

Formation Tracking of Unicycle Mobile Robots Using Super-Twisting ^{*}

Yoshua Díaz ^{*} Jorge Dávila ^{**}

^{*} Instituto Politécnico Nacional (IPN), Estudiante de Doctorado en Comunicaciones y Electrónica, ESIME - CULHUACAN, Ciudad de México, México (yoshua2p@hotmail.com).

^{**} Instituto Politécnico Nacional (IPN), Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, ESIME - UPT, Ciudad de México, México (jadavila@ipn.mx).

Resumen. This article introduces a distributed control approach for unicycle mobile robots in a leader-follower configuration, ensuring a specific geometric arrangement on the horizontal plane. The proposed control algorithm allows the formation of the follower robots relative to the leader using a super-twisting sliding mode controller even in the presence of disturbances. This method employs a pair of sliding variables and a continuous control signal, ensuring that the sliding variables converge to zero within a finite time. The specific formulation of these sliding variables guarantees that the formation errors converge asymptotically to a bounded region around the origin.

Keywords: Autonomous vehicles, Sliding mode control, Mobile robots, Cooperative control, Decentralized and distributed control.

1. INTRODUCCION

En los últimos años, la coordinación de múltiples agentes se ha popularizado en diferentes áreas e industrias como, robótica, telecomunicaciones, computación, aeronáutica, entre otras, ya que apoyan al hombre con tareas de agricultura, vea Moysiadis et al. (2020), seguridad y defensa ante ataques, como en Zhang and Liu (2024). El diseño de algoritmos de control que garantizan la tarea de formación en el espacio es relevante debido a que permite la coordinación de grandes grupos de robots móviles. Los lectores interesados en más aplicaciones de sistemas multiagentes puede consultar Rizk et al. (2018), así como las referencias en éste.

La técnica de Modos Deslizantes (MD) se ha utilizado para el control en una gran variedad de sistemas que requieren robustez ante perturbaciones y convergencia en tiempo finito, una clase de estos sistemas son los Robots Móviles Uniciclos (RMU). En Du et al. (2015) se resuelve el problema de seguimiento de líder en formación a través de MD combinándolo con la técnica de integrador de potencia, para la cinemática sin perturbaciones, garantizando una convergencia en tiempo finito. Se resuelve un problema similar con un control super-twisting en Yang et al. (2020), garantizando una formación respecto al marco de referencia del líder de manera asintótica a una región para la cinemática sin perturbaciones, utilizando un observador para estimar las velocidades del líder, a diferencia de este artículo el enfoque que utilizan es basado en eventos. Los MD difusos se utilizan principalmente en la formación de robots móviles con evasión de obstáculos, garantizando una convergencia asintótica a cero de los errores de formación. Tal es el caso de Dai et al. (2016), en donde contemplan un líder físico y los agentes no están sometidos a perturbaciones. En

Savkin et al. (2016) se soluciona el problema de formación con velocidades acotadas, utilizando un control por MD de vector unitario para un sistema multiagente sin líder, garantizando que los errores converjan de forma exponencial a cero.

Ninguno de los artículos anteriores involucran perturbaciones o incertidumbres en el modelo cinemático de los robots móviles, son pocos los que involucran un control capaz de lidiar con éstas. Por ejemplo, en Chen et al. (2014) se resuelve el problema de seguimiento de líder en formación a través de MD convencionales lidiando con incertidumbres garantizando una convergencia exponencial de los errores a cero. En Hernández-León et al. (2020) se utiliza el mismo tipo de control para resolver el mismo problema, la diferencia es que el sistema se basa en distancias con un enfoque por rigidez, además de implementar un observador de velocidad del líder, esto para un sistema múltiple de robots móviles con perturbaciones.

En este artículo, se propone un control distribuido que se diseña utilizando el control super-twisting presentado en Moreno and Osorio (2012), el cual, además de garantizar la convergencia de los estados en tiempo finito en presencia de perturbaciones, se caracteriza por proporcionar una señal de control continua, evitando problemas de *chattering* en los robots. Las principales características del control propuesto, a diferencia de Díaz and Dávila (2023) y Díaz et al. (2023), son:

- El algoritmo de control proporciona una señal de control continua que garantiza la convergencia de las variables deslizantes al origen en tiempo finito.
- El control propuesto lidia con perturbaciones presentes en el modelo cinemático de los RMU, las cuales están relacionadas al deslizamiento y patinado de sus ruedas.
- El término saturado del algoritmo de control lidia con los términos no lineales causados por la no holonomía del sistema de una manera sencilla.

^{*} Este trabajo recibió apoyo de SEP-CONACYT-ANUIES-ECOS Francia número 315597/M20M04, de la SIP-IPN número 20240869, y del Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) con el CVU 1034576.

Además, a diferencia de Rochel et al. (2022) en donde se resuelve el problema de seguimiento de una trayectoria deseada por parte de un sólo RMU, el algoritmo de control propuesto en este artículo soluciona el problema de formación de múltiples vehículos con ruedas mientras realizan una maniobra de seguimiento de un líder.

2. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considere un sistema multiagente compuesto por $n + 1$ RMU, n seguidores y un líder, con la configuración mostrada en la Figura 1. La cinemática del i -ésimo robot unicycle es:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= (1 + d_{1i})v_i \cos(\theta_i), \\ \dot{y}_i &= (1 + d_{1i})v_i \sin(\theta_i), \\ \dot{\theta}_i &= (1 + d_{2i})\omega_i, \end{aligned} \quad (1)$$

donde $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ son la posición en x e y del agente i en el marco de referencia inercial, $\theta_i \in \mathbb{R}$ es la orientación en el marco de referencia inercial. $v_i \in \mathbb{R}$ y $\omega_i \in \mathbb{R}$ son las velocidades lineal y angular, respectivamente, $d_{1i}, d_{2i} \in \mathbb{R}$ son las perturbaciones causadas por el patinado y deslizamiento de las ruedas, respectivamente, para el seguidor $i = 1, \dots, n$ y el líder L . Se considera en este trabajo que todos los agentes poseen la misma cinemática.

La interacción entre los seguidores es modelada por el grafo de comunicación no dirigido $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, donde $\mathcal{V} = 1, \dots, n + 1$ es el conjunto de vértices y $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ es el conjunto de aristas. Se considera que los seguidores comparten sus velocidades lineales y angulares con su vecindad, i.e., el i -ésimo agente tiene acceso a v_j y ω_j si $(i, j) \in \mathcal{E}$. Si un par de vértices $(i, j) \in \mathcal{E}$, entonces el par $(j, i) \in \mathcal{E}$. No se permiten aristas propias, i.e., $(i, i) \notin \mathcal{E}$. La vecindad del vértice i es el conjunto $\mathcal{N}_i = \{j \in \mathcal{V} | (i, j) \in \mathcal{E}\}$.

Suposición 1. Las velocidades y aceleraciones, lineales y angulares, del líder se asumen acotadas:

$$\begin{aligned} 0 < v_{L\min} \leq v_L \leq v_{L\max}, & \quad |\dot{v}_L| \leq \bar{v}_{L\max}, \\ |\omega_L| \leq \omega_{L\max}, & \quad |\dot{\omega}_L| \leq \bar{\omega}_{L\max}. \end{aligned} \quad (2)$$

Suposición 2. Las entradas de control satisfacen las siguientes condiciones para todo $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} |v_i| \leq v_{\max}, & \quad |\dot{v}_i| \leq \bar{v}_{\max}, \\ |\omega_i| \leq \omega_{\max}, & \quad |\dot{\omega}_i| \leq \bar{\omega}_{\max}. \end{aligned} \quad (3)$$

La matriz de adyacencia \mathcal{A} asociada al grafo \mathcal{G} es una matriz simétrica de dimensión $n \times n$ cuyas entradas se definen como $a_{ij} = 1$ si $(i, j) \in \mathcal{E}$, de otra forma $a_{ij} = 0$, nótese que $a_{ii} = 0$, Mesbahi and Egerstedt (2010).

Un grafo \mathcal{G} es nombrado conectado si para cada par de vértices $(c, d) \in \mathcal{V}$, existe un camino de c a d .

Suposición 3. El grafo de comunicación formado por los seguidores es conectado y no dirigido.

Suposición 4. El líder L siempre forma parte del conjunto vecindad de al menos un seguidor.

El objetivo de control es representado en términos del error de formación $e_i \in \mathbb{R}^3$, el cual se aprecia en la Figura 1, y se describe como:

$$e_i = [e_{1i} \ e_{2i} \ e_{3i}]^T = \frac{1}{N_i} A(\theta_i) \sum_{j=1}^n a_{ij} (r_j - r_i + \Delta_{ij}), \quad (4)$$

donde N_i es la cardinalidad del conjunto vecindad \mathcal{N}_i del agente $i = 1, \dots, n$, y $\Delta_{ij} = [\delta_{ijx} \ \delta_{ijy} \ 0]^T$ es el vector de

distancias relativas deseadas. Entonces, δ_{ijx} y δ_{ijy} son las distancias relativas deseadas entre i y j , en los ejes x y y , respectivamente, además:

$$A(\theta_i) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & \sin(\theta_i) & 0 \\ -\sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad r_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ \theta_i \end{bmatrix}, \quad r_j = \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ \theta_j \end{bmatrix},$$

donde $r_i, r_j \in \mathbb{R}^3$ para cada agente $i = 1, \dots, n$ y $\forall j \in \mathcal{N}_i$.

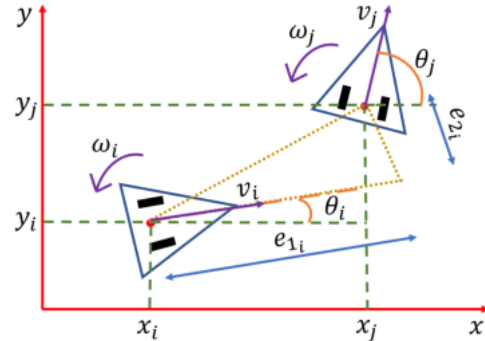


Figura 1. Modelo de los RMU y errores de formación.

Suposición 5. Los valores absolutos de los promedios de las velocidades y aceleraciones, lineales y angulares, de los agentes de cada vecindad $i = 1, \dots, n$ se asumen acotados por las velocidades y aceleraciones, lineal y angular, máximas del líder:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \right| &\leq N_i v_L, & \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} \omega_j \right| &\leq N_i \omega_L, \\ \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{v}_j \right| &\leq N_i \dot{v}_L, & \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{\omega}_j \right| &\leq N_i \dot{\omega}_L. \end{aligned} \quad (5)$$

Las perturbaciones variantes en tiempo relacionadas con el patinado y deslizamiento de las ruedas de los RMU se asumen desconocidas pero acotadas como $-1 < d_{\min} \leq d_{i,j} \leq d_{\max}$ y además son Lipschitz continuas, i.e., $|d_{i,j}| \leq \bar{d}_{\max}$, para $i = 1, 2$ y $j \in \mathcal{N}_i$.

El objetivo es diseñar una ley de control distribuido que, satisfechas las *Suposiciones 1 a 5*, asegure que los errores de formación (4) converjan a una región compacta del origen, garantizando así el seguimiento en formación del líder. Cuando este objetivo es alcanzado, todos los seguidores se posicionan en la geometría deseada y siguen la trayectoria del líder.

3. DISEÑO DE CONTROL

3.1 Dinámica de los errores de formación

Primero, calculando la derivada temporal de e_{1i} , sustituyendo la cinemática (1) y aplicando la identidad de la suma y diferencia de ángulos, y la identidad Pitagórica, se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{e}_{1i} &= (1 + d_{2i})\omega_i e_{2i} + \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \cos(\theta_j - \theta_i) \\ &+ \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j d_{1j} \cos(\theta_j - \theta_i) - (1 + d_{1i})v_i. \end{aligned}$$

La señal de control v_i se propone como:

$$v_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \cos(\theta_j - \theta_i) - u_{1i}, \quad (6)$$

donde u_{1_i} es una variable auxiliar que se diseñará después para garantizar que e_{1_i} vaya a cero. Entonces, la dinámica de e_{1_i} se escribe de forma compacta como:

$$\begin{aligned} \dot{e}_{1_i} = & (1 + d_{2_i})\omega_i e_{2_i} + \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j d_{1_j} \cos(\theta_j - \theta_i) \\ & - v_i d_{1_i} + u_{1_i}. \end{aligned} \quad (7)$$

Segundo, calculando la derivada temporal del error de formación e_{2_i} y sustituyendo la cinemática (1) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{e}_{2_i} = & -(1 + d_{2_i})\omega_i e_{1_i} + \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \sin(\theta_j - \theta_i) \\ & + \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j d_{1_j} \sin(\theta_j - \theta_i). \end{aligned} \quad (8)$$

Tercero, la derivada temporal de e_{3_i} se calcula como:

$$\dot{e}_{3_i} = -(1 + d_{2_i})\omega_i + \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} \omega_j + \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} \omega_j d_{2_j}.$$

La señal de control ω_i se propone como:

$$\omega_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} \omega_j - u_{3_i}. \quad (9)$$

Así, la dinámica de e_{3_i} es escrita en forma compacta como:

$$\dot{e}_{3_i} = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} \omega_j d_{2_j} - \omega_i d_{2_i} + u_{3_i}, \quad (10)$$

donde u_{3_i} es una variable auxiliar que se diseñará de tal forma que la convergencia de e_{3_i} a una región alrededor de cero implique la convergencia de e_{2_i} . Nótese que las variables v_i , ω_i , u_{1_i} y u_{3_i} tendrán un rol importante en el diseño del control.

3.2 Ley de control

En esta sección, dos leyes de control basadas en un algoritmo continuo que garantiza la existencia de un modo deslizante de segundo orden, son propuestas para garantizar la formación con seguimiento de líder. El primer control actúa sobre la velocidad lineal del vehículo (6), mientras que el segundo actúa en la velocidad angular (9). El control provee el seguimiento de los estados del líder para los tres grados de libertad de los seguidores.

Se proponen dos variables deslizantes para asegurar que los errores de formación (4) converjan a cero:

$$\sigma_{1_i} = e_{1_i}, \quad (11)$$

$$\sigma_{2_i} = e_{3_i} - \arcsin(f(e_{2_i})), \quad (12)$$

donde $f(e_{2_i})$ es una función no lineal continua a trozos:

$$f(e_{2_i}) = -(\min\{\delta_1 |e_{2_i}|^{-1}, \delta_2\}) e_{2_i}, \quad (13)$$

donde δ_1 y δ_2 son constantes que satisfacen:

$$1 > \delta_1 > 0, \quad \delta_2 > 0.$$

Las dos leyes de control auxiliares se proponen como:

$$u_{1_i} = -k_1 [\sigma_{1_i}]^{1/2} + u_{2_i}, \quad (14)$$

$$\dot{u}_{2_i} = -k_2 [\sigma_{1_i}]^0, \quad (15)$$

$$u_{3_i} = -k_3 [\sigma_{2_i}]^{1/2} + u_{4_i}, \quad (16)$$

$$\dot{u}_{4_i} = -k_4 [\sigma_{2_i}]^0, \quad (17)$$

donde $k_1, k_2, k_3, k_4 > 0$ son las ganancias de control.

Teorema 1. Sea un conjunto de n RMU, con el modelo cinemático mostrado en (1), satisfaciendo las *Suposiciones 1 a 5*. Entonces, las leyes de control

$$v_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \cos(\theta_j - \theta_i) - u_{1_i},$$

$$\omega_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} \omega_j - u_{3_i},$$

donde u_{1_i} y u_{3_i} están definidas en (14)-(17), y las variables deslizantes en (11) y (12), con las ganancias de control $k_1 = \frac{1.5k_2^{1/2}}{(1.1)^{1/2}}$, $k_2 > g_1$, $k_3 = \frac{1.5k_4^{1/2}}{(1.1)^{1/2}}$ y $k_4 > g_3$ con:

$$\begin{aligned} g_1 = & (1 + d_{\max})^2 (\omega_{\max}^2 + \omega_{\max} v_{L\max}) + (1 + d_{\max}) \bar{\omega}_{\max} \delta_1 / \delta_2 \\ & + d_{\max} (\bar{v}_{\max} + \bar{v}_{L\max}) + \bar{d}_{\max} (v_{\max} + v_{L\max} + \omega_{\max} \delta_1 / \delta_2) \\ & d_{\max} (1 + d_{\max}) (v_{L\max}) (\omega_{L\max} + \omega_{\max}), \end{aligned}$$

$$g_2 = d_{\max} (\bar{\omega}_{L\max} + \bar{\omega}_{\max}) + \bar{d}_{\max} (\omega_{L\max} + \omega_{\max}),$$

$$g_3 = g_2 + \frac{\delta_2^2 \delta_1}{(1 - \delta_1^2)^{3/2}} (1 + d_{\max})^2 (\omega_{\max} + v_{L\max})^2$$

$$+ \frac{\delta_2}{\sqrt{1 - \delta_1^2}} [(1 + d_{\max})^2 v_{L\max} (\omega_{L\max} + \omega_{\max}) + \bar{v}_{L\max}$$

$$+ d_{\max} (1 + d_{\max}) (\omega_{\max}^2 \delta_1 / \delta_2 + \omega_{\max} v_{\max}) + d_{\max}^2 \omega_{\max} v_{L\max} \\ + d_{\max} (\bar{\omega}_{\max} + \omega_{\max} v_{L\max} + \bar{v}_{L\max}) + \bar{d}_{\max} (\omega_{\max} + v_{L\max})];$$

garantizan que las dinámicas de los errores de formación (7), (8) y (10), aún en presencia de las perturbaciones $d_{1_{i,j}}$ y $d_{2_{i,j}}$, converjan asintóticamente al conjunto acotado:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} = & \left\{ (e_{1_i}, e_{2_i}, e_{3_i})^T \in \mathbb{R}^3 : |e_{1_i}| = 0, |e_{2_i}| \leq \sqrt{\frac{\xi}{\psi}}, \right. \\ & \left. |e_{3_i}| \leq \arcsin \left(\delta_2 \sqrt{\frac{\xi}{\psi}} \right), \forall i = 1, \dots, n \right\}, \end{aligned}$$

con $\psi := v_{L\min} \delta_2 (1 + d_{\min})$ y $\xi := \frac{\delta_1 v_{L\max}}{\delta_2} (1 + d_{\max}) \sqrt{1 - \delta_1^2}$.

Prueba 1. El análisis de estabilidad es estructurado, debido a la característica de subactuación del problema, para dos variables de deslizamiento relacionadas a dos controles, y tres errores de formación relacionados a tres variables de configuración.

Análisis de estabilidad de σ_{1_i} : Para el caso en el que $|e_{2_i}| \leq \frac{\delta_1}{\delta_2}$, se introduce la función candidata de Lyapunov $V_{\sigma_{1_i}} = \mathcal{L}_{1_i} P_1 \mathcal{L}_{1_i}$ para la primera variable deslizante (11) con $\mathcal{L}_{1_i} = [|e_{1_i}|^{1/2} \text{sign}(e_{1_i}) \quad \bar{v}_{1_i}]^T$ y $P_1 = P_1^T > 0$, para el sistema:

$$\dot{e}_{1_i} = -k_1 [e_{1_i}]^{1/2} + \bar{v}_{1_i},$$

$$\dot{\bar{v}}_{1_i} = -k_2 [e_{1_i}]^0 + \dot{\rho}_{1_i},$$

donde $\bar{v}_{1_i} := u_{2_i} + \rho_{1_i}$ con:

$$\rho_{1_i} = (1 + d_{2_i})\omega_i e_{2_i} - v_i d_{1_i} + \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j d_{1_j} \cos(\theta_j - \theta_i).$$

Calculando la derivada temporal de $V_{\sigma_{1_i}}$ a lo largo de las trayectorias de (7) y sustituyendo (14) y (15), se obtiene:

$$\dot{V}_{\sigma_{1_i}} \leq \frac{1}{2} |e_{1_i}|^{-1/2} \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{1_i} \\ \tilde{\rho}_{b_{1_i}} \end{bmatrix}^T \Psi_1 \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{1_i} \\ \tilde{\rho}_{b_{1_i}} \end{bmatrix},$$

donde $\tilde{\rho}_{b_{1_i}} = 2|e_{1_i}|^{1/2} \dot{\rho}_{1_i}$ y además:

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} P_1 A_0 - P_1 K_1 C + A_0^T P_1 - C^T K_1^T P_1 + R_1 + \varepsilon_1 P_1 & P_1 B \\ B^T P_1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0],$$

$$\varepsilon_1 > 0, \quad K_1 = \begin{bmatrix} k_1 \\ 2k_2 \end{bmatrix}, \quad R_1 = g_1^2 C^T C.$$

Para garantizar la convergencia de la primera variable deslizante se debe cumplir que $\Psi_1 \leq 0$ y $|\dot{\rho}_{1i}| \leq g_1$, por lo que utilizando (2), (3) y (5) se obtiene el valor de g_1 .

Utilizando la desigualdad $|e_{1i}|^{1/2} \geq \lambda_{\min}^{1/2}\{P_1\}/V_{\sigma_{1i}}^{1/2}$, de acuerdo a Moreno and Osorio (2012), se tiene que:

$$\dot{V}_{\sigma_{1i}} \leq -\frac{1}{2}\varepsilon_1 \lambda_{\min}^{1/2}\{P_1\} V_{\sigma_{1i}}^{1/2}.$$

Por lo tanto, la variable deslizante σ_{1i} , el primer error de formación e_{1i} y la variable \bar{v}_{1i} convergen a cero en tiempo finito de manera local para $|e_{1i}| \leq 1$.

Análisis de estabilidad de σ_{2i} : La derivada de la función $f(\cdot)$ en (13) tiene una discontinuidad en $|e_{2i}| = \frac{\delta_1}{\delta_2}$, esto hace que los errores de formación deban ser analizados cuando $|e_{2i}| > \frac{\delta_1}{\delta_2}$ y cuando $|e_{2i}| \leq \frac{\delta_1}{\delta_2}$.

Para la primera región, donde $|e_{2i}| > \frac{\delta_1}{\delta_2}$ y $f(e_{2i}) = -\delta_1 \text{sign}(e_{2i})$, $\arcsin(f(e_{2i}))$ tiene un valor constante:

$$\frac{d}{dt} \arcsin(f(e_{2i})) = 0. \quad (18)$$

Se escoge la función candidata de Lyapunov $V_{\sigma_{2i}} = \mathcal{L}_{2i} P_2 \mathcal{L}_{2i}$ para la segunda variable deslizante (11) con los términos $\mathcal{L}_{2i} = [|\sigma_{2i}|^{1/2} \text{sign}(\sigma_{2i}) \ \bar{v}_{2i}]^T$ y $P_2 = P_2^T > 0$, para analizar el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{2i} &= -k_3 [\sigma_{2i}]^{1/2} + \bar{v}_{2i}, \\ \dot{\bar{v}}_{2i} &= -k_4 [\sigma_{2i}]^0 + \rho_{2i}, \end{aligned}$$

donde $\bar{v}_{2i} := u_{4i} + \rho_{2i}$ con:

$$\rho_{2i} = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} \omega_j d_{2j} - \omega_i d_{2i}.$$

Calculando la derivada temporal de $V_{\sigma_{2i}}$ a lo largo de las trayectorias de (10) y sustituyendo (16), (17) y (18), se obtiene:

$$\dot{V}_{\sigma_{2i}} \leq \frac{1}{2} |\sigma_{2i}|^{-1/2} \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{2i} \\ \tilde{\rho}_{b_{2i}} \end{bmatrix}^T \Psi_2 \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{2i} \\ \tilde{\rho}_{b_{2i}} \end{bmatrix},$$

donde $\tilde{\rho}_{b_{2i}} = 2|\sigma_{2i}|^{1/2} \rho_{2i}$ y además:

$$\Psi_2 = \begin{bmatrix} P_2 A_0 - P_2 K_2 C + A_0^T P_2 - C^T K_2^T P_2 + R_2 + \varepsilon_2 P_2 & P_2 B \\ B^T P_2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon_2 > 0, \quad K_2 = \begin{bmatrix} k_3 \\ 2k_4 \end{bmatrix}, \quad R_2 = g_2^2 C^T C.$$

Para garantizar la convergencia de la segunda variable deslizante se debe cumplir que $\Psi_2 \leq 0$ y $|\dot{\rho}_{2i}| \leq g_2$, por lo que utilizando (2), (3) y (5) se obtiene el valor de g_2 .

Utilizando la desigualdad $|\sigma_{2i}|^{1/2} \geq \lambda_{\min}^{1/2}\{P_2\}/V_{\sigma_{2i}}^{1/2}$, se obtiene finalmente que:

$$\dot{V}_{\sigma_{2i}} \leq -\frac{1}{2} \varepsilon_2 \lambda_{\min}^{1/2}\{P_2\} V_{\sigma_{2i}}^{1/2}.$$

Por lo tanto la variable deslizante σ_{2i} y la variable \bar{v}_{2i} convergen a cero en tiempo finito.

Para la segunda región, donde $|e_{2i}| \leq \frac{\delta_1}{\delta_2}$, $f(e_{2i}) = -\delta_2 e_{2i}$, la derivada del arco seno ahora está dada como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \arcsin(-\delta_2 e_{2i}) &= -[-\delta_2(1+d_2)\omega_i e_{1i} \\ &+ \frac{\delta_2 \Sigma S}{N_i} \cos(e_{3i}) + \frac{\delta_2 \Sigma C}{N_i} \sin(e_{3i}) \\ &+ \frac{\delta_2 \Sigma S_d}{N_i} \cos(e_{3i}) + \frac{\delta_2 \Sigma C_d}{N_i} \sin(e_{3i})] / \sqrt{1 - \delta_2^2 e_{2i}^2}, \end{aligned} \quad (19)$$

donde:

$$\Sigma S := \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \sin(\theta_j - \theta_i - e_{3i}), \quad \Sigma C := \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \cos(\theta_j - \theta_i - e_{3i}),$$

$$\Sigma S_d := \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j d_{1j} \sin(\theta_j - \theta_i - e_{3i}), \quad \Sigma C_d := \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j d_{1j} \cos(\theta_j - \theta_i - e_{3i}).$$

Se escoge la función candidata de Lyapunov $V_{\sigma_{2i}} = \mathcal{L}_{3i} P_2 \mathcal{L}_{3i}$ para la segunda variable deslizante (11) con los términos $\mathcal{L}_{3i} = [|\sigma_{2i}|^{1/2} \text{sign}(\sigma_{2i}) \ \bar{v}_{3i}]^T$ y $P_2 = P_2^T > 0$, para analizar el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{2i} &= -k_3 [\sigma_{2i}]^{1/2} + \bar{v}_{3i}, \\ \dot{\bar{v}}_{3i} &= -k_4 [\sigma_{2i}]^0 + \rho_{3i}, \end{aligned}$$

donde $\bar{v}_{3i} := u_{4i} + \rho_{3i}$ con:

$$\rho_{3i} = \rho_{2i} - \frac{d}{dt} \arcsin(-\delta_2 e_{2i}).$$

Calculando la derivada temporal de $V_{\sigma_{2i}}$ a lo largo de las trayectorias de (10) y sustituyendo (16), (17) y (19), se obtiene:

$$\dot{V}_{\sigma_{2i}} \leq \frac{1}{2} |\sigma_{2i}|^{-1/2} \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{3i} \\ \tilde{\rho}_{b_{3i}} \end{bmatrix}^T \Psi_3 \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{3i} \\ \tilde{\rho}_{b_{3i}} \end{bmatrix},$$

donde $\tilde{\rho}_{b_{3i}} = 2|\sigma_{2i}|^{1/2} \rho_{3i}$ y además:

$$\Psi_3 = \begin{bmatrix} P_2 A_0 - P_2 K_2 C + A_0^T P_2 - C^T K_2^T P_2 + R_3 + \varepsilon_3 P_2 & P_2 B \\ B^T P_2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon_3 > 0, \quad R_3 = g_3^2 C^T C.$$

Para garantizar la convergencia se debe cumplir que $\Psi_3 \leq 0$ y $|\dot{\rho}_{3i}| \leq g_3$. Por lo que utilizando (2), (3) y (5) se obtiene el valor de g_3 .

De aquí se obtiene que $1 > \delta_1 > 0$. Utilizando la desigualdad $|\sigma_{2i}|^{1/2} \geq \lambda_{\min}^{1/2}\{P_2\}/V_{\sigma_{2i}}^{1/2}$, se obtiene finalmente que:

$$\dot{V}_{\sigma_{2i}} \leq -\frac{1}{2} \varepsilon_2 \lambda_{\min}^{1/2}\{P_2\} V_{\sigma_{2i}}^{1/2}.$$

Por lo tanto, la variable deslizante σ_{2i} y la variable \bar{v}_{3i} convergen a cero en tiempo finito.

Dada la convergencia de σ_{2i} a cero. Es posible expresar e_{3i} de acuerdo a (12) como:

$$e_{3i} = \arcsin(f(e_{2i})). \quad (20)$$

Entonces, dada la convergencia de las variables deslizantes a cero el segundo error de formación (8) se expresa como:

$$\begin{aligned} \dot{e}_{2_i} = & \frac{\Sigma S}{N_i} \cos(e_{3_i}) + \frac{\Sigma C}{N_i} \sin(e_{3_i}) \\ & + \frac{\Sigma S_d}{N_i} \cos(e_{3_i}) + \frac{\Sigma C_d}{N_i} \sin(e_{3_i}). \end{aligned} \quad (21)$$

Análisis de estabilidad de e_{2_i} cuando $e_{1_i} \rightarrow 0$: Para probar la estabilidad del segundo error de formación, una vez que el primer error de formación ha convergido a cero, y considerando $|e_{2_i}| \leq \frac{\delta_1}{\delta_2}$, se propone la función candidata de Lyapunov $V_{e_{2_i}} = \frac{1}{2}e_{2_i}^2$.

La derivada temporal de $V_{e_{2_i}}$, sustituyendo (20) en (21), está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{e_{2_i}} = & e_{2_i} \frac{\Sigma S}{N_i} \sqrt{1 - \delta_2^2 e_{2_i}^2} - \frac{\delta_2 e_{2_i}^2 \Sigma C}{N_i} \\ & + e_{2_i} \frac{\Sigma S_d}{N_i} \sqrt{1 - \delta_2^2 e_{2_i}^2} - \frac{\delta_2 e_{2_i}^2 \Sigma C_d}{N_i}. \end{aligned} \quad (22)$$

Con el fin de acotar la función de Lyapunov (22), son utilizadas las desigualdades dadas en (2) y (5). Utilizando el hecho de que la función seno es impar, la derivada temporal de $V_{e_{2_i}}$ satisface la desigualdad $\dot{V}_{e_{2_i}} \leq -2\psi V_{e_{2_i}} + \xi$, donde $\psi := v_{L\min} \delta_2 (1 + d_{\min})$ y $\xi := \frac{\delta_1 v_{L\max}}{\delta_2} (1 + d_{\max}) \sqrt{1 - \delta_1^2}$.

Si δ_1 y δ_2 se escogen de acuerdo a (13), entonces la derivada será negativa para $|e_{2_i}| > \sqrt{\frac{\xi}{\psi}}$.

Así, el segundo error de formación e_{2_i} converge asintóticamente al conjunto compacto atractivo dado por:

$$\mathcal{C}_1 := \left\{ e_{2_i} \in \mathbb{R} : |e_{2_i}| \leq \sqrt{\frac{\xi}{\psi}}, \forall i = 1, \dots, n \right\}.$$

Análisis de estabilidad de e_{3_i} : Como consecuencia de la convergencia de e_{2_i} a la región \mathcal{C}_1 , entonces $|e_{3_i}| \leq \arcsin(\delta_2 |e_{2_i}|)$. Definiendo:

$$\mathcal{C}_2 := \left\{ e_{3_i} \in \mathbb{R} : |e_{3_i}| \leq \arcsin \left(\delta_2 \sqrt{\frac{\xi}{\psi}} \right), \forall i = 1, \dots, n \right\}.$$

Se observa que si $|e_{2_i}| \rightarrow \mathcal{C}_1$, entonces $|e_{3_i}| \rightarrow \mathcal{C}_2$, en otras palabras, el tercer error de formación converge a la región \mathcal{C}_2 .

■

Observación 1. El uso de un control por MD convencionales, como en Díaz et al. (2023) produce una alta frecuencia de conmutación en las señales de control causada por el uso de funciones discontinuas, conocida como *chattering*, este comportamiento es atenuado utilizando el control super-twisting presentado en este artículo. Otra alternativa para garantizar la continuidad en la señal de control es utilizando un cuasi-modo deslizante, como en Díaz and Dávila (2023), pero en éste, las trayectorias son forzadas a moverse en una región alrededor del conjunto deslizante.

4. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Se considera un sistema multiagente conformado por RMU, cuatro agentes seguidores y un líder, modelados por la cinemática (1). Cada agente puede obtener información sólo de su vecindad. En la Figura 2 se aprecian el líder, etiquetado con la letra L, los seguidores, representados por los nodos 1 a 4, y las distancias relativas δ_{i_x} y δ_{i_y} entre cada par de agentes i, j .

El líder sigue una trayectoria arbitraria, que para fines de simulación, usa un control de seguimiento de trayectoria, extraído de Mera et al. (2020), y que le permite realizar la trayectoria de la Lemniscata de Gerono, parametrizada en el tiempo como $x_d(t) = b \cos(\omega_0 t)$, $y_d(t) = b \sin(2\omega_0 t)$, y $\theta_d(t) = \arctan\left(\frac{\dot{y}_d(t)}{\dot{x}_d(t)}\right)$, donde $b = 1$ y $\omega_0 = 0.28$ [rad/s].

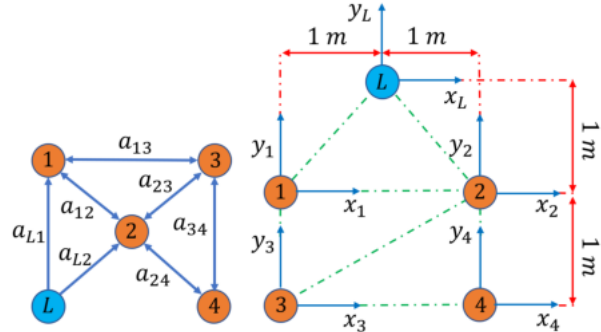


Figura 2. Grafo de Comunicación y Grafo de Formación.

El objetivo es que los agentes seguidores ejecuten la formación dada en la Figura 2 mientras siguen los movimientos del líder.

Utilizando la notación de (4), la postura inicial es establecida como $r_L = (0.9, -0.5, 1.2)$, $r_1 = (-0.1, -1.6, 1.4)$, $r_2 = (1.8, -1.5, 1.3)$, $r_3 = (-0.2, -2.2, 1.5)$ y $r_4 = (1.9, -2.3, 1.6)$. El grafo de comunicación $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ está compuesto por el conjunto de vértices $\mathcal{V} = \{L, 1, 2, 3, 4\}$, y el conjunto de aristas $\mathcal{E} = \{(L, 1), (L, 2), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$.

Se considera que los seguidores se controlan por la ley dada en el Teorema 1. Para las Suposiciones 1 y 2 los valores se establecen como $v_{L\max} = 0.7$ [m/s], $\omega_{L\max} = 1.6$ [rad/s], $\tilde{v}_{L\max} = 0.29$ [m/s²], $\tilde{\omega}_{L\max} = 0.9$ [rad/s²], $v_{L\min} = 0.35$ [m/s], $v_{\max} = 4$ [m/s], $\omega_{\max} = 3.5$ [rad/s], $\tilde{v}_{\max} = 0.8$ [m/s²] y $\tilde{\omega}_{\max} = 2.4$ [rad/s²]. Las ganancias de control (13) están dadas por $\delta_1 = 0.1$ y $\delta_2 = 0.8$. Se escogen de esa forma para suavizar el comportamiento durante la convergencia. Los parámetros de control calculados de acuerdo a las cotas en (14)-(17) están dados como $g_1 = 18.87$, $g_2 = 0.58$, $g_3 = 25.48$, por lo que las siguientes matrices son factibles para las desigualdades lineales matriciales $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3 \leq 0$ con $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 184.07 & -28 \\ -28 & 7.90 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 303.99 & -38.84 \\ -38.84 & 9.20 \end{bmatrix}.$$

Con esto las ganancias del control son $k_1 = 6.23$, $k_2 = 18.97$, $k_3 = 7.23$ y $k_4 = 25.58$. Las perturbaciones son $d_{1_i} = a_i \cos(c_i t) + b_i$ y $d_{2_i} = a_i \sin(c_i t) + b_i$ para $i = L, 1, \dots, n$. Entonces, $a_L = 0.02$, $a_1 = 0.05$, $a_2 = -0.05$, $a_3 = -0.04$, $a_4 = 0.01$, $b_L = 0.02$, $b_1 = -0.02$, $b_2 = 0.05$, $b_3 = -0.05$, $b_4 = 0.03$, $c_L = c_1 = c_3 = 1$, $c_2 = 0.5$ y $c_4 = 2$. Por lo que las cotas están dadas como $d_{\max} = 0.1$, $\tilde{d}_{\max} = 0.8$ y $d_{\min} = -0.09$.

La Figura 3 muestra el comportamiento de las variables deslizantes. Nótese que ambas variables deslizantes convergen a cero en menos de 0.25s. En la Figura 4 se muestra la convergencia de los errores de formación una vez que las variables deslizantes han convergido. e_{1_i} converge en tiempo finito como consecuencia directa de la convergencia de σ_{1_i} . e_{2_i} converge asintóticamente a la región acotada \mathcal{C}_1 alrededor del origen, así como e_{3_i} converge asintóticamente a la región acotada \mathcal{C}_2 . Las señales proporcionadas por el control super-twisting son mostradas en la Figura 5. Note la ausencia de *chattering* en

ellas. Finalmente, en la Figura 6 se presenta la formación deseada de los agentes y el seguimiento de la posición del líder.

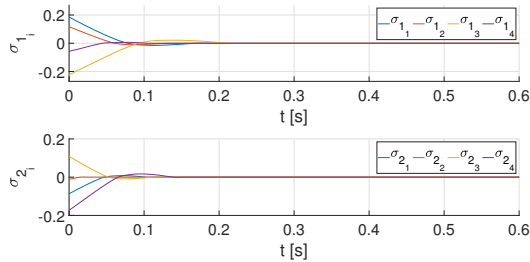


Figura 3. Variables Deslizantes (σ_{1i} y σ_{2i}).

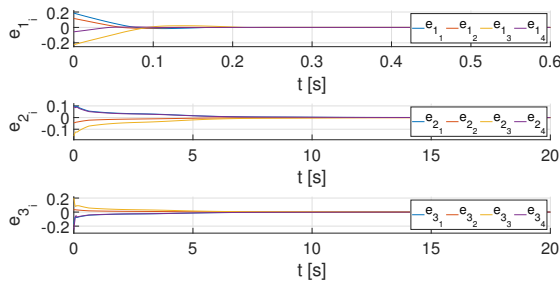


Figura 4. Errores de Formación (e_{1i} , e_{2i} y e_{3i}).

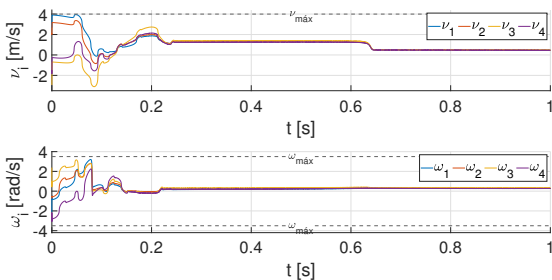


Figura 5. Señales de control ν_i y ω_i .

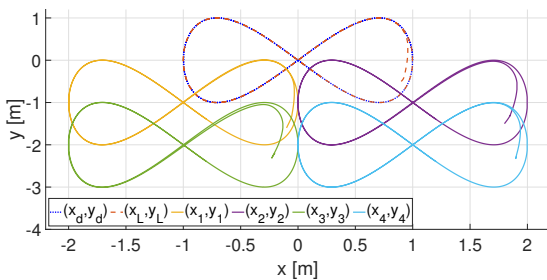


Figura 6. Trayectorias de Formación.

5. CONCLUSIONES

En este artículo se utiliza la técnica de control super-twisting para solucionar el problema de seguimiento en formación de múltiples RMU. Se garantiza la convergencia asintótica de los errores de formación a un conjunto compacto alrededor del origen mediante un diseño particular de las variables deslizantes y proporcionando una señal de control diferenciable. La simulación muestra que el control implementado es efectivo,

haciendo que los RMU puedan realizar el seguimiento en formación utilizando una señal de control continua.

REFERENCIAS

- Chen, C., Xing, Y., Djapic, V., and Dong, W. (2014). Distributed formation tracking control of multiple mobile robotic systems. 3695–3700. doi:10.1109/CDC.2014.7039964.
- Dai, Y., Kim, Y., Wee, S., Lee, D., and Lee, S. (2016). Symmetric caging formation for convex polygonal object transportation by multiple mobile robots based on fuzzy sliding mode control. *ISA Transactions*, 60, 321–332. doi:10.1016/j.isatra.2015.11.017.
- Díaz, Y., Dávila, J., and Mera, M. (2023). Leader-follower formation of unicycle mobile robots using sliding mode control. *IEEE Control Systems Letters*, 7, 883–888. doi:10.1109/LCSYS.2022.3227578.
- Díaz, Y. and Dávila, J. (2023). Leader-follower formation of unicycle mobile robots using quasi-sliding modes. *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático*, 6, 86–91. doi:10.58571/CNCA.AMCA.2023.016.
- Du, H., Wen, G., Yu, X., Li, S., and Chen, M. (2015). Finite-time consensus of multiple nonholonomic chained-form systems based on recursive distributed observer. *Automatica*, 62, 236–242. doi:10.1016/j.automatica.2015.09.026.
- Hernández-León, P., Dávila, J., Salazar, S., and Ping, X. (2020). Distance-based formation maneuvering of non-holonomic wheeled mobile robot multi-agent system. volume 53, 5665–5670. doi:10.1016/j.ifacol.2020.12.1588.
- Mera, M., Ríos, H., and Martínez, E.A. (2020). A sliding-mode based controller for trajectory tracking of perturbed unicycle mobile robots. *Control Engineering Practice*, 102, 104548. doi:10.1016/j.conengprac.2020.104548.
- Mesbahi, M. and Egerstedt, M. (2010). *Graph theoretic methods in multiagent networks*. Princeton University Press.
- Moreno, J.A. and Osorio, M. (2012). Strict Lyapunov functions for the super-twisting algorithm. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57, 1035–1040. doi:10.1109/TAC.2012.2186179.
- Moysiadis, V., Tsolakis, N., Katikaridis, D., Sørensen, C.G., Pearson, S., and Bochtis, D. (2020). Mobile robotics in agricultural operations: A narrative review on planning aspects. *Applied Sciences*, 10, 3453. doi:10.3390/app10103453.
- Rizk, Y., Awad, M., and Tunstel, E.W. (2018). Decision making in multiagent systems: A survey. *IEEE Transactions on Cognitive and Developmental Systems*, 10, 514–529. doi:10.1109/TCDS.2018.2840971.
- Rochel, P., Ríos, H., Mera, M., and Dzul, A. (2022). Trajectory tracking for uncertain unicycle mobile robots: A super-twisting approach. *Control Engineering Practice*, 122, 105078. doi:10.1016/j.conengprac.2022.105078.
- Savkin, A., Wang, C., Baranzadeh, A., Xi, Z., and Nguyen, H. (2016). Distributed formation building algorithms for groups of wheeled mobile robots. *Robotics and Autonomous Systems*, 75, 463–474. doi:10.1016/j.robot.2015.08.006.
- Yang, J., Xiao, F., and Chen, T. (2020). Event-triggered formation tracking control of nonholonomic mobile robots without velocity measurements. *Automatica*, 112. doi:10.1016/j.automatica.2019.108671.
- Zhang, D.W. and Liu, G.P. (2024). Predictive sliding-mode control for networked high-order fully actuated multiagents under random deception attacks. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 54, 484–496. doi:10.1109/TSMC.2023.3311438.