$ , la perturbación satisface:

$$|\varphi(t)| \leq \bar{\varphi}. \quad (12)$$

2. Para la incertidumbre, existe una constante no negativa  $\bar{\delta} < 1$ , tal que lo siguiente se satisface:

$$\Delta^T \Delta \leq \bar{\delta} \mathbb{I}, \quad (13)$$

donde la matriz:

$$\Delta = \frac{1}{C_1 \bar{\gamma}_1 + \gamma_2 + 1} \bar{\gamma}_1 C_1. \quad (14)$$

#### 4. RESULTADO PRINCIPAL

En esta sección, se analizarán los dos problemas mencionados anteriormente. Primero, se tratará el diseño de un control para alcanzar la superficie de deslizamiento. Consecuentemente, se analizará la dinámica durante el modo deslizante.

##### 4.1 Diseño de un control discontinuo

Note que del sistema (11), de acuerdo al diseño convencional de modos deslizantes, sólo es necesario estabilizar el origen del subsistema  $\dot{\sigma}$  en tiempo finito. Por ello, usualmente se utiliza la ley de control relevada:

$$\begin{aligned} u(t) &= -\rho \operatorname{sign}(\sigma) - u_{neq}, \\ u_{neq} &= C_1 (J_{n-1} - e_{n-1} C_1) x_1, \end{aligned} \quad (15)$$

con la ganancia  $\rho > 0$ . Note que  $u_{neq}$  es el llamado control equivalente nominal (Utkin (1992)), dígame del control necesario para llevar las trayectorias del lazo cerrado hacia la superficie en ausencia de perturbaciones e incertidumbres y mantenerlas ahí para todo tiempo futuro.

**Proposición 2.** *Asuma que para el sistema (9) las Hipótesis 1 se satisfacen. Más aún, existe una constante positiva  $\epsilon < 1$ , tal que:*

$$|C_1 \bar{\gamma}_1 + \gamma_2| \leq \epsilon.$$

Considere la ganancia de la forma:

$$\rho > \kappa + \bar{\varphi} + \bar{\rho}, \quad (16)$$

para cualquier  $\bar{\rho} > 0$ . Si se satisface que:

$$\kappa \geq \frac{\epsilon \|C_1 (J_{n-1} - e_{n-1} C_1)\| \|x_1(0)\| + |C_1 e_{n-1} \sigma(0)|}{1 - \epsilon}, \quad (17)$$

entonces las trayectorias de (9) convergen a la variedad (8) en un tiempo finito  $t_f = \frac{\sqrt{2}|\sigma(0)|}{\bar{\rho}}$ .

Como se presenta en la Proposición 2, en el caso de tener una incertidumbre en el canal de control, una ganancia constante no sería suficiente para estabilizar globalmente el origen de (11). Por lo tanto, si se desea que la superficie de deslizamiento sea estable en tiempo finito de manera global, entonces es necesario sustituir el control por uno de la forma:

$$u(t) = -\rho(x) \operatorname{sign}(\sigma) - u_{neq}, \quad (18)$$

donde ahora la ganancia  $\rho(x)$  es una función que depende del estado, y cuyo diseño adecuado puede asegurar que las trayectorias del sistema en lazo cerrado converjan a la

superficie en tiempo finito y de manera robusta. Esto se presenta en el siguiente resultado.

**Proposición 3.** *Suponga que la Hipótesis 1 se satisface para el sistema (9). Además, suponga que existe un escalar no negativo  $\epsilon < 1$ , tal que:*

$$|C_1 \bar{\gamma}_1 + \gamma_2| \leq \epsilon. \quad (19)$$

Si elige la ganancia  $\rho(x) > \kappa(x) + \bar{\varphi} + \bar{\rho}$ , con:

$$\kappa(x) \geq \frac{\epsilon \|C_1 (J_{n-1} - e_{n-1} C_1)\| \|x_1\| + |C_1 e_{n-1} \sigma|}{1 - \epsilon}, \quad (20)$$

y cualquier  $\bar{\rho} > 0$ ; entonces, las trayectorias del sistema (9) convergen a la variedad (8) en un tiempo finito  $t_f$ , y permanecen ahí para todo tiempo futuro sin importar las perturbaciones e incertidumbres.

La demostración de la Proposición 3 se puede realizar de la misma manera que en la Proposición 2, tomando en cuenta la ganancia  $\rho$  como variable en el estado.

##### 4.2 Dinámica durante el modo deslizante

Una vez alcanzada la superficie, la dinámica es colapsada a vivir sobre la variedad (8), es decir  $\sigma(x(t)) \equiv 0$ , para todo  $t \geq t_f$ . A través del método del control equivalente Utkin (1992), esto es, el control necesario para llevar las trayectorias a la superficie y mantenerlas ahí para todo tiempo futuro. Dicho control se obtiene calculando  $u$  de la ecuación algebraica que resulta de hacer  $\dot{\sigma} \equiv 0$  de la ecuación (11), resultando en:

$$u_{eq} = -\frac{1}{C_1 \bar{\gamma}_1 + \gamma_2 + 1} [C_1 (J_{n-1} - e_{n-1} C_1) x_1 - C_1 e_{n-1} \sigma] - \varphi(t). \quad (21)$$

Entonces, la dinámica durante el modo deslizante tiene la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \left[ \mathbb{I} - \frac{\bar{\gamma}_1 C_1}{C_1 \bar{\gamma}_1 + \gamma_2 + 1} \right] (J_{n-1} - e_{n-1} C_1) x_1, \\ &= (\mathbb{I} - \Delta) (J_{n-1} - e_{n-1} C_1) x_1. \end{aligned} \quad (22)$$

De la ecuación (22) se puede notar que la perturbación  $\varphi$  no aparece. Esto es debido a que en el sistema (7) se considera que la perturbación está acoplada al canal de control, aunque la dirección del control se desconoce. Por ello, a pesar de que la incertidumbre  $\Gamma$  no está acoplada al canal de control (al canal conocido), esta es sustancialmente diferente a la condición de acoplamiento mencionada en Draženović (1969).

Por otro lado, se nota que, debido a la incertidumbre en la dirección de control, tanto  $\bar{\gamma}_1$  como  $\gamma_2$  introducen una perturbación en los valores propios de la matriz  $(J_{n-1} - e_{n-1} C_1)$ . Sin embargo, se puede llegar a la conclusión de que el caso de que  $\bar{\delta}$  sea suficientemente pequeña, se puede asegurar que la estabilidad exponencial del origen se mantiene; esto se resume en el siguiente resultado.

**Teorema 1.** *Considere el sistema (22), y suponga que se satisfacen las Hipótesis 1-2. Suponga que las trayectorias están restringidas a la variedad (8). Si existe una solución  $P = P^T > 0$  de la siguiente ARE:*

$$(J_{n-1} - e_{n-1}C_1)^T P + P(J_{n-1} - e_{n-1}C_1) + \bar{\delta}P^2 + (J_{n-1} - e_{n-1}C_1)^T (J_{n-1} - e_{n-1}C_1) = -Q, \quad (23)$$

para alguna matriz  $Q = Q^T > 0$ , entonces el origen de (22) es exponencialmente estable.

Note que, a pesar de ser una clase muy particular de sistemas lineales, la ARE (23) nos permite caracterizar los valores de  $\bar{\delta}$  para los cuales la dinámica restringida tiene un equilibrio estable. Más aún, dicho valor puede ser obtenido fácilmente mediante métodos numéricos. Sin embargo, relacionar la matriz  $\Gamma$  con la incertidumbre total  $\Delta$  resulta complicado. No obstante, dicha estructura específica de sistemas nos permite ver que la incertidumbre  $\Delta$  implica dos restricciones sobre la dinámica de deslizamiento: la primera una restricción de ángulo entre los vectores  $C_1$  y  $\vec{\gamma}_1$ , y la otra en magnitud entre ambos.

## 5. EJEMPLO DE SIMULACIÓN

Volviendo al ejemplo motivacional:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -0.023x_1 + x_2 + g_1(u(t) + \varphi(t)), \\ \dot{x}_2 &= -54.246x_1 + (u(t) + \varphi(t)), \end{aligned} \quad (24)$$

y con el cambio de variable  $z$  propuesto:

$$\dot{z} = Az + (e_n + \Gamma)(u(t) + \varphi(t)), \quad (25)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} -0.023 & -21.698 \\ 2.5 & 0 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Se parte del diseño de una superficie de deslizamiento para el sistema nominal  $\dot{z} = Az + e_n(u + \varphi(t))$ , dado por  $\sigma = [-0.05 \ 0]$ , lo cual resulta en  $\beta_1 = 1.2008$  y  $\beta_2 = 2.5652$ , tomando los parámetros presentados en Jesionowski et al. (2023). Siendo así, la condición:

$$\bar{\alpha}_1 = -\frac{\beta_1}{\beta_1 c_1 - \beta_2} = -0.4803.$$

Por otro lado, el valor de  $\bar{\delta}$  resulta de analizar cuándo la ARE en (23) tiene solución, por medio de un código en Matlab®, siendo  $\bar{\delta} = 0.012$ . Es posible ver que obteniendo la cota superior de las incertidumbres vía las soluciones de (23), resultan bastante conservadoras con respecto al análisis en la Proposición 1.

Las siguientes simulaciones fueron realizadas en Simulink de Matlab® con un tiempo de muestreo de  $1e^{-4}$  y una perturbación de  $\varphi_1(t) = 0.1(\sin 2t \cos t)$ . En la Figura 1 se presenta la convergencia de los estados donde podemos comprobar que para un valor de  $g_1 = -0.4$  o  $g_1 = 9.48$  que pertenecen al rango de estabilidad determinado mediante  $\bar{\alpha}_1$  se mantiene la estabilidad de la dinámica de deslizamiento. Resultados que contrastan con la propuesta de Jesionowski et al. (2023), ya que comprueban que es posible diseñar un FOSM, las trayectorias convergen a la superficie en tiempo finito y se garantiza la estabilidad durante el modo deslizante. Además, la región de estabilidad que resulta dependiente del coeficiente de la superficie puede modificarse por medio de este diseño, el cual sólo requiere el conocimiento de un sistema nominal.

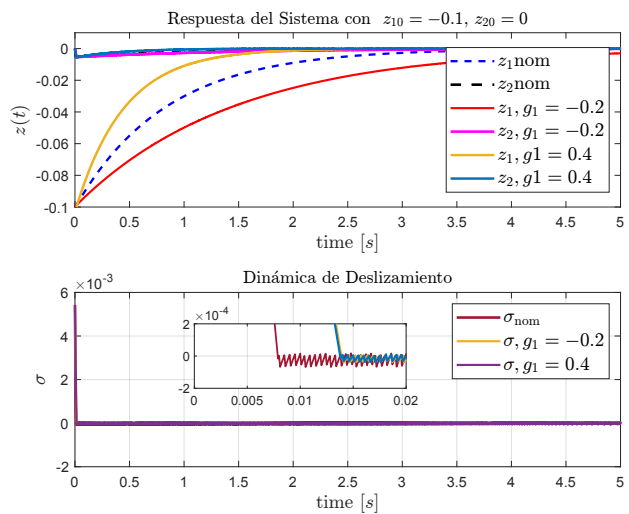


Figura 1. Respuesta del sistema y dinámica de deslizamiento.

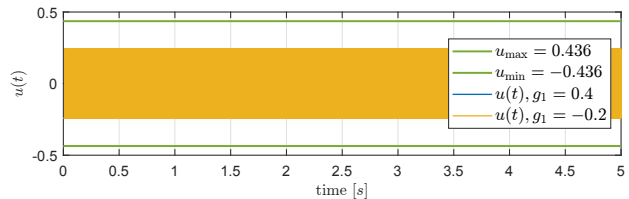


Figura 2. Señal de control,  $g_1 = -0.2$  y  $g_1 = 0.4$ .

## 6. CONCLUSIONES

En este artículo se analizó el problema del coeficiente incierto de control, en el caso de que la dirección del vector es desconocido. Dicho caso se puede pensar como una incertidumbre no “acoplada” al canal de control, sin embargo, se demuestra que es posible estabilizar el origen del sistema vía FOSM sin importar dichas incertidumbres. Por otro lado, se encuentran condiciones para mantener la estabilidad de la dinámica durante el modo de deslizamiento en una clase de sistemas lineales inciertos, utilizando una ecuación algebraica de Riccati. Con ello, el mensaje del trabajo consiste en abrir la discusión sobre las condiciones de acoplamiento en el SMC, así como ampliar la visión de las incertidumbres y perturbaciones que puedan ser compensadas por él.

Los resultados presentados se verifican utilizando un modelo de cohete controlado por aleta, demostrando que el SMC funciona aún en presencia de una incertidumbre en el coeficiente de control “desacoplada”.

## REFERENCIAS

- Ackermann, J. and Utkin, V. (1998). Sliding mode control design based on ackermann’s formula. *IEEE transactions on automatic control*, 43(2), 234–237.
- Castillo, I. and Fridman, L. (2013). Matlab toolbox for singular LQ based sliding mode control design. In *52nd*

- IEEE Conference on Decision and Control*, 4242–4247. IEEE.
- Choi, H.H. (1998). An explicit formula of linear sliding surfaces for a class of uncertain dynamic systems with mismatched uncertainties. *Automatica*, 34(8), 1015–1020. doi:10.1016/s0005-1098(98)00042-9.
- Choi, H.H. (1999). On the existence of linear sliding surfaces for a class of uncertain dynamic systems with mismatched uncertainties. *Automatica*, 35(10), 1707–1715. doi:10.1016/s0005-1098(99)00081-3.
- Choi, H.H. (2001). Variable structure control of dynamical systems with mismatched norm-bounded uncertainties: An lmi approach. *International Journal of Control*, 74(13), 1324–1334. doi:10.1080/00207170110061077.
- Choi, H.H. (2003). An lmi-based switching surface design method for a class of mismatched uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(9), 1634–1638. doi:10.1109/tac.2003.817007.
- Draženović, B. (1969). The invariance conditions in variable structure systems. 5(3), 9. doi:10.1016/0005-1098(69)90071-5.
- Edwards, C. and Spurgeon, S.K. (1998). *Sliding mode control: Theory and applications*. Taylor Francis.
- Estrada, M.A., Fridman, L., and Moreno, J.A. (2024). Passive fault-tolerant control via sliding-mode-based lyapunov redesign. *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- Etkin, B. (1972). *Dynamics of atmospheric flight*. Wiley.
- Filippov, A.F. (2013). *Differential equations with discontinuous righthand sides: control systems*, volume 18. Springer Science & Business Media.
- Jesionowski, R., Shtessel, Y., and Plestan, F. (2023). Sliding mode control design using generalized relative degree approach: Aerospace application. *Journal of the Franklin Institute*, 360(14), 10605–10632. doi: 10.1016/j.jfranklin.2023.08.002.
- Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, New Jersey.
- Petersen, I.R. (1987). A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems. *Systems & control letters*, 8(4), 351–357.
- Utkin, V.I. (1992). *Sliding modes in control and optimization*. Springer-Verlag.
- Yamamoto, S. and Kimura, H. (1996). Quadratic stabilization control via  $\mathcal{H}_\infty$ ; controller and tuning up by time-varying gain. *Transactions of the Society of Instrument and Control Engineers*, 32(4), 486–494. doi: 10.9746/sicetr1965.32.486.
- Yasuda, K. and Nakatsuji, Y. (1996). Robust sliding mode control of uncertain systems. *Proceedings. 1996 IEEE International Workshop on Variable Structure Systems. - VSS'96 -*. doi:10.1109/vss.1996.578531.

## APÉNDICE

### Demostración de la Proposición 2

Tome en cuenta el lazo cerrado del control (15) en la dinámica de deslizamiento en (11):

$$\dot{\sigma} = C_1 e_{n-1} \sigma - (C_1 \vec{\gamma}_1 + \gamma_2 + 1)(\rho \operatorname{sign}(\sigma) - \varphi(t)) - (C_1 \vec{\gamma}_1 + \gamma_2) C_1 (J_{n-1} - e_{n-1} C_1) x_1, \quad (27)$$

y la función candidata de Lyapunov  $W = \frac{1}{2} \sigma^2$ . La derivada de  $W$  a lo largo de de las trayectorias de (27) está dada por:

$$\frac{dW}{dt} = C_1 e_{n-1} \sigma^2 - (C_1 \vec{\gamma}_1 + \gamma_2)(\rho |\sigma| - \sigma \varphi(t)) + \sigma C_1 (J_{n-1} - e_{n-1} C_1) x_1 - \rho |\sigma| + \sigma \varphi(t). \quad (28)$$

De acuerdo con la condición en la incertidumbre dada en la Proposición 2, la siguiente cota se satisface:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &\leq |C_1 e_{n-1} \sigma| |\sigma| - |\sigma| (1 - \epsilon) \rho + |\sigma| (1 - \epsilon) \bar{\varphi} + \\ &\quad + \epsilon |\sigma| |C_1 (J_{n-1} - e_{n-1} C_1) x_1|, \quad (29) \\ \frac{dW}{dt} &\leq -|\sigma| (1 - \epsilon) \left( \rho - \frac{\epsilon |C_1 (J_{n-1} - e_{n-1} C_1) x_1|}{1 - \epsilon} \right. \\ &\quad \left. - \frac{|C_1 e_{n-1} \sigma|}{1 - \epsilon} - \bar{\varphi} \right), \quad (30) \end{aligned}$$

la cual se prueba negativa si la ganancia  $\rho$  satisface (16) y (17) para cualquier valor de  $\bar{\rho} > 0$  y  $x_1$  cumple que  $\|x_1\| \leq \|x_1(0)\|$ . Además, como  $\epsilon$  debe ser positiva menor a uno, se satisface que  $\frac{dW}{dt} \leq -|\sigma| (1 - \epsilon) \bar{\rho}$ .

Finalmente, se puede obtener  $t_f$  utilizando el Lemma de comparación de Khalil (2002).

### Demostración del Teorema 1

Para el subsistema (22), definamos la candidata a función de Lyapunov  $V = x_1^T P x_1$ , con  $P = P^T > 0$ . La derivada de  $V$  a lo largo de las trayectorias de (22) tiene la forma:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= x_1^T (J_{n-1} - e_{n-1} C_1)^T (\mathbb{I} - \Delta)^T P x_1 \\ &\quad + x_1^T P (\mathbb{I} - \Delta) (J_{n-1} - e_{n-1} C_1) x_1. \quad (31) \end{aligned}$$

Note que, de la misma manera que se presenta en Petersen (1987), lo siguiente es verdad con  $\mathcal{J} := J_{n-1} - e_{n-1} C_1$ :

$$2x_1^T P \Delta \mathcal{J} x_1 \leq x_1^T P \Delta^T \Delta P x_1 + x_1^T \mathcal{J}^T \mathcal{J} x_1, \quad (32)$$

lo que implica la siguiente cota superior,

$$\frac{dV}{dt} \leq 2x_1^T \operatorname{sym} \{ \mathcal{J} \} P x_1 + x_1^T P \Delta^T \Delta P x_1 + x_1^T \mathcal{J}^T \mathcal{J} x_1. \quad (33)$$

La Hipótesis 1 implica que  $\Delta$  tiene un valor singular máximo en 1 (véase Yamamoto and Kimura (1996)) y, por lo tanto, podemos acotar como:

$$\frac{dV}{dt} \leq 2x_1^T \operatorname{sym} \{ \mathcal{J} \} P x_1 + \bar{\delta} x_1^T P P x_1 + x_1^T \mathcal{J}^T \mathcal{J} x_1. \quad (34)$$

A su vez, tomando  $P$  como la solución de (23), implica que

$$\frac{dV}{dt} \leq -x_1^T Q x_1 \leq -\lambda_{\min}(Q) \|x_1\|^2 < 0, \quad (35)$$

lo que concluye la demostración.