

# Bl-homogeneous observers for differentially uniformly observable LTV systems with a single output <sup>\*</sup>

René Meléndez-Pérez <sup>\*</sup> Jaime A. Moreno <sup>\*</sup>

*<sup>\*</sup> Coordinación de Eléctrica y Computación, Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México  
(e-mails: rmelendezpz@gmail.com, jmorenop@ingen.unam.mx).*

---

**Abstract:** This paper presents a methodology for the design of observers for a family of Linear Time Varying systems with a single output satisfying a differential uniform observability property. To address the problem, an immersion of the original system in a higher-dimensional state space is proposed, where a bl-homogeneity (homogeneity in the bi-limit) based state observer is designed with theoretically exact convergence in finite-time. Furthermore, it is shown that, according to the selection of a set of parameters and gains, the convergence is in fixed-time.

*Keywords:* Observers, homogeneity, linear systems, immersion.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Se han definido diversos tipos de observabilidad para sistemas Lineales Variantes en el Tiempo (LTV por sus siglas en inglés) por lo que estos conceptos pueden variar ligeramente de un autor a otro como se describe en Weiss (1965); Silverman and Meadows (1967). Se han estudiado condiciones para la reconstrucción de estados, y se han propuesto algunos observadores Nguyen and Lee (1985); Shafai and Carroll (1986); Trumpf (2007). En Zhang and Clavel (2001); Zhang (2002), se introduce un observador adaptativo para la estimación conjunta del estado y parámetros con un factor de olvido exponencial. En Trumpf (2007), se investigan condiciones suficientes para la existencia de observadores asintóticos. En Rotella and Zambettakis (2013) se presentan observadores funcionales para sistemas LTV, que permiten la reconstrucción de un función lineal a través de una estructura lineal convencional.

Para el diseño de observadores, a veces es útil transformar el sistema en una forma adecuada, lo que en general requiere propiedades más fuertes. Nguyen (1986); Shafai and Carroll (1986); Shieh et al. (1987) presentan un conjunto de estructuras canónicas, incluida una forma observable a bloques obtenida mediante transformaciones variantes en el tiempo para sistemas lexicográficamente fijos.

Este artículo está motivado por el hecho de que existe una clase de sistemas LTV que no se puede transformar

en una forma de observador u observabilidad mediante un difeomorfismo, pero se pueden sumergir en un sistema de dimensión mayor que resulta inmediato en una forma de observabilidad. La idea de producir inmersiones se ha utilizado para el diseño de observadores en sistemas no lineales. En Levine and Marino (1986) se proporciona una condición necesaria y suficiente para comprobar si un sistema no lineal puede sumergirse en uno lineal observable. Jouan (2003) considera el problema de la inmersión de sistemas no lineales SISO en uno lineal hasta una inyección de salida. Por otro lado, Back and Seo (2004) aborda la cuestión de cuándo un sistema no lineal puede sumergirse en un sistema no lineal de orden superior en una forma canónica de observador. En el caso de sistemas lineales variantes en el tiempo, Li and Duan (2017) introducen un sistema aumentado cuya observabilidad y salida son consistentes con el original en el caso de que la dimensión del sistema sea igual al producto del índice de observabilidad por el número de salidas. Basándose en los resultados de Nguyen (1986), Chai et al. (1991) propone una metodología para la estimación asintótica de estados de sistemas no lexicográficamente fijos basada en una inmersión lineal tal que el sistema de dimensión aumentada es lexicográficamente fijo. Siguiendo esta idea, Valasek and Olgac (1995) adaptó esta técnica al problema de control por asignación de polos para sistemas LTV-MIMO.

Todos los trabajos anteriores consideran el problema de diseño de observadores con convergencia asintótica. Sin embargo, la convergencia en tiempo finito Bhat and Bernstein (2000) representa una ventaja importante en el control de sistemas, ya que permite reconstruir

---

<sup>\*</sup> Trabajo apoyado por PAPIIT-UNAM, México proyecto IN106323 y CONAHCyT, México, CVU 788369.

exactamente los estados y perturbaciones de un sistema dentro de un tiempo finito. La propiedad de *estabilidad en tiempo finito* permite separar el diseño y el análisis de estabilidad del observador del de un controlador por retroalimentación de estado no lineal, es decir, el controlador puede “encenderse” una vez que el observador haya convergido, por eso resulta necesario conocer una cota superior en el tiempo de convergencia finito. En este sentido, en Cruz-Zavala et al. (2011) se utilizó una noción más fuerte de estabilidad, estabilidad uniforme con respecto a la condición inicial.

El problema de la estabilización del sistema en un tiempo finito independiente de las condiciones iniciales fue estudiado por primera vez en Andrieu et al. (2008) a través de controladores bl-homogéneos (*homogéneos en el bi-límite*) y en Cruz-Zavala et al. (2010, 2011) para observadores y diferenciadores por modos deslizantes, respectivamente. Allí se proporciona un algoritmo basado en modos deslizantes bl-homogéneos cuyo tiempo de convergencia no depende de las condiciones iniciales. Polyakov (2012) extendió el diseño a controladores por retroalimentación, llamando a la propiedad *convergencia de tiempo fijo*. Cuando la cota del tiempo de asentamiento puede hacerse arbitrariamente pequeña a través de un conjunto de parámetros ajustables del sistema la propiedad se denomina *estabilidad en tiempo predefinido* Sánchez-Torres et al. (2018), Jiménez-Rodríguez et al. (2020).

Recientemente, los autores han presentado un observador en Meléndez-Pérez et al. (2024) para sistemas LTV con entradas desconocidas y una única salida, que son uniforme y fuertemente observables. Esto requiere que la matriz de observabilidad de orden  $n$  sea de rango completo para todos los tiempos, es decir, el sistema sin entrada desconocida es uniforme y diferencialmente observable. En este artículo consideramos sistemas LTV sin entradas desconocidas, pero relajamos la última condición permitiendo que la matriz de observabilidad sea de rango completo en todo tiempo para un orden  $q \geq n$ .

### 1.1 Contribución y estructura del artículo

El objetivo del artículo es presentar una metodología de diseño de observadores de estado para una familia de sistemas LTV que satisfacen una propiedad estructural de observabilidad diferencial uniforme, la cual esta caracterizada en términos del rango de una matriz de observabilidad extendida. Se propone una inmersión del sistema en un espacio de dimensión mayor tal que el sistema extendido obtenido es uniformemente observable. El observador, con propiedades de homogeneidad en el bi-límite converge de manera global y en tiempo finito, o mas aún, en tiempo fijo.

El documento esta dividido de la siguiente manera: en la Sección 2 se define formalmente el problema y se dan algunas definiciones y caracterizaciones relevantes para el estudio. En la Sección 3 se detalla el método para producir

la inmersión del sistema de orden  $n$  en un sistema de orden  $q \geq n$ . Posteriormente, en la Sección 4 se introduce la estructura del observador así como un breve apartado sobre el ajuste de ganancias y parámetros. Finalmente, en la Sección 5 se expone un sencillo ejemplo numérico.

## 2. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Considere el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u, \\ y &= c(t)x, \quad x(t_0) = x_0 \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $t \in [0, \infty)$  es la variable de tiempo continuo,  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado,  $y \in \mathbb{R}$  es la salida medida y  $u \in \mathbb{R}^m$  son entradas conocidas.  $A(t), B(t), c(t)$  son matrices continuas variantes en el tiempo de dimensiones apropiadas. Diremos que el sistema (1) es  $k$ -suave para algún número entero  $k$ , si las matrices  $A(t)$  y  $c(t)$  son  $(k-2)$ ,  $(k-1)$ -veces continuamente diferenciables, respectivamente. En este artículo se considera el caso más simple, sistemas con una sola salida.

Los sistemas lineales variantes en el tiempo pueden ser observables de diferentes formas, por ejemplo:

**Definición 1.** En Silverman and Meadows (1967) se dice que el sistema (1) es

- (a) completamente observable en un intervalo  $\mathcal{J} = [t_0, t_f]$  si cualquier estado inicial  $x(t_0)$  puede determinarse a partir del conocimiento de la salida  $y(t)$  y la entrada  $u(t)$  sobre el intervalo completo  $\mathcal{J}$ .
- (b) diferencialmente (o totalmente) observable en  $\mathcal{J}$  si es completamente observable en cada subintervalo de  $\mathcal{J}$ .

Para sistemas  $k$ -suaves, las condiciones necesarias y suficientes para observabilidad diferencial son bien conocidas en términos de la *Matriz de observabilidad de orden  $k$* . Para algún entero positivo  $k \geq n$ , defina

$$\mathcal{O}_k(t) = \begin{bmatrix} N_0(t) \\ N_1(t) \\ \dots \\ N_{k-1}(t) \end{bmatrix}_{k \times n}, \quad (2)$$

$$N_0(t) = c(t)$$

$$N_1(t) = N_0(t)A(t) + \frac{d}{dt}N_0(t) = c(t)A(t) + \dot{c}(t) \quad (3)$$

$$N_j(t) = N_{j-1}(t)A(t) + \frac{d}{dt}N_{j-1}(t), \quad j = 1, 2, \dots$$

Suponga que el sistema (1) es  $n$ -suave, de Silverman and Meadows (1967)[Teoremas 5,6] se tiene que

- O1) Si existe un  $t_1 \in \mathcal{J}$  tal que la matriz  $n \times n$   $\mathcal{O}_n(t_1)$  tiene rango  $n$ , entonces el sistema (1) es *completamente observable* en  $\mathcal{J}$ .
- O2)  $\mathcal{O}_n(t)$  tiene rango  $n$  en un conjunto de puntos denso en todas partes en  $\mathcal{J}$  si y sólo si el sistema (1) es *diferencialmente observable* en  $\mathcal{J}$ .

Cuando  $A(t), c(t)$  son *analíticos* la distinción entre observabilidad completa y diferencial desaparece (Silverman and Meadows, 1967, Corolario 2):

O3)  $\mathcal{O}_n(t)$  tiene rango  $n$  en todos los puntos del intervalo  $\mathcal{J}$ , excepto posiblemente en un número finito de puntos sobre cada subintervalo finito, si y solo si el sistema (1) es *completamente observable* en  $\mathcal{J}$ .

Para sistemas lineales invariantes en el tiempo es una consecuencia del teorema de Cayley-Hamilton que  $\text{rank } \mathcal{O}_k = \text{rank } \mathcal{O}_n$  para toda  $k \geq n$ , de modo que no tiene sentido considerar  $k > n$ . Sin embargo, esto no es cierto para sistemas lineales variantes en el tiempo, pues en este caso el teorema de Cayley-Hamilton no es válido. Lo que conduce a condiciones que generalizan O1) y O3) de la siguiente manera

O4) Si existe  $t_1 \in \mathcal{J}$  y un entero no negativo  $q$  tal que el sistema (1) sea  $q$ -suave y la matriz de observabilidad  $\mathcal{O}_q(t_1)$  de dimensiones  $q \times n$  tiene rango  $n$ , entonces (1) es *completamente observable* en  $\mathcal{J}$ , Sontag (1998); Kamen (2010).

O5) Supongamos que  $A(t), c(t)$  son matrices analíticas en  $\mathcal{J}$ , y sea  $t_1$  cualquier elemento arbitrario en el intervalo. Entonces (1) es *totalmente observable* en  $\mathcal{J}$  si y sólo si  $\mathcal{O}_q(t_1)$  tiene rango  $n$  para algún entero  $q$ , Sontag (1998).

Esto supone que para sistemas LTV tiene sentido considerar una clase más amplia de sistemas observables.

**Definición 2.** Suponga que para algún entero positivo  $q$ , el sistema (1) es  $q$ -suave. Entonces (1) se dice Uniforme y Diferencialmente Observable (DUO, por sus siglas en ingles) en un intervalo de tiempo  $\mathcal{J}$  si la matriz de observabilidad  $\mathcal{O}_q(t)$  tiene rango  $n$  para todo  $t \in \mathcal{J}$ .

De O5) se deduce que los sistemas analíticos en un intervalo acotado  $\mathcal{J}$  o con matrices periódicas  $A(t), c(t)$  son completamente observables si y solo si son DUO.

Esta propiedad se puede comprobar fácilmente ya que es equivalente a que la matriz  $\dot{\mathcal{O}}_q^T(t)\mathcal{O}_q(t)$  sea regular para todo  $t \in \mathcal{J}$ , es decir

$$d(t) \triangleq \det\{\mathcal{O}_q^T(t)\mathcal{O}_q(t)\} \neq 0, \quad \forall t \in \mathcal{J} \quad (4)$$

Adicionalmente, para el diseño del observador se necesitara que  $d(t)$  esté alejado de cero, es decir,  $|d(t)| > \epsilon > 0$ .

### 3. INMERSIÓN DEL SISTEMA

Note que para sistemas DUO con  $q > n$  la matriz  $\mathcal{O}_q(t)$  no corresponde a un difeomorfismo, y el diseño de observadores propuesto en Moreno (2022, 2023); Meléndez-Pérez et al. (2024) no se puede utilizar. En esta sección ampliamos el diseño de observadores a sistemas DUO generales mediante el uso de una inmersión. Las inmersiones se han utilizado en el diseño de observadores para sistemas no lineales Levine and Marino (1986); Jouan (2003) y para sistemas LTV en Chai et al. (1991). En el presente trabajo se propone un método más simple que en Chai et al. (1991) donde la inmersión es difícil de lograr. Además, en Chai et al. (1991) se proponen observadores asintóticamente estables, aquí se obtienen observadores con convergencia en tiempo finito.

**Lema 1.** Suponga que el sistema (1) es DUO, con  $q \geq n$ . Usando (3) se deduce que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{O}_q(t) = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}N_0 \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}N_i \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}N_{q-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_{i+1} \\ \vdots \\ N_q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_0A \\ \vdots \\ N_iA \\ \vdots \\ N_{q-1}A \end{bmatrix}.$$

Por la propiedad DUO existen funciones  $\gamma_i(t) \in \mathbb{R}$  tales que  $N_q(t) = \sum_{i=0}^{q-1} \gamma_i(t)N_i(t)$  y por lo tanto

$$\dot{\mathcal{O}}_q(t) = \mathcal{A}_o(t)\mathcal{O}_q(t) - \mathcal{O}_q(t)A(t), \quad (5)$$

donde

$$\mathcal{A}_o(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \gamma_0(t) & \gamma_1(t) & \gamma_2(t) & \dots & \gamma_{q-1}(t) \end{bmatrix}_{q \times q}$$

es una matriz de acompañamiento. Por lo tanto, DUO implica que la matriz de observabilidad  $\mathcal{O}_q(t)$  satisface la ecuación Diferencial de Sylvester (5).

De este resultado se tiene que las trayectorias del sistema  $n$ -dimensional (1) están inmersas en el sistema  $q$ -dimensional:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \mathcal{A}_o(t)\bar{x} + B_o(t)u \\ \psi &= c_o(t)\bar{x}, \end{aligned} \quad (6)$$

donde  $B_o(t) \triangleq \mathcal{O}_q(t)B(t)$  y  $c_o(t) = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$ .

Esto se comprueba al observar que si  $x(t)$  es una solución de (1), el mapeo

$$\bar{x} = \mathcal{O}_q(t)x, \quad (7)$$

con  $\bar{x} \in \mathbb{R}^q$ , implica que  $\bar{x}(t)$  es una solución de

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \dot{\mathcal{O}}_q(t)x + \mathcal{O}_q(t)\dot{x} \\ &= [\dot{\mathcal{O}}_q(t) + \mathcal{O}_q(t)A(t)]x + \mathcal{O}_q(t)B(t)u \\ &= \mathcal{A}_o(t)\mathcal{O}_q(t)x + \mathcal{O}_q(t)B(t)u \end{aligned}$$

para una condición inicial  $\bar{x}(t_0) = \mathcal{O}_q(t_0)x(t_0)$ . Además, para esta condición inicial las salidas  $y(t)$  y  $\psi(t)$  coinciden, es decir  $\psi(t) = y(t)$  para  $t \geq t_0$ , ya que  $c(t) = c_o(t)\mathcal{O}_q(t)$ .

Note que el sistema (6) está en la forma normal de observabilidad, cuya matriz de observabilidad  $\tilde{\mathcal{O}}_q = \mathbb{I}_q$ , y es por lo tanto DUO. Cuando  $q > n$ , el sistema extendido (6) vive en un espacio de estados de dimensión mayor y por lo tanto, tiene un conjunto de trayectorias más grande que el sistema original (1) pero “contiene” las trayectorias de (1). Esto significa que la trayectoria de estado  $\varphi(t, t_0, x(t_0))$  de (1) corresponde con la trayectoria de estado  $\varphi_E(t, t_0, \bar{x}(t_0))$  de (6) cuando  $\bar{x}(t_0) = \mathcal{O}_q(t_0)x(t_0)$ , es decir

$$\varphi_E(t, t_0, \mathcal{O}_q(t_0)x(t_0)) = \mathcal{O}_q(t)\varphi(t, t_0, x(t_0)), \quad \forall t \geq t_0.$$

Debido a la observabilidad de ambos sistemas, si las señales de salida son iguales, las trayectorias de estado de ambos sistemas se corresponden entre sí. Esto implica que

se puede utilizar un observador en el sistema extendido (6) para estimar los estados de (1). Esto es, dada una estimación  $\hat{x}(t)$  de  $\bar{x}(t)$  obtenemos una estimación  $\hat{x}(t)$  de  $x(t)$  a través de la proyección

$$\hat{x}(t) = (\mathcal{O}_q^T(t)\mathcal{O}_q(t))^{-1} \mathcal{O}_q^T(t)\hat{\bar{x}}(t). \quad (8)$$

Además, es claro que esta forma de extender el sistema no es única, pues cualquier sistema extendido equivalente a (6) es también una extensión para (1).

#### 4. OBSERVADOR

**Suposición 1.** Las matrices  $A(t), c(t)$  son  $(q-2), (q-1)$ -veces continuamente diferenciables en el intervalo  $\mathcal{J} = [t_0, \infty)$ , respectivamente. Las matrices y sus derivadas son uniformemente acotadas y existen  $0 < \epsilon_1 \leq \epsilon_2 < \infty$  tales que para todo  $t \geq t_0$ ,  $\epsilon_1 \leq \|\mathcal{O}_q(t)\| \leq \epsilon_2$ .

La Suposición 1 asegura que los coeficientes  $\gamma_i(t)$  son uniformemente acotados. Un observador de estados para (6) esta dado por

$$\Omega : \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \mathcal{A}_o(t)\hat{x} + B_o(t)u - K\Phi(e_\psi), \\ \hat{x}(t) = (\mathcal{O}_q^T(t)\mathcal{O}_q(t))^{-1} \mathcal{O}_q^T(t)\hat{\bar{x}}(t) \\ \hat{\psi} = c_o(t)\hat{x} \\ e_\psi = \hat{\psi} - y \end{cases} \quad (9)$$

con una matriz de ganancias

$$K = \text{diag}(k_1L, k_2L^2, \dots, k_qL^q)$$

donde  $\text{diag}(\cdot)$  es una matriz diagonal,  $\Phi(\cdot)$  es un vector de términos de corrección

$$\Phi(e_y) = [\tilde{\phi}_1(e_y) \tilde{\phi}_2(e_y) \dots \tilde{\phi}_q(e_y)]^T,$$

cuyos términos no lineales  $\tilde{\phi}_i(\cdot)$ ,  $i = 1, \dots, q$  se obtienen de las funciones

$$\phi_i(s) = \kappa_i [s]_{r_{0,1}}^{r_{0,i+1}} + \theta_i [s]_{r_{\infty,1}}^{r_{\infty,i+1}} \quad (10)$$

escalando las ganancias internas  $\kappa_i > 0, \theta_i > 0$  por

$$\kappa_i \rightarrow \left(\frac{L^q}{\alpha}\right)_{r_{0,1}}^{j d_0} \kappa_i, \quad \theta_i \rightarrow \left(\frac{L^q}{\alpha}\right)_{r_{\infty,1}}^{j d_\infty} \theta_i \quad (11)$$

donde  $(\cdot) \rightarrow (\cdot)$  significa la sustitución del primer valor por el segundo.  $k_i > 0$  se denominan ganancias externas y  $L > 1, \alpha > 1$  son ganancias de ajuste. Para  $i = 1, \dots, q$  las potencias

$$r_{0,i} = r_{0,i+1} - d_0 = 1 - (q-j)d_0, \\ r_{\infty,i} = r_{\infty,i+1} - d_\infty = 1 - (q-j)d_\infty$$

están completamente definidas por los parámetros  $d_0, d_\infty$ , que deben satisfacer

$$-1 \leq d_0 \leq d_\infty < \frac{1}{q-1}. \quad (12)$$

Dado que (9) puede tener un lado derecho discontinuo, las soluciones deben entenderse en el sentido de Filippov (1988).

Una vez estimados los estados de (6) a través del observador (9) los estados del sistema original (1) pueden recuperarse mediante la proyección (8).

#### 4.1 Selección de ganancias

Los valores de  $d_0$  y  $d_\infty$  corresponden a los grados de homogeneidad del observador en el bi-límite y deben seleccionarse de acuerdo a (12). Si se desea que (en ausencia de ruido de medición) el error de estimación converja a cero en tiempo finito, elija  $-1 \leq d_0 < 0$ . Si se busca convergencia en tiempo fijo, establezca  $d_\infty > 0$ ; de lo contrario,  $d_\infty = 0$  es aceptable. Las demás ganancias en el observador tienen un papel claro e intuitivo en la sintonización. Sea  $i = 1, \dots, q$ .

- (i) Las ganancias internas  $\kappa_i > 0, \theta_i > 0$  se seleccionan libremente y corresponden a la ponderación deseada de cada término de bajo y alto grado en  $\phi_i$ .
- (ii) Se seleccionan ganancias externas  $k_i > 0$  que establezcan al observador con  $\gamma_j(t) = 0, j = 0, \dots, q-1$ . Ver Moreno (2022).
- (iii) La ganancia de ajuste  $L > 0$  aumenta ( $L > 1$ ) o disminuye ( $L < 1$ ) la velocidad de convergencia.
- (iv)  $\alpha$  se ajusta igual a 1.

#### 4.2 Resultado principal

Los resultados obtenidos hasta este punto se pueden resumir de la siguiente manera:

**Lema 2.** Suponga que el sistema (1) es DUO y satisface la Suposición 1. Bajo estas condiciones se puede construir la inmersión (6) y un observador cualquiera para este sistema es un observador para (1) usando la salida (8) con las mismas propiedades de convergencia que para el sistema extendido.

De acuerdo a este Lema 2 se puede entonces enunciar el resultado principal de este artículo.

**Teorema 1.** Dadas  $d_0, d_\infty$  arbitrarios que satisfacen (12) y ganancias internas  $\kappa_i > 0, \theta_i > 0, i = 1, \dots, q$ , (9) es un observador de estado global para el sistema extendido (6) y por lo tanto para (1).

A partir del resultado principal de Meléndez-Pérez et al. (2024) se puede demostrar este Teorema, es decir, existen ganancias apropiadas  $k_i > 0$ , y  $L > 0, \alpha > 0$  suficientemente grandes, tales que las trayectorias del observador (9) convergen global y asintóticamente a los estados verdaderos de (6), esto es,  $\hat{\bar{x}}_i(t) \rightarrow \bar{x}_i(t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . En particular, el origen  $\bar{e} = 0$  de la dinámica del error de estimación  $\bar{e} = \hat{\bar{x}} - \bar{x}$  es global y

- (1) exponencialmente estable si  $d_0 = 0, d_\infty = 0$ ,
- (2) estable en tiempo finito si  $-1 \leq d_0 < 0$ ,
- (3) estable en tiempo fijo si  $-1 \leq d_0 < 0 < d_\infty$

Estabilidad de tiempo fijo significa que  $\bar{e} = 0$  es globalmente estable en tiempo finito y la función del tiempo de asentamiento  $T(\bar{e}(t_0))$  está globalmente acotado por una constante positiva  $\bar{T}$ , independiente del error inicial  $\bar{e}(t_0)$ , es decir,  $\exists \bar{T} \in \mathbb{R}_{>0}$  tal que para todo  $\bar{e}(t_0) \in \mathbb{R}^q, T(\bar{e}(t_0)) \leq \bar{T}$ .  $T(\cdot)$  es continua en cero y acotada localmente. Además, para un conjunto parámetros y ganancias del observador y  $L = \bar{L}$  tales

que el observador sea asintóticamente estable, existe un tiempo fijo  $\tau > 0$  y el valor de  $\bar{T}$  satisface

$$\bar{T} \leq \frac{\tau}{L - \bar{L}}. \quad (13)$$

Esto significa que cualquier tiempo de convergencia arbitrariamente pequeño se puede lograr seleccionando un valor suficientemente grande de  $L$ .

Note que cuando  $d_0 = d_\infty = 0$  se obtiene un observador lineal, cuando  $-1 < d_0$  se tiene un observador continuo y en el caso especial  $d_0 = -1$  se produce un *modo deslizante de alto orden* en la aproximación en 0 del observador, lo que permitiría compensar el efecto de una entrada desconocida al sistema (esto es parte del trabajo actual de los autores).

**Observación 1.** Cuando la señal de salida del sistema  $y(t)$  contiene ruido de medición esencialmente no es posible estimar de manera exacta los estados del sistema, pero se puede probar que si se cumple la Suposición 1 y se tienen ganancias de estabilización  $k_i$ ,  $i = 1, \dots, q$  para el observador (9) entonces la dinámica que describe el error de estimación es estable entrada a estado con respecto al ruido  $v(t)$  como entrada al sistema si los grados de homogeneidad satisfacen (12). Ver Moreno (2022).

## 5. EJEMPLO NUMÉRICO

Considere el sistema (1) con

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & \cos(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c(t) = [1 \ 0].$$

$\mathcal{O}_n(t)$  esta dada por

$$\mathcal{O}_2(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos(t) \end{bmatrix}.$$

Ya que  $\text{rank } \mathcal{O}_2(t) = 2$  para todo  $t$ , excepto en los puntos  $t = \frac{(2i+1)\pi}{2}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , el sistema es diferencialmente observable pero no es *uniformemente observable*. Sin embargo, para  $q = 3$  la matriz de observabilidad

$$\mathcal{O}_3(t) = \begin{bmatrix} N_0 \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos(t) \\ 0 & -\sin(t) \end{bmatrix} \quad (14)$$

tiene rango 2 para todo  $t$ . Luego, por dependencia lineal de las filas previas se tiene que

$$N_3 = -N_1$$

entonces, de acuerdo a (6) se obtiene el sistema extendido

$$\mathcal{A}_o(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad c_o(t) = [1 \ 0 \ 0], \quad B_o(t) = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix}.$$

Se propone entonces un observador como en (9) cuyos términos de corrección están dados por

$$\tilde{\phi}_i(e_y) \underset{i=1,2,3}{=} \left(\frac{L^i}{\alpha}\right)^{\frac{id_0}{1-2d_0}} \kappa_i [e_y]^{\frac{1-(2-i)d_0}{1-2d_0}} + \left(\frac{L^i}{\alpha}\right)^{\frac{id_\infty}{1-2d_\infty}} \theta_i [e_y]^{\frac{1-(2-i)d_\infty}{1-2d_\infty}}, \quad (15)$$

con parámetros y ganancias seleccionados como sigue

$$d_0 = -\frac{1}{2}, d_\infty = \frac{1}{6}, k_1 = 3, k_2 = 1.5\sqrt{3}, k_3 = 1.1, \\ \kappa_i = \theta_i = 1, i = 1, 2, 3, \quad L = 5, \alpha = 1.$$

Los estados en coordenadas originales se recuperan de (8),

$$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & -\sin(t) \end{bmatrix} \hat{\hat{x}}(t), \quad (16)$$

Las Figuras 1(a), 1(b) muestran la estimación exacta de los estados  $x_1(t), x_2(t)$ , respectivamente. De acuerdo a la selección de  $d_0, d_\infty$  el observador converge en tiempo fijo. Para ilustrarlo, defina el error de estimación como  $e = \hat{x} - x$ . La figura 1(c) muestra la convergencia del error para errores iniciales  $e_0 = e(t_0)$  con seis órdenes de magnitud. Ya que la velocidad de convergencia se puede incrementar aumentando el valor de  $L$ , la figura 1(d) muestra que cuanto mas grande es  $L$ , menor es la cota superior en el tiempo de convergencia. Todas las simulaciones se obtuvieron utilizando un método de integración de Euler con un tamaño de paso  $\tau = 1 \times 10^{-5}$  s.

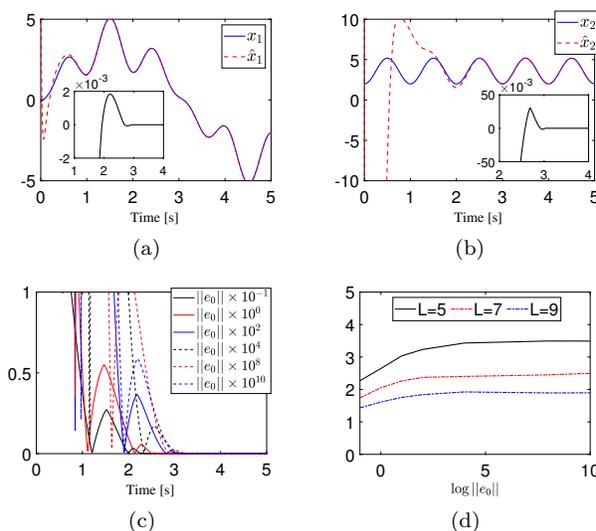


Fig. 1. Estimación del estado. (a)  $x_1(t)$ , (b)  $x_2(t)$ , (c)  $\|e(t)\|$  para diferentes  $e_0$  con  $L = 5$ , (d) Tiempo de convergencia versus logaritmo de  $\|e_0\|$  para diferentes valores de  $L$ .

## 6. CONCLUSIONES

Se presentó una metodología para el diseño de observadores en sistemas lineales variantes en el tiempo con una sola salida, la familia de sistemas que se puede abordar no cumple con la definición clásica de observabilidad uniforme en términos de la matriz de observabilidad pues se necesitan mas de  $n-1$  derivadas de la salida para obtener  $n$  filas linealmente independientes en todo  $t$ . En este sentido se introduce el concepto de *observabilidad diferencial uniforme* (DUO) y se muestra que la matriz de observabilidad extendida de un sistema DUO satisface una ecuación diferencial de Sylvester;

que permite construir una inmersión del sistema en un espacio de estado de dimensión aumentada donde el sistema obtenido esta en una forma de observabilidad. Se diseña un observador basado en bi-homogeneidad con convergencia teóricamente exacta en tiempo finito, o mas aún, en tiempo fijo. Los estados originales se recuperan a través de una matriz pseudoinversa.

## REFERENCES

- Andrieu, V., Praly, L., and Astolfi, A. (2008). Homogeneous approximation, recursive observer design, and output feedback. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 47(4), 1814–1850.
- Back, J. and Seo, J.H. (2004). Immersion of non-linear systems into linear systems up to output injection: Characteristic equation approach. *International Journal of Control*, 77(8), 723–734.
- Bhat, S.P. and Bernstein, D.S. (2000). Finite-time stability of continuous autonomous systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38(3), 751–766.
- Chai, W., Loh, N.K., and Hu, H. (1991). Observer design for time-varying systems. *International Journal of Systems Science*, 22(7), 1177–1196.
- Cruz-Zavala, E., Moreno, J.A., and Fridman, L. (2010). Uniform second-order sliding mode observer for mechanical systems. In *2010 11th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, 14–19.
- Cruz-Zavala, E., Moreno, J.A., and Fridman, L.M. (2011). Uniform robust exact differentiator. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(11), 2727–2733.
- Filippov, A.F. (1988). *Differential Equations with Discontinuous Righthand Side*, volume 18. Springer Science & Business Media.
- Jiménez-Rodríguez, E., Muñoz-Vázquez, A.J., Sánchez-Torres, J.D., Defoort, M., and Loukianov, A.G. (2020). A lyapunov-like characterization of predefined-time stability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 65(11), 4922–4927.
- Jouan, P. (2003). Immersion of nonlinear systems into linear systems modulo output injection. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 41(6), 1756–1778.
- Kamen, E. (2010). Fundamentals of linear time-varying systems. In W.S. Levine (ed.), *Control system advanced methods*, 31 – 33. CRC Press.
- Levine, J. and Marino, R. (1986). Nonlinear system immersion, observers and finite-dimensional filters. *Systems & Control Letters*, 7(2), 133–142.
- Li, L.T. and Duan, G.R. (2017). Observer design for a class of linear time-varying systems. In *2017 36th Chinese Control Conference (CCC)*, 116–121.
- Meléndez-Pérez, R., Moreno, J.A., and Fridman, L. (2024). Bi-homogeneous sliding-mode observers for siso linear time-varying systems with an unknown input. *Journal of the Franklin Institute*, 361(4), 106647.
- Moreno, J.A. (2022). Arbitrary-order fixed-time differentiators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 67(3), 1543–1549.
- Moreno, J.A. (2023). High-order sliding-mode functional observers for multiple-input multiple-output (mimo) linear time-invariant systems with unknown inputs. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 33(15), 8844–8869.
- Nguyen, C.C. (1986). Canonical transformation for a class of time-varying multivariable systems. *International Journal of Control*, 43(4), 1061–1074.
- Nguyen, C. and Lee, T. (1985). Design of a state estimator for a class of time-varying multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30(2), 179–182.
- Polyakov, A. (2012). Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(8), 2106–2110.
- Rotella, F. and Zambettakis, I. (2013). On functional observers for linear time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(5), 1354–1360.
- Shafai, B. and Carroll, R. (1986). Minimal-order observer designs for linear time-varying multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31(8), 757–761.
- Shieh, L., Ganesan, S., and Navarro, J. (1987). Transformations of a class of time-varying multivariable control systems to block companion forms. *Computers & Mathematics with Applications*, 14(6), 471–477.
- Silverman, L.M. and Meadows, H.E. (1967). Controllability and observability in time-variable linear systems. *SIAM Journal on Control*, 5(1), 64–73.
- Sontag, E.D. (1998). *Mathematical control theory: deterministic finite dimensional systems (2nd ed.)*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Sánchez-Torres, J.D., Gómez-Gutiérrez, D., López, E., and Loukianov, A.G. (2018). A class of predefined-time stable dynamical systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 35(1), I1 – I29.
- Trumpf, J. (2007). Observers for linear time-varying systems. *Linear Algebra and its Applications*, 425(2).
- Valasek, M. and Olgac, N. (1995). Pole placement for mimo time-varying non-lexicographic-fixed linear systems. In *Proceedings of 1995 34th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 4, 4368–4373 vol.4.
- Weiss, L. (1965). The concepts of differential controllability and differential observability. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 10(2), 442–449.
- Zhang, Q. (2002). Adaptive observer for multiple-input-multiple-output (MIMO) linear time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(3), 525–529.
- Zhang, Q. and Clavel, A. (2001). Adaptive observer with exponential forgetting factor for linear time varying systems. In *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 4, 3886–3891 vol.4.