

Analysis of the stability of the two-dimensional Lotka-Volterra mutual system

Pedro Damian Orozco Ruiz. * Horacio Leyva Castellanos. ** Baltazar Aguirre Hernández***

* Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa, Ciudad de México

(e-mail: damnovato123@gmail.com).

** Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora

(e-mail: horacio.leyva@unison.mx).

*** Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa, Ciudad de México

(e-mail: bahe@xanum.uam.mx).

Abstract: In this article, a robust positive control is proposed to stabilize a family of nonlinear positive systems. Sufficient conditions are provided for stabilization by sliding modes, which entails the robustness of the feedback system. The construction of a stabilizing line with sliding dynamics is detailed. The feasibility of the stabilization method is illustrated by studying a two-dimensional Lotka-Volterra mutualistic system where the sliding conditions, the construction of the segment of the stabilizing line and the robustness of the bounded positive control are shown.

Keywords: system stabilization, positive systems, sliding mode, mutualistic system.

1. INTRODUCCIÓN

Muchos sistemas económicos, físicos y biológicos involucran cantidades que están representadas por variables positivas, es decir, concentración de sustancias, simbiosis comensal de especies o biomasa. Estos ejemplos pertenecen a la clase de sistemas positivos, donde las variables de estado y condiciones iniciales no son negativas, este tipo de sistemas admite controles positivos, por ejemplo, en reactores y bioprocesos la acción de control está relacionada con flujos cuyo valor es estrictamente positivo. Además, esta clase de sistemas a menudo se estructuran en compartimentos, como reactores químicos, modelos fisiológicos, etc. Debido a este problema práctico, existe una motivación en el análisis de estos sistemas de control.

En este trabajo se estudia la estabilidad de un sistema mutualista Lotka-Volterra bidimensional, considerando las restricciones en la variable de estado y en el parámetro de control, de manera que utilizamos las propiedades de matrices Metzler y Hurwitz. Nuestro objetivo consiste en presentar condiciones suficientes para mejorar la estabilización del sistema positivo, de manera que la estabilidad sea robusta ante perturbaciones paramétricas. Al minimizar una función de Lyapunov, se obtiene un control óptimo que rinde una convergencia deslizante y mejora la tasa de convergencia a un punto de equilibrio positivo previamente establecido. El sistema mutualista Lotka-Volterra es un ejemplo de sistema positivo, ya que el cuadrante positivo R_+^2 es positivamente invariante. Un objetivo adicional de diseño de control consiste en que el sistema retroalimentado también sea un sistema positivo.

En las aplicaciones, el problema de estabilización de un sistema con control restringido es más apropiado que la estabilización con control no-acotado, ya que las restricciones del control representan las restricciones que se presentan en las aplicaciones, donde el parámetro de control puede representar una fuerza finita, energía finita, una sustancia finita, etc. Más aún, el signo de control también puede ser restringido, de

manera que se pueden establecer problemas de estabilización con control restringido en magnitud y signo.

2. PRELIMINARES

2.1 Notación

1. Dada una matriz $A \in R^{n \times n}$, entonces:

i) A^T representa la matriz transpuesta.

ii) A^{-1} representa la inversa.

iii) $A > 0$ significa que las entradas de A son estrictamente positivas.

iv) $A \geq 0$ significa que las entradas de A son no negativas.

v) $\sigma(A)$ representa el conjunto de valores propios.

2. R_+^n representa el ortante positivo de R^n , dado por $R_+^n = \{x \in R^n : x \geq 0\}$.

3. Para $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$, $\text{diag}(x) \in R^{n \times n}$ representa una matriz diagonal con componentes $x_1, x_2, \dots, x_n$.

2.2 Definiciones

i) La matriz $A = [a_{ij}] \in R^{n \times n}$ es Hurwitz si $\text{Re}(\lambda) < 0$ para toda $\lambda \in \sigma(A)$.

ii) La matriz $A = [a_{ij}] \in R^{n \times n}$ es Metzler si $a_{ij} \geq 0$ para $i \neq j$.

En general, supondremos que la matriz $A \in R^{n \times n}$ es Metzler y Hurwitz.

2.3 Antecedentes

En este artículo haremos uso de los siguientes resultados:

Si la matriz $A \in R^{n \times n}$ es Metzler y Hurwitz, entonces

A) Existe un vector $L > 0$ tal que $L^T A < 0$.

B) $A^{-1} \leq 0$ (la matriz inversa tiene entradas no positivas).

C) Existe $P \in R^{n \times n}$ diagonal estrictamente positiva, tal que $A^T P + PA$ es definida negativa.

D) DA es Metzler y Hurwitz, si $D \in R^{n \times n}$ diagonal estrictamente positiva.

E) Condiciones (cd) nec. y suf. para la existencia de un modo deslizante.

Definición 1. Diremos que el sistema no lineal autónomo

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(0) = x_0$$

con $f : R^n \rightarrow R^n$ de clase C^1 , es positivo si $x(t, x_0) \in R_+^n$ para toda $t \geq 0$ y $x_0 \in R_+^n$.

El Sistema anterior es positivo, si y sólo si

$$\forall x \in \partial R_+^n : x_i = 0 \Rightarrow f_i(x) \geq 0$$

Aplicaremos los resultados de sistemas positivos al análisis de la estabilidad de un sistema mutualista Lotka-Volterra n-dimensional.

Consideremos el sistema positivo no lineal:

$$\dot{x} = \text{diag}(x)Ax \quad (1)$$

con $x \in R_+^n$ y matriz $A \in R^{n \times n}$ Metzler. En este trabajo supondremos también que A es matriz Hurwitz.

El sistema (1) es conocido como sistema mutualista Lotka-Volterra, se utilizan comúnmente como modelos para las interacciones de diferentes especies en los sistemas ecológicos. Uno de los equilibrios de (1) es el origen que representa la extinción de todas las especies. En el trabajo [Vahid, 2012] se demuestra que el sistema (1) es un sistema positivo. Con esto en mente podemos ver lo siguiente:

Lema 2. Dada la matriz $A \in R^{2 \times 2}$ Metzler y Hurwitz, existe un vector positivo $L > 0$ tal que la matriz $\text{diag}(L)A$ es definida negativa.

Demostración.

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -a & b \\ c & -d \end{pmatrix},$$

con a, b, c y d positivas tal que $ad - bc > 0$. Consideremos el vector $L^T = \left(\frac{c}{b}, 1\right)$, entonces la matriz $\text{diag}(L)A$ es simétrica,

$$\text{diag}(L)A = \begin{pmatrix} -a\frac{c}{b} & c \\ c & -d \end{pmatrix},$$

de forma que la matriz $\text{diag}(L)A$ es definida negativa, de forma que

$$x^T \text{diag}(L)Ax = -\frac{ac}{b} \left(x_1 - \frac{b}{a}x_2\right)^2 - \frac{1}{a}(ad - bc)x_2^2 < 0 \text{ para } (x_1, x_2) \neq (0,0).$$

ya que $ad - bc > 0$.

En el lema anterior se presentan condiciones suficientes para la estabilidad, sin embargo, la condición de simetría es muy restrictiva y no es necesaria, de manera que aún para una matriz Hurwitz no siempre existe un vector $L > 0$ tal que la matriz $\text{diag}(L)A$ es simétrica. Por ejemplo, si consideramos la matriz

$$M = \begin{pmatrix} -a & b \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

y sea $L^T = (q, 1)$ tal que

$$\text{diag}(L)M = \begin{pmatrix} -aq & bq \\ 0 & -c \end{pmatrix}, \text{ con } q > 0,$$

de manera que no existe vector $L > 0$ tal que la matriz $\text{diag}(L)M$ es simétrica. Sin embargo, en el siguiente planteamiento mostramos que para esta matriz M es posible una convergencia con deslizamiento.

3. INTRODUCCIÓN HACIA LOS MODOS DESLIZANTES

Consideremos el sistema de control

$$\frac{dx}{dt} = \text{diag}(x)(Ax + Bu), \quad (2)$$

con matriz $A \in R^{2 \times 2}$ Metzler y Hurwitz, y con vector $B > 0$. Consideremos el valor constante $\bar{u}$, con $r_1 < \bar{u} < r_2$, de forma que el equilibrio positivo es determinado por $\bar{x} = -A^{-1}B\bar{u}$. Obsérvese que el equilibrio $\bar{x}$ está en función de la entrada $\bar{u}$. Para estudiar el deslizamiento, consideremos la función no negativa $V(x) = \frac{1}{2}s^2(x)$, donde $s(x) = L^T(x - \bar{x})$, y el conjunto de valores admisibles del control $u \in [r_1, r_2]$, con r_1 y r_2 tal que

$$0 \leq r_1 \leq \min_{(x_1, x_2) \in H} u_{eq}(x_1, x_2) \leq \max_{(x_1, x_2) \in H} u_{eq}(x_1, x_2) \leq r_2$$

Si consideramos una condición inicial $x_0 \in \text{int}R_+^2$ tal que $s(x_0) \neq 0$, definimos el control óptimo u^* , como la función de control $u^*(x) \in [r_1, r_2]$ que rinde la mejor tasa de convergencia al segmento de recta H bajo el sistema (2), de forma que $s(x(t_f, x_0)) = 0$, con tiempo finito $t_f > 0$. Para determinar u^* calculamos el siguiente mínimo:

$$\min_{u \in [0, r]} \left\{ \frac{dV(x(t))}{dt} \right\} = \min_{u \in [0, r]} \left\{ s(x) \frac{\partial s}{\partial x} \dot{x} \right\} = \min_{u \in [0, r]} \{ L^T(x - \bar{x}) L^T \dot{x} \}$$

donde

$$\begin{aligned} L^T(x - \bar{x}) L^T \dot{x} &= L^T(x - \bar{x}) L^T (\text{diag}(x)(Ax + Bu)) \\ &= s(x)(x^T \text{diag}(L)Ax + \text{diag}(x)L^T Bu) \\ &= \alpha(x) + \beta(x)u \end{aligned}$$

con $\text{diag}(x)L^T B > 0$ para $x \in \text{int}R_+^2$. Por lo tanto

$$\min_{u \in [0, r]} \frac{dV(x(t))}{dt} = \alpha(x) + \beta(x)u^*$$

donde

$$u^* = \begin{cases} r_1 & \text{si } L^T(x - \bar{x}) > 0 \\ u_{eq}(x) & \text{si } L^T(x - \bar{x}) = 0. \\ r_2 & \text{si } L^T(x - \bar{x}) < 0 \end{cases} \quad (*)$$

La siguiente proposición establece condiciones suficientes para una convergencia al punto de equilibrio positivo $\bar{x} \in H$.

Proposición 3. Si $A \in R^{2 \times 2}$ es matriz Metzler y Hurwitz, entonces las soluciones $x(t, x_0)$ del sistema (2) - (*) con condición inicial $x_0 \in \text{int}R_+^2$, convergen al punto de equilibrio positivo $\bar{x} = -A^{-1}B\bar{u}$, mediante un deslizamiento sobre el segmento de recta H .

Demostración.

De lema 2 se tiene que

$$x^T \text{diag}(L)Ax = -\frac{ac}{b} \left(x_1 - \frac{b}{a}x_2\right)^2 - \frac{1}{a}(ad - bc)x_2^2 < 0; (x_1, x_2) \neq (0,0),$$

considerando la desigualdad $0 \leq r_1 < u_{eq}(x) < r_2$ para $x \in H$, entonces

$$L^T \text{diag}(x)Br_1 < L^T \text{diag}(x)Bu_{eq}(x) < L^T \text{diag}(x)Br_2,$$

ya que $L^T \text{diag}(x)B > 0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} L^T \text{diag}(x)(Ax + Br_1) &< L^T \text{diag}(x)(Ax + Bu_{eq}(x)) \\ &< L^T \text{diag}(x)(Ax + Br_2), \end{aligned}$$

entonces existe un deslizamiento, ya que se satisfacen las condiciones. De manera que las soluciones que inician en $\text{int}R_+^2$ convergen al segmento de recta H . Ahora mostraremos que la dinámica deslizante es asintóticamente estable. Para $x = (x_1, x_2) \in H$, la dinámica es representada por

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & b \\ c & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} u_{eq}(x)$$

con

$$u_{eq}(x) = \frac{a \frac{c}{b} (x_1 - \frac{b}{a} x_2)^2 + \frac{1}{a} (ad - bc) x_2^2}{\frac{1}{b} (bb_2 x_2 + cb_1 x_1)} > 0 \quad (x_1, x_2) \in H \subset \text{int}R_+^2$$

ya que $(x_1, x_2) \in H$, entonces $x_2 = \frac{1}{b}(k - cx_1)$, con constante

$$k = \left(\frac{c^2 b_1 + abb_2 + bcb_2}{ac} \right) \bar{u} > 0$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 (bx_2 - ax_1 + b_1 u_{eq}(x)) \\ x_2 (cx_1 - dx_2 + b_2 u_{eq}(x)) \end{pmatrix}$$

entonces el deslizamiento es representado por la ecuación escalar

$$\dot{x}_1 = x_1 (bx_2 - ax_1 + b_1 u_{eq}(x)) \quad \text{con} \quad x_2 = \frac{1}{b}(k - cx_1)$$

es decir

$$\dot{x}_1 = x_1 (k + b_1 u_{eq} - (a + c)x_1), \quad x_1 > 0$$

Lo cual implica que

$$\dot{x}_1 \begin{cases} < 0 & \text{si } x_1 > \frac{k + b_1 u_{eq}}{a + c} \\ = 0 & \text{si } x_1 = \frac{k + b_1 u_{eq}}{a + c} \\ > 0 & \text{si } x_1 < \frac{k + b_1 u_{eq}}{a + c} \end{cases}$$

por consiguiente, $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t, x_{10}) = \bar{x}_1$.

Con esto tenemos que para una familia de sistemas del tipo (2) sucede que las soluciones $x(t, x_0)$ del sistema representada

$$\frac{dx}{dt} = \text{diag}(x)(Ax + B\bar{u}) \quad (3)$$

convergen al equilibrio $\bar{x}$.

En la siguiente proposición mostramos que el punto de equilibrio $\bar{x}$ es *asintóticamente estable en forma local* bajo el sistema no lineal (3).

Proposición 4. Si la matriz $A \in R^{2 \times 2}$ es Metzler y Hurwitz, entonces el equilibrio positivo $\bar{x}$ es *asintóticamente estable para el sistema* (3).

Demostración.

Con el cambio de variable $y(t) = x(t) - \bar{x}$, entonces $\dot{y}(t) = \dot{x}(t)$, con $b = B\bar{u}$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \text{diag}(y + \bar{x})(A(y + \bar{x}) + b) \\ &= \text{diag}(y + \bar{x})Ay \end{aligned}$$

lo cual nos indica que

$$\frac{dy}{dt} = \text{diag}(y)Ay + \text{diag}(\bar{x})Ay \quad (4)$$

con punto de equilibrio $y = 0$. Donde $C = \text{diag}(\bar{x})A$, tal que si A es Metzler y Hurwitz, entonces la matriz C también es Metzler y Hurwitz. Concluimos que el origen $y = 0$ es loc. asintóticamente estable para el sistema (4). Por lo tanto, concluimos que el punto de equilibrio $\bar{x}$ es asintóticamente estable en forma local bajo el sistema no lineal (3).

4. RESULTADOS IMPORTANTES

4.1 Sobre el deslizamiento

Dado un sistema del tipo (2), el objetivo principal es diseñar una dinámica deslizante sobre el segmento de la recta H , dado por

$$H = \{x \in R_+^2 : L^T(x - \bar{x}) = 0\},$$

donde L es un vector estrictamente positivo tal que $L^T A < 0$.

El objetivo es diseñar una función de control $u(x)$, de forma que las soluciones $x(t, x_0)$ del sistema retroalimentado (2) con $u(x)$ converjan al equilibrio $\bar{x} \in R_+^2$. La dinámica debe incluir un deslizamiento sobre el segmento H ; si $x_0 \in H$ sucede que $x(t, x_0) \in H$ para $t \geq 0$, tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = \bar{x}.$$

En general, buscamos que el punto de equilibrio $\bar{x}$ del sistema retroalimentado (2) con $u(x)$, sea asintóticamente estable para $x_0 \in \text{int}R_+^2$; además la estabilidad debe ser robusta y con mejor tasa de convergencia que la dinámica estable representada por (3).

Ahora buscamos probar que $L^T \dot{x}(t) > 0 \quad \forall (x, y) \in S \setminus \{\bar{x}\}$, bajo el sistema

$$\dot{x} = \text{diag}(x)(Ax + Br), \quad \text{con } L^T(x_0 - \bar{x}) < 0$$

donde $0 < \bar{u} < r$ y vector $B > 0$, de forma que

$$L^T \dot{x} = L^T \text{diag}(x)(Ax + Br).$$

La condición de deslizamiento se expresa mediante las desigualdades:

$$\begin{aligned} \lim_{L^T(x - \bar{x}) \rightarrow 0^+} L^T \text{diag}(x)(Ax + Br_1) &< 0 \quad \text{para } x \in R_+^2 \\ \lim_{L^T(x - \bar{x}) \rightarrow 0^-} L^T \text{diag}(x)(Ax + Br_2) &> 0 \quad \text{para } x \in R_+^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Para probar que existe un deslizamiento sobre H , supondremos las condiciones del lema 2; es decir, el vector $L > 0$ es tal que $L^T \text{diag}(x)Ax < 0$.

Para diseñar el control $u_{eq}(x)$ que mantiene a $x(t) \in H$ para $t \geq 0$, entonces $\frac{d(L^T(x(t) - \bar{x}))}{dt} = 0$, entonces el deslizamiento es dado por $L^T \dot{x} = 0$, es decir

$$L^T \text{diag}(x)(Ax + Bu_{eq}(x)) = 0$$

por lo tanto, el control equivalente $u_{eq}(x)$ nos queda

$$u_{eq}(x) = -\frac{L^T \text{diag}(x)Ax}{L^T \text{diag}(x)B} > 0,$$

ya que $L^T \text{diag}(x)B > 0$ y $L^T \text{diag}(x)Ax < 0$ para $x \in \text{int}R_+^2$.

Además, considerando $A\bar{x} = -B\bar{u}$, tenemos que

$$\begin{aligned} u_{eq}(\bar{x}) &= -\frac{L^T \text{diag}(\bar{x})A\bar{x}}{L^T \text{diag}(\bar{x})B} \\ &= \frac{L^T \text{diag}(\bar{x})B}{L^T \text{diag}(\bar{x})B} \bar{u} \\ &= \bar{u}. \end{aligned}$$

Ahora vamos a utilizar los resultados anteriores para un sistema mutualista bidimensional.

Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ las densidades de la población 1 y población 2 al tiempo t . El siguiente sistema positivo no lineal describe la dinámica de la población 1 y población 2, en el cual podemos ver que x_1 es inofensivo para la especie x_2 y x_1 sobrevivirá sin x_2 .

Consideremos el sistema positivo no lineal

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & b \\ 0 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} u \quad (6)$$

donde suponemos la restricción del parámetro de control $u \in [0, r]$ y vector $B = (b_1, b_2)^T > 0$. Consideremos un valor constante $\bar{u} > 0$, de forma que el equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in R_+^2$ está en función de $\bar{u}$, dado por

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -a & b \\ 0 & -c \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \bar{u} = \frac{\bar{u}}{ac} \begin{pmatrix} bb_2 + cb_1 \\ ab_2 \end{pmatrix}.$$

Sea

$$H = \{x \in R_+^2 : L^T(x - \bar{x}) = 0\}, \quad L^T = (q, 1) \in \text{int}R_+^2$$

con $L^T = (q \ 1) > 0$,

$$\begin{aligned} L^T \dot{x}(t) &= (q \ 1) \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & b \\ 0 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= -aqx_1^2 + bqx_1x_2 - cx_2^2 = -aq \left(x_1^2 - \frac{b}{a}x_1x_2 + \frac{c}{aq}x_2^2 \right) \end{aligned}$$

que podemos reescribir como

$$L^T \dot{x}(t) = -aq \left[\left(x_1 - \frac{b}{2a}x_2 \right)^2 + \left(\frac{c}{aq} - \frac{1}{4a^2}b^2 \right) x_2^2 \right]. \quad (7)$$

Encontrando valores para q :

En (7) necesitamos un valor para q de forma que

$$\frac{c}{aq} - \frac{1}{4a^2}b^2 > 0$$

tal que

$$\frac{c}{aq} - \frac{1}{4a^2}b^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < q < \frac{4ac}{b^2},$$

por lo tanto, con la última desigualdad se cumple que

$$L^T \dot{x}(t) < 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in H. \quad (8)$$

Para los siguientes cálculos elegimos $q = \frac{2ac}{b^2}$.

Al considerar el sistema de control (6), para $(x_1, x_2) \in H$, definimos $u_{eq}(x_1, x_2)$ mediante la igualdad $L^T \dot{x} = 0$ para $t \in I$, es decir

$$L^T \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2ac}{b^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & b \\ 0 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} u_{eq} = 0$$

de forma que

$$u_{eq}(x_1, x_2) = \frac{2a^2c \left[\left(x_1 - \frac{b}{2a}x_2 \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{b^2}{a^2} x_2^2 \right]}{2acb_1x_1 + b_2b^2x_2},$$

observamos que

$$u_{eq}(x_1, x_2) \geq 0 \quad \text{para toda } (x_1, x_2) \in H \cap (\text{int}R_+^2).$$

El control discontinuo

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } L^T(x - \bar{x}) > 0 \\ u_{eq}(x) & \text{si } L^T(x - \bar{x}) = 0, \quad x \in R_+^2 \\ r & \text{si } L^T(x - \bar{x}) < 0 \end{cases} \quad (9)$$

donde el parámetro $r \geq 0$ satisface la desigualdad:

$$r > \max_{(x,y) \in H} u_{eq}(x, y).$$

En general, la función escalar $V : R_+^2 \rightarrow R_+$, definida por

$$V(x(t)) = \frac{1}{2} s^2(x(t))$$

donde $s(x(t)) = L^T(x(t, x_0) - \bar{x})$. La función no negativa $V(x(t))$ decrece bajo el sistema (6) – (9), con $x(t) = x(t, x_0)$, $x(0) = x_0 \in \text{int}R_+^2$ tal que $L^T(x_0 - \bar{x}) \neq 0$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{dV(x(t))}{dt} &= s(x(t)) \frac{ds(x(t))}{dt} \\ &= s(x(t)) \cdot L^T(\text{diag}(x)(Mx + bu)) \end{aligned}$$

tal que

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = \begin{cases} s(x(t)) \text{diag}(x)Mx < 0 & \text{si } s(x(t)) > 0 \\ s(x(t)) \text{diag}(x)(Mx + Bu_{eq}(x)) = 0 & \text{si } s(x(t)) = 0 \\ s(x(t)) \text{diag}(x)(Mx + Br) > 0 & \text{si } s(x(t)) < 0 \end{cases} \quad (10)$$

Las dos desigualdades de (10) son equivalentes con $r_1 = 0$ y $r_2 = r$.

4.2 La Dinámica deslizante en el segmento de recta $H \subset \text{int}R_+^2$.

El segmento de recta H es dado por

$$2ac^2x_1 + b^2cx_2 = b^2\bar{u}b_2 + 2c^2\bar{u}b_1 + 2bc\bar{u}b_2 \quad (11)$$

la dinámica deslizante nos queda

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & b \\ 0 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} u_{eq}(x, y) \quad (12)$$

es decir

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \frac{x_1x_2}{b_2x_2b^2 + 2acb_1x_1} \begin{pmatrix} b^2(bb_2x_2 - ab_2x_1 + cb_1x_2) \\ -2ac(bb_2x_2 - ab_2x_1 + cb_1x_2) \end{pmatrix}$$

donde se satisface que $L^T(x - \bar{x}) = 0$, con $L^T = (q \ 1) = \left(\frac{2ac}{b^2} \ 1 \right)$; es decir y

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \frac{\bar{u}}{ac} \begin{pmatrix} bb_2 + cb_1 \\ ab_2 \end{pmatrix}.$$

Para este ejemplo es modificado a una entrada u positiva, para quedar de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u \quad (E1)$$

con parámetro de control acotado $u \in [0, 4]$. Consideremos un valor constante positivo $\bar{u} \in [0, 4]$, tal que el equilibrio nos queda

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \bar{u} = \begin{pmatrix} 3\bar{u} \\ \bar{u} \end{pmatrix}$$

donde $\bar{x} \in \text{int}R_+^2$ siempre que $\bar{u} > 0$. Si $\bar{u} = 1$, entonces $\bar{x} = (3, 1)^T$.

Nos proponemos diseñar un segmento de recta H de deslizamiento, de forma que las soluciones $x(t, x_0) \in H$ del sistema retroalimentado converjan al equilibrio positivo $\bar{x}$ de forma rápida.

Considerando

$$\begin{pmatrix} -a & b \\ 0 & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad L^T = \begin{pmatrix} \frac{2ac}{b^2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

el segmento de recta H nos queda

$$H = \{(x_1, x_2) \in \text{int}R_+^2 : x_1 + x_2 = 4\}.$$

de forma que

$$\begin{aligned} u_{eq}(x_1, x_2) &= \frac{2a^2c \left[\left(x_1 - \frac{b}{2a}x_2 \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{b^2}{a^2} x_2^2 \right]}{2acb_1x_1 + b_2b^2x_2} \\ &= \frac{(x_1 - x_2)^2 + x_2^2}{2x_1 + x_2} \geq 0 \quad \text{para } (x_1, x_2) \in H \subset R_+^2. \end{aligned}$$

El control discontinuo (9) nos queda

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 + x_2 > 4 \\ u_{eq}(x) & \text{si } x_1 + x_2 = 4, \quad x \in R_+^2 \\ r & \text{si } x_1 + x_2 < 4 \end{cases} \quad (E2)$$

donde se cumple que

$$u_{eq}(x_1, x_2) \in [0, 4], \quad r := 4 > \max_{(x_1, x_2) \in H} u_{eq}(x_1, x_2).$$

El sistema retroalimentado nos queda

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1^2 + 2x_1x_2 + x_1u(x_1, x_2) \\ -2x_2^2 + 2x_2u(x_1, x_2) \end{pmatrix}. \quad (E4)$$

En la siguiente gráfica se ve la convergencia de ocho soluciones

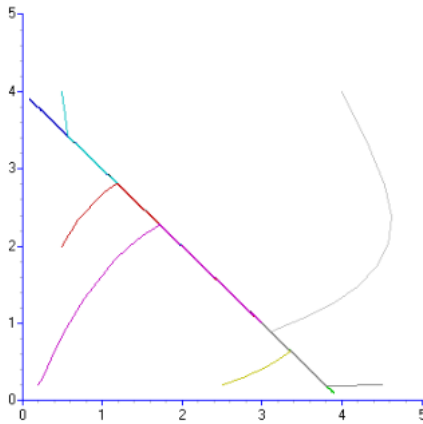
$$x(t, x_0) = (x_1(t, x_0), x_2(t, x_0))$$

del sistema retroalimentado (E1) – (E2); primero llegan en tiempo finito al segmento de recta de deslizamiento

$$H = \{(x_1, x_2) \in R_+^2 : x_1 + x_2 - 4 = 0\}$$

Con condiciones iniciales:

(0.1,3.9), (3.9,0.1): y fuera de la recta: (0.5,4), (0.5,2), (0.2,0.2), (2.5,0.2), (4,4), (4.5,0.2), al llegar a la recta se deslizan asintóticamente al punto de equilibrio (3,0.5).



Convergencia deslizante al equilibrio $(x_1, x_2) = (3, 0.5)$

4.3 Estabilidad de la dinámica deslizante en el segmento de recta $H \subset \text{int}R_+^2$

La dinámica deslizante es dada por el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -a & b \\ 0 & -c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} u_{eq}(x_1, x_2) \quad (13)$$

con

$$u_{eq}(x_1, x_2) = \frac{2a^2c \left[\left(x_1 - \frac{b}{2a}x_2 \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{b^2}{a^2} x_2^2 \right]}{2acb_1x_1 + b_2b^2x_2},$$

es decir

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \frac{x_1x_2}{b_2x_2b^2 + 2acb_1x_1} \begin{pmatrix} b^2(bb_2x_2 - ab_2x_1 + cb_1x_2) \\ -2ac(bb_2x_2 - ab_2x_1 + cb_1x_2) \end{pmatrix}$$

con equilibrio

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \frac{\bar{u}}{ac} \begin{pmatrix} bb_2 + cb_1 \\ ab_2 \end{pmatrix}.$$

La dinámica (13) se desarrolla en la recta $L^T(x - \bar{x}) = 0$, con $L^T = (q \quad 1) = \left(\frac{2ac}{b^2} \quad 1 \right)$; es decir

$$\begin{aligned} L^T(x - \bar{x}) &= \left(\frac{2ac}{b^2} \quad 1 \right) \begin{pmatrix} x_1 - \left(\frac{\bar{u}}{ac} \right) (bb_2 + cb_1) \\ x_2 - \frac{\bar{u}b_2}{c} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{b^2c} (b^2\bar{u}b_2 - b^2cx_2 - 2ac^2x_1 + 2c^2\bar{u}b_1 + 2bc\bar{u}b_2) \end{aligned}$$

es decir

$$b^2\bar{u}b_2 - b^2cx_2 - 2ac^2x_1 + 2c^2\bar{u}b_1 + 2bc\bar{u}b_2 = 0,$$

o bien

$$\begin{aligned} 2ac^2x_1 + b^2cx_2 &= b^2\bar{u}b_2 + 2c^2\bar{u}b_1 + 2bc\bar{u}b_2 \\ &= \bar{u}(b^2b_2 + 2c^2b_1 + 2bcb_2) \end{aligned}$$

equivalentemente

$$2acx_1 + b^2x_2 = \frac{\bar{u}}{c} (b^2b_2 + 2c^2b_1 + 2bcb_2) = k$$

donde observamos que

$$0 \leq x_2 \leq \frac{\bar{u}}{b^2c} (b^2b_2 + 2c^2b_1 + 2bcb_2) = \frac{k}{b^2} \quad (\text{Des1})$$

y, además

$$0 \leq x_1 \leq \frac{\bar{u}}{2ac^2} (b^2b_2 + 2c^2b_1 + 2bcb_2) \quad (\text{Des2})$$

es decir

$$x_1 = \frac{1}{2ac} (k - b^2x_2) \quad (*)$$

entonces

$$2ac\dot{x}_1 + b^2\dot{x}_2 = 0 \Leftrightarrow \dot{x}_2 = -\frac{2ac}{b^2}\dot{x}_1$$

por lo tanto

$$\dot{x}_2 = -2ac \frac{x_1x_2}{b_2x_2b^2 + 2acb_1x_1} (bb_2x_2 - ab_2x_1 + cb_1x_2)$$

Al sustituir x_1 con (*), tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= -2ac \frac{x_1x_2}{b_2x_2b^2 + 2acb_1x_1} (bb_2x_2 - ab_2x_1 + cb_1x_2) \\ &= -2ac \frac{x_2 \left(\frac{1}{2ac} (k - b^2x_2) \right)}{b_2x_2b^2 + 2acb_1 \left(\frac{1}{2ac} (k - b^2x_2) \right)} \left(bb_2x_2 - ab_2 \left(\frac{1}{2ac} (k - b^2x_2) \right) + cb_1x_2 \right) \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= -\frac{1}{2c^2} x_2 (cx_2 - \bar{u}b_2) (b_2b^2 + 2b_2bc \\ &\quad + 2b_1c^2) \frac{-x_2b^2c + \bar{u}(b_2b^2 + 2b_2bc + 2b_1c^2)}{b^2c(b_2 - b_1)x_2 + \bar{u}b_1(b_2b^2 + 2b_2bc + 2c^2b_1)} \end{aligned}$$

por (Des1), tenemos que

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{2c^2} x_2 (cx_2 - \bar{u}b_2) \left(\frac{c}{b_1\bar{u}} k \right) \frac{-x_2b^2 + k}{b^2 \left(\frac{b_2}{b_1} - 1 \right) x_2 + k}$$

donde se cumple que

$$\begin{aligned} 0 &\leq -b^2x_2 + \frac{\bar{u}}{c} (b^2b_2 + 2c^2b_1 + 2bcb_2) = -b^2x_2 + k \\ &< b^2 \left(\frac{b_2}{b_1} - 1 \right) x_2 + k \end{aligned}$$

es decir

$$0 \leq \frac{-x_2b^2 + k}{b^2 \left(\frac{b_2}{b_1} - 1 \right) x_2 + k} < 1, \quad \text{para } \frac{b_2}{b_1} > 1.$$

Concluimos que la dinámica deslizante (13) podemos reescribirla como

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{2c^2} x_2 (cx_2 - \bar{u}b_2) \left(\frac{c}{b_1\bar{u}} k \right) \frac{-x_2b^2 + k}{b^2 \left(\frac{b_2}{b_1} - 1 \right) x_2 + k}. \quad (14)$$

Proposición 5. El punto de equilibrio $\bar{x}_2 = \frac{\bar{u}}{c} b_2$ es un atractor para la dinámica deslizante representada por (14).

Demostración.

Consideremos la función no negativa $V(x_2)$ dado por

$$V(x_2) = \frac{1}{2} (x_2 - \bar{x}_2)^2 = \frac{1}{2} \left(x_2 - \frac{\bar{u}}{c} b_2 \right)^2$$

entonces

$$\frac{dV_s(x_2)}{dt} = \dot{x}_2 \left(x_2 - \frac{\bar{u}}{c} b_2 \right)$$

por lo tanto

$$\frac{dV(x_2)}{dt} = -\frac{1}{2c} x_2 \left(x_2 - \frac{\bar{u}}{c} b_2 \right)^2 \left(\frac{c}{b_1\bar{u}} k \right) \frac{-x_2b^2 + k}{b^2 \left(\frac{b_2}{b_1} - 1 \right) x_2 + k} < 0,$$

ya que

$$0 \leq \frac{-x_2b^2 + k}{b^2 \left(\frac{b_2}{b_1} - 1 \right) x_2 + k} < 1 \quad \& \quad 0 < x_2 < \frac{\bar{u}}{b^2c} (b^2b_2 + 2c^2b_1 + 2bcb_2),$$

concluimos que el punto de equilibrio $\bar{x}_2 = \frac{\bar{u}}{c} b_2$ es un atractor para la dinámica deslizante representada por (14), de forma que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t, x_{20}) = \bar{x}_2 \text{ para } 0 < x_{20} < \frac{\bar{u}}{b^2 c} (b^2 b_2 + 2c^2 b_1 + 2bcb_2).$$

Con este análisis del sistema mutualista bidimensional Lotka-Volterra hemos ilustrado la utilidad del método de modos deslizantes. En general el método de modos deslizantes ha demostrado ser una herramienta muy útil para trabajar sistemas en las ciencias aplicadas.

6. CONCLUSIONES

Con las propiedades de una matriz $A \in R^{n \times n}$ Metzler y Hurwitz, es posible dar condiciones suficientes para la estabilización global de una familia de sistemas positivos no lineales conocidos como sistemas mutualistas Lotka-Volterra bidimensionales. Esta estabilización se logra mediante un control positivo óptimo definido para toda $x \in R_+^2 \setminus \{0\}$, que incluye un control equivalente positivo para mantener la dinámica deslizante sobre un segmento de hiperplano H que contiene al único equilibrio positivo $\bar{x}$.

Primero se establecen condiciones particulares para tener la desigualdad

$$L^T \text{diag}(x)Ax < 0 \text{ para toda } x \in R_+^2 \setminus \{0\}. \quad (*)$$

Mostramos que siempre existe un vector $L^T > 0$ de forma que la desigualdad (*) se cumple.

Respecto a las aplicaciones a sistemas tipo mutualista Lotka-Volterra, se establecen nuevos criterios para la estabilización global con control acotado, de manera que la estabilidad resulta robusta por corresponder a modos deslizantes.

En la literatura actual, para sistemas positivos no lineales, no hay reportados métodos de estabilización con modos deslizantes. En el presente trabajo se hace una contribución en este tema.

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

- Chen, Z., Ju, X., Wang, Z., & Li, Q. (2021). The prescribed time sliding mode control for attitude tracking of spacecraft. *Asian Journal of Control*, 1650-1660. <https://doi.org/10.1002/asjc.2569>.
- Farina, L., & Rinaldi, S. (2000). *Positive Linear Systems*. John Wiley.
- Goh, B.S. (1979). Stability in Models of Mutualism. *Journal of Process Control*, 113(2), 261-275.
- Han, R., & Chen, F. (2015). Global Stability of a Commensal Symbiosis Model with Feedback Controls. *Commun. Math. Biol. Neurosci.*, 15. ISSN: 2052-2541.
- Leyva, H., Carrillo, F.A., Quiroz, G., & Femat, R. (2016). Robust stabilization of positive linear systems via sliding positive control. *Journal of Process Control*, 41, 47-55.
- Leyva, H., Quiroz, G., Carrillo, F.A., & Femat, R. (2018). Insulin stabilization in artificial pancreas: a positive control approach. *IET Control Theory and Applications*, 13, 970-978.

- Leyva, H., Quiroz, G., Carrillo, F.A., & Femat, R. (2019). Insulin stabilization in artificial pancreas: a positive control approach. *The Institution of Engineering and Technology*, 13(7), 970-978.
- Leyva, H., Femat, R., Carrillo, F.A., & Quiroz-Compean, G. (2023). On positive systems with multivariable positive control: Process stabilization. *Journal of Process Control*, 132.
- Leyva Castellanos, H., Carrillo Navarro, F.A., Quiroz Compeán, G., & Femat Flores, A. (2023). Estabilidad de sistemas lineales positivos por politopos invariantes. *Sahuarus*, 7(1), 1-19.
- Luenberger, D. (1979). *Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models, and Applications*. Wiley.
- Rami, M.A., & Tadeo, F. (2007). Controller synthesis for positive linear systems with bounded controls. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 54(2), 151-155.
- Rantzer, A. (2015). Scalable control of positive systems. *European Journal of Control*, 24, 72-80.
- Samadi Bokharaie, V. (2012). *Stability Analysis of Positive Systems with Applications to Epidemiology*. Hamilton Institute, National University of Ireland Maynooth.
- Sira-Ramírez, H. (1988). Differential geometric methods in variable-structure control. *International Journal of Control*, 48(4), 1359-1390.
- Teng, Q., Xu, G., Zheng, X., Mai, H., Ma, X., & Wang, Y. (2022). A novel sliding mode observer-based compound sliding mode current control with active damping for single phase grid-tied inverter system in weak grid.
- Zhang, X., Liu, X., & Su, H. (2023a). Continuous sliding mode control for uncertain linear time-invariant systems with matched and unmatched uncertainties using the Lyapunov-function integral sliding mode. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 45(13), 2501-2514.
- Zhang, X., Liu, X., & Su, H. (2023b). Continuous sliding mode control for uncertain linear time-invariant systems with matched and unmatched uncertainties using the Lyapunov-function integral sliding mode. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 45(13), 2501-2514.