

Integral sliding mode controller with disturbance estimator for trajectory tracking in a class of electromechanical systems^{*}

Raúl Rascón Carmona^{*} Víctor Manuel Valenzuela Hanon^{*}
Francisco Javier Colado Basilio^{*} Luis Omar Moreno Ahedo^{*}
Eduardo Javier Moreno Valenzuela^{**}

^{*} *Facultad de Ingeniería Mexicali, Universidad Autónoma de Baja California, Blvd. Benito Juárez sin número, Mexicali, C.P. 21280, Baja California, México, (e-mail:*

raul.rascon{ernesto.rios.valenzuela,javiercolado}@uabc.edu.mx)

^{**} *Instituto Politécnico Nacional CITEDI, México, Av. Instituto Politécnico Nacional número 1310, Tijuana, C.P. 22435, Baja California, México, (e-mail: moreno@citedi.mx)*

Abstract: In this work, an alternative is proposed to solve the control problem for trajectory tracking, mainly applied to direct current motors. A discontinuous sliding mode controller is designed that is insensitive to parametric uncertainty and external disturbances, as long as certain conditions are met to avoid the reachability stage. On the other hand, a disturbance estimator is presented which is easy to implement and helps us to decrease the amplitude of the gain of the discontinuous term of the controller. Numerical simulations support the theoretical results, demonstrating a good performance of the proposed controller.

Keywords: Trajectory tracking, sliding mode control, switched systems control, design of nonlinear filters and observers.

1. INTRODUCCIÓN

El control por modos deslizantes es ampliamente conocido por su eficiente capacidad de respuesta y estabilidad, sobre todo en aplicaciones de sistemas electromecánicos Eker (2006); Sinekli and Coban (2017); Utkin et al. (2017), particularmente para resolver el problema de control de seguimiento de trayectorias donde es una elección muy popular Coban (2017); Sinekli and Coban (2017); Jafari et al. (2022). Una de las principales desventajas de este tipo de controladores es el fenómeno de chattering que produce desgaste en las partes mecánicas del sistema Utkin and Lee (2006)

Un controlador particular de modos deslizantes es el llamado, control por modos deslizantes integral Wang et al. (2020); Wei et al. (2020); Norsahperi and Danapalasingam (2020), el cual logra que las trayectorias eviten la etapa de alcanzabilidad, que es cuando el sistema en lazo cerrado es vulnerable ante incertidumbre paramétrica y perturbaciones externas. Este tipo de controladores ha sido comparado con el control por modos deslizantes Murtaza and Bhatti (2012) y se ha observado su buen desempeño gracias a su capacidad para reducir el chattering y los efectos de las perturbaciones Xu et al. (2022)

Algunos de los controladores por modos deslizantes nos permiten estimar o reconstruir las perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas aglomeradas al filtrar la señal de control equivalente a través de un filtro pasa bajas Tseng and Chen (2010); Gambhire et al. (2021). Hay trabajos previos donde se utilizan control por modos deslizantes integral y filtros, por ejemplo en Pan et al. (2017) se utiliza un filtro pasa bajas para suavizar la parte discontinua de la acción de control. En Basin et al. (2005) se desarrolla un controlador para sistemas lineales estocásticos con retardos con el fin de suprimir perturbaciones no gaussianas.

El trabajo está estructurado de la siguiente manera: En la segunda sección se describen las motivaciones que impulsan el desarrollo del trabajo. En la sección 3 se detalla el modelo que describe la dinámica del motor con el que se trabaja. La sección 4 desarrolla el diseño del controlador. En la sección 5 se realiza la estimación de las perturbaciones a través de un filtro pasa bajas. En la sección 6 se realizan las simulaciones numéricas del sistema en lazo cerrado en MatLab. La sección 7 resume las aportaciones y el futuro del trabajo.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La motivación para el desarrollo del algoritmo mostrado en las siguientes secciones es la siguiente:

^{*} Los autores agradecen el apoyo financiero a la Universidad Autónoma de Baja California beneficiados por la convocatoria interna de proyectos de investigación 2024-2025.

- (1) El diseño de un controlador para resolver el problema de seguimiento de trayectorias aplicado en sistemas de segundo orden, específicamente en motores.
- (2) El control integral por modos deslizantes tiene la particularidad de que en una implementación la variable deslizante puede arrancar siendo cero, esto implica que, las trayectorias del sistema en lazo cerrado pueden evitar la fase de alcanzabilidad, siendo ésta una de las principales ventajas de estos controladores. Durante esta fase el sistema en lazo cerrado es vulnerable ante incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas. Por otra parte, una posible desventaja en este tipo de controladores es que la acción de control es discontinua y la ganancia de la función signo tiene que ser lo suficientemente 'grande' para compensar un conglomerado de perturbaciones. Nuestra propuesta radica en proponer un estimador de perturbaciones tal que, se pueda reducir la amplitud de la parte discontinua del controlador, con la finalidad de hacer este tipo de controladores más asequible en aplicaciones que involucren motores.

3. MODELO DINÁMICO

Las siguientes ecuaciones de estado describen la dinámica de la clase de sistemas mecánicos que se consideran en este trabajo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= f(x, y) + g(x, y)u + \omega(x, y, t)\end{aligned}\quad (1)$$

donde $f(x, y)$ y $g(x, y)$ son funciones no lineales, $\omega(x, t)$ es el término que involucra incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas, este término se asume como acotado superiormente por una constante $|\omega(x, y, t)| \leq L > 0$. Por citar un ejemplo, el modelo dinámico de un motor de corriente directa pueda encajar en las ecuaciones descritas por (1). Para el sistema (1) proponemos una estructura de control para compensar algunos términos de la siguiente manera

$$u = -g(x, y)^{-1} (f(x, y) - \tau - \ddot{x}_d), \quad (2)$$

donde τ es una segunda etapa del algoritmo de control, el resto de los términos son parámetros del sistema previamente conocidos y la doble derivada de la trayectoria deseada, la trayectoria deseada $x_d \in \mathcal{C}^2$ debe ser por lo menos dos veces diferenciable, estos parámetros son considerados conocidos y se utilizan para propósitos de compensación. Sustituyendo (2) en (1) obtenemos el sistema en lazo cerrado tal que

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \ddot{x}_d + \tau + \omega(x, y, t).\end{aligned}\quad (3)$$

Ahora vamos a reescribir el sistema (3) en función de los errores de seguimiento $e_1 = x_d - x$ y $e_2 = \dot{x}_d - \dot{x}$, quedándonos que,

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= -\tau - \omega(x, y, t),\end{aligned}\quad (4)$$

el sistema descrito por (4) tiene la estructura de un doble integrador.

4. DISEÑO DEL CONTROLADOR

Asumiremos que conocemos las condiciones iniciales del sistema (1), podemos lograr convergencia asintótica del error de seguimiento a través de separar la función de control τ en dos partes:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 \quad (5)$$

definamos cada parte del controlador donde,

- τ_1 nos ayuda a compensar perturbaciones aglomeradas, las cuales son acotadas y están dadas por $\varphi(x, y, t)$ dentro de la variable deslizante auxiliar, tal que el deslizamiento (o modo deslizante) empiece al instante, esto es, sin haber una etapa de alcanzabilidad.
- τ_2 dirige la variable deslizante a cero de manera asintótica.

La lógica de funcionamiento del controlador es la siguiente, primeramente las trayectorias del sistema en lazo cerrado e_1 y e_2 comienzan sobre la variable deslizante auxiliar s , a través de ésta, vamos a evitar la fase de alcanzabilidad donde la dinámica del sistema en lazo cerrado puede verse afectada por incertidumbre paramétrica y perturbaciones externas. Posteriormente las trayectorias convergen a la superficie deslizante σ de manera asintótica, finalmente una vez que $\sigma = 0$, los estados e_1 y e_2 convergen de manera también asintótica a cero.

4.1 Diseño de control τ_1

La variable deslizante auxiliar se diseña como

$$\begin{aligned}s &= \sigma - z \\ \dot{z} &= -\tau_2\end{aligned}\quad (6)$$

donde la superficie deslizante esta dada por

$$\sigma = e_2 + ce_1, \quad c > 0. \quad (7)$$

La dinámica de la variable deslizante auxiliar es

$$\begin{aligned}\dot{s} &= \dot{\sigma} - \dot{z} = \underbrace{-\omega(x, y, t) + ce_2}_{\varphi(x, y, t)} - (\tau_1 + \tau_2) + \tau_2 \\ &= \varphi(x, y, t) - \tau_1.\end{aligned}\quad (8)$$

Así el control por modos deslizantes τ_1 dirige a la variable deslizante auxiliar s a cero en tiempo finito, para lograr el objetivo dicho control se puede proponer como

$$\tau_1 = \rho \text{sign}(s), \quad (9)$$

de tal forma que la dinámica de s se dirige y converge a un modo deslizante auxiliar siempre y cuando se cumpla que:

$$\rho > |\varphi(x, y, t)| \leq M > 0. \quad (10)$$

4.2 Diseño de control τ_2

La dinámica tanto de la superficie deslizante σ como de la variable deslizante auxiliar s compensadas por el controlador τ_1 dado en (9) es

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= \varphi(x, y, t) - \tau_1 - \tau_2 \\ \dot{s} &= \varphi(x, y, t) - \tau_1, \quad \tau_1 = \rho \text{sign}(s),\end{aligned}\quad (11)$$

con el fin de describir la dinámica de la variable deslizante σ en el modo deslizante auxiliar ($s = 0$), tenemos que encontrar el control equivalente τ_{1eq} que satisface la condición $\dot{s} = 0$ y sustituirla en (11), tal que

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \varphi(x, y, t) - \tau_{1eq} = 0 \Rightarrow \tau_{1eq} = \varphi(x, y, t) \\ \dot{\sigma} &= \varphi(x, y, t) - \tau_{1eq} - \tau_2 \Rightarrow \dot{\sigma} = -\tau_2, \end{aligned} \quad (12)$$

a partir de (12) podemos proponer τ_2 como

$$\tau_2 = k\sigma, \quad k > 0 \quad (13)$$

por lo tanto aplicando el controlador (5), (9) y (13) la dinámica de σ es

$$\dot{\sigma} = -k\sigma, \quad \sigma(0) = \sigma_0, \quad (14)$$

donde la tasa de decaimiento exponencial aumenta al incrementar el valor de k . Ahora vamos a analizar como es que las trayectorias pueden comenzar sobre la superficie auxiliar en $s = 0$, sin pasar por la fase de alcanzabilidad, para ello forzaremos la condición inicial $s(0) = 0$ de (6), donde tenemos que

$$\begin{aligned} s(0) &= \sigma(0) - z(0) = 0 \Rightarrow z(0) = \sigma(0) \\ z(0) &= \dot{x}_d(0) + cx_d(0) - \dot{x}(0) - cx(0), \end{aligned} \quad (15)$$

por lo tanto las condiciones iniciales para la variable z dadas en (15) nos ayudan a evitar la etapa de alcanzabilidad, e iniciar en $s(0) = 0$, es decir ya con las trayectorias montadas sobre la superficie deslizante auxiliar.

5. ESTIMACIÓN DE LAS PERTURBACIONES AGLOMERADAS A TRAVÉS DE UN FILTRO

Con la finalidad de relajar la condición impuesta por (10) y así poder disminuir la amplitud de la ganancia ρ , que representa la parte discontinua del controlador (9), es que vamos a diseñar un estimador sencillo basándonos en la lógica del control equivalente y en lo planteado en Levant (1998); Shtessel et al. (2014). De (8) tenemos que,

$$\dot{s} = \varphi(x, y, t) - v_{eq} = 0, \quad (16)$$

por lo que podemos estimar $\varphi(x, y, t)$ como

$$\varphi(x, y, t) = v_{eq} \quad t \geq t_r, \quad (17)$$

donde t_r es el tiempo cuando la variable deslizante auxiliar se hace cero, esto es, $s = 0$, dado que con el controlador propuesto se puede evitar la fase de alcanzabilidad tenemos que $t_r = 0$; por lo que podemos reconstruir la perturbación aglomerada $\varphi(x, y, t)$ desde el principio del tiempo. La inyección equivalente v_{eq} se puede estimar a través de un filtro pasa bajas cuya entrada es la señal conmutada de alta frecuencia (9), tal que

$$T\dot{\hat{v}}_{eq} = -\hat{v}_{eq} + \rho \text{sign}(s), \quad (18)$$

donde $T \in \mathbb{R}^+$ es una constante de tiempo, quedándonos que

$$\varphi(x, y, t) \approx \hat{\varphi}(x, y, t) = \hat{v}_{eq}, \quad t \geq t_r = 0, \quad (19)$$

de esta manera logramos tener una estimación de las perturbaciones aglomeradas $\varphi(x, y, t)$, la cual puede implementarse en el subcontrolador τ_1 en (9) como

$$\tau_1 = \rho \text{sign}(s) + \hat{\varphi}(x, y, t), \quad (20)$$

6. SIMULACIÓN NUMÉRICA

6.1 Doble integrador

Ilustraremos los resultados teóricos del controlador y el estimador de perturbaciones a través de una simulación numérica en MatLab, para ello haremos una comparación del desempeño mostrando la diferencia entre utilizar y no utilizar el estimador propuesto. La planta que usaremos para realizar la comparación es un doble integrador para fines de prácticos, la cual es mostrada a continuación,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= u + \omega(x, y, t), \end{aligned} \quad (21)$$

para ello utilizaremos los parámetros mostrados en la Tabla 1,

Tabla 1. Parámetros del sistema en lazo cerrado

Parámetro	Valor	Unidades
$\omega(x, y, t)$	$\sin(2t)$	rad/s^2
ρ	1	rad/s^2
k	6	1/s
c	1	1/s
T	0.01	s

La trayectoria deseada de voltaje y su derivada están en la Tabla 2,

Tabla 2. Trayectoria deseada y su derivada

Parámetro	Valor	Unidades
x_d trayectoria deseada	$\sin(t)$	rad
\dot{x}_d velocidad deseada	$\cos(t)$	rad/s

la simulación numérica del sistema en lazo cerrado comprende, la planta que es un doble integrador mostrado en (21) con el controlador (2), (5), (9) y (13); por otra parte, la estimación de las perturbaciones aglomeradas $\hat{\varphi}(x, y, t)$ se obtiene de (18) y (19). Las condiciones iniciales del sistema, controlador y estimador son $(x(0), y(0), z(0), \hat{v}_{eq}(0)) \in (0, 0, 1, 0)^T$. Donde la condición inicial para $z(0)$ está dada por (15).

En la figura 1 vemos las posiciones x en radianes contra la trayectoria deseada x_d , podemos observar como la etapa del transitorio es casi imperceptible, esto se puede deber a que las trayectorias del sistema en lazo cerrado arrancan sobre la variable deslizante auxiliar, es decir en $s = 0$. Por otra parte, en la figura 2 vemos el error de seguimiento e_1 , podemos observar que no se logra el objetivo de control al utilizar el controlador sin estimador de perturbaciones, esto es porque no se cumple con la desigualdad mostrada en (10), en cambio al utilizar el controlador junto con el estimador de perturbaciones nos permite utilizar una ganancia ρ más pequeña y lograr el objetivo de control. Las velocidades y y velocidad deseada \dot{x}_d se puede observar en la figura 3, nótese que es evidente observar que al utilizar el control propuesto se obtienen mejores resultados. En la figura 4 podemos ver la variable deslizante auxiliar s que arranca siendo cero al utilizar el controlador con el estimador de perturbaciones, a su vez observamos como la variable deslizante σ se desvanece de

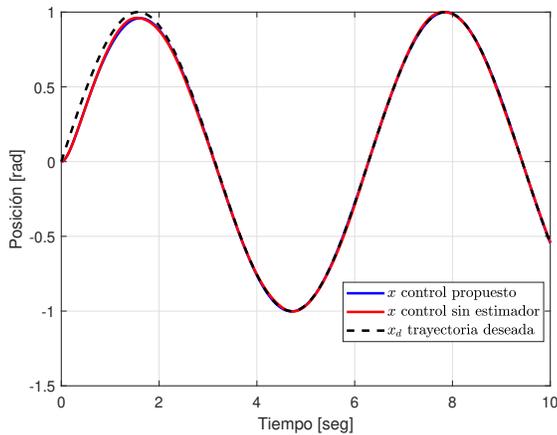


Fig. 1. Estado x vs trayectoria deseada x_d en el sistema de doble integrador

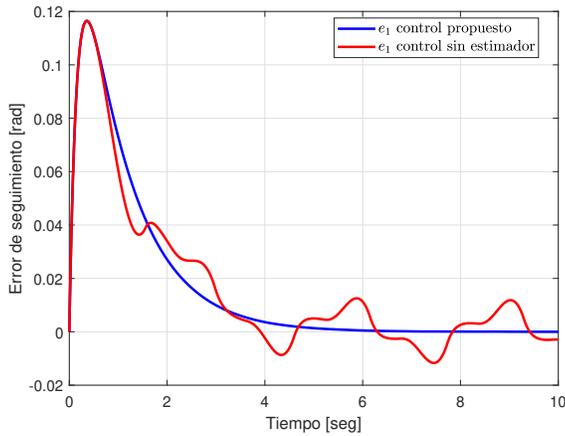


Fig. 2. Error de seguimiento de trayectoria e_1 en el sistema de doble integrador

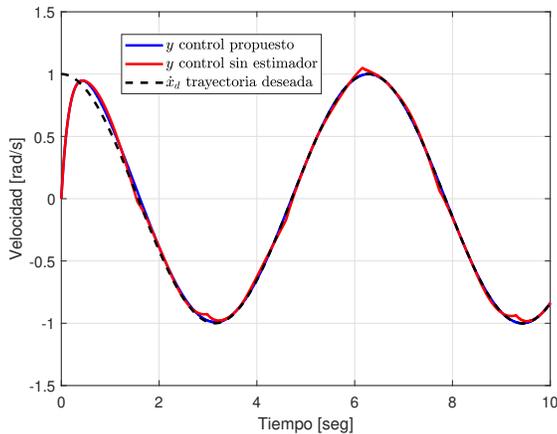


Fig. 3. Estado y vs derivada de la trayectoria deseada \dot{x}_d en el sistema de doble integrador

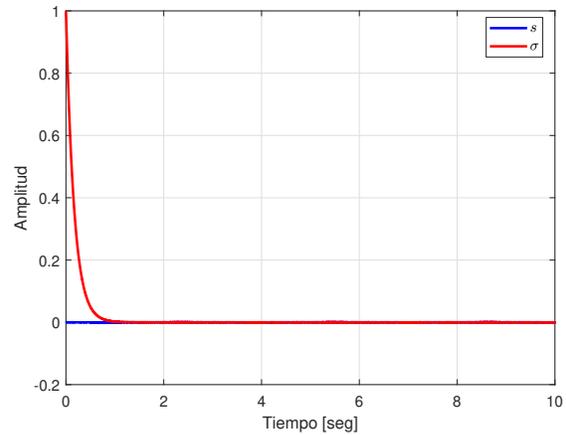


Fig. 4. Variable deslizando auxiliar s y variable deslizando σ en el sistema de doble integrador

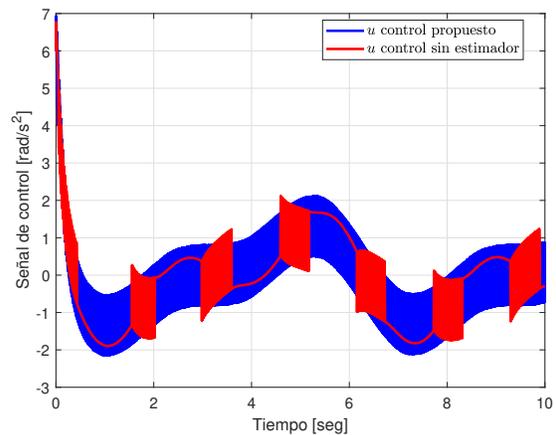


Fig. 5. Señal de control u en el sistema de doble integrador manera exponencial hacia cero. Finalmente, en la figura 5 podemos apreciar las dos señales de control, cuando utilizamos el control sin estimador de perturbaciones, vemos que en los momentos que la señal es suave y continua es cuando no se cumple con la desigualdad dada por (10), es decir las trayectorias se salen de la superficie deslizando auxiliar s y el sistema en lazo cerrado se vuelve vulnerable ante las perturbaciones aglomeradas.

6.2 Péndulo con motor de corriente directa

Ahora pondremos a prueba el controlador propuesto y el estimador de perturbaciones en un sistema electromecánico, el cual es un péndulo con un motor de corriente directa conectado a su base, el modelo dinámico está dado por

$$\left[J_m + \frac{J_L}{r^2} \right] \ddot{y} + \left[f_m + \frac{f_L}{r^2} + \frac{K_a K_b}{R_a} \right] \dot{y} + \frac{k_L}{r^2} \sin(x) = \frac{K_a}{r R_a} (v + w), \quad (22)$$

véase la figura 6 para una mejor referencia del péndulo conectado a un motor de corriente directa. Los parámetros del modelo dinámico están explicados en Kelly et al.

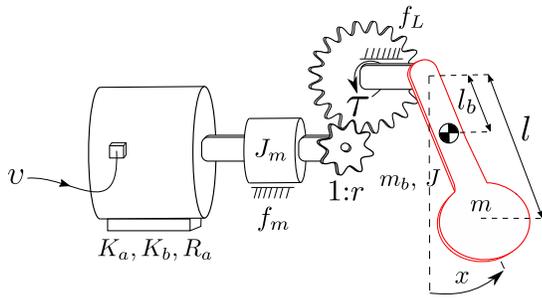


Fig. 6. Péndulo con un motor de corriente directa.

(2005) capítulo 3. En esta simulación numérica en Matlab, utilizaremos los parámetros mostrados en la Tabla 3,

Tabla 3. Parámetros de simulación del péndulo

Parámetro	Valor	Unidades
Parámetros de la planta		
$x(0)$	0.5	rad
$y(0)$	0	rad/s
$x_d(t)$	$\sin(t)$	rad
J	0.5	kg·m ²
m_b	0.1	kg
l_b	0.1	m
m	0.2	kg
l	0.3	m
g	9.81	m/s ²
f_l	5	N·m·s
J_m	0.9	kg m ²
K_a	500	N·m/A
R_a	5	Ω
K_b	3	V·s/rad
f_m	3	N·m
r	100	—
Perturbación externa		
$\omega(x, y, t)$	$0.1 \sin(2t)$	N·m
Ganancias del controlador y condición inicial		
$z(0)$	$\dot{x}_d(0) - \dot{x}(0) + c(x_d(0) - x(0))$	—
c	1	—
ρ	20	—
k	15	—
T	0.01	s

En la figura 7 vemos las posiciones x en radianes contra la trayectoria deseada x_d . Por otra parte, en la figura 8 vemos el error de seguimiento e_1 . Las velocidades y y velocidad deseada \dot{x}_d se puede observar en la figura 9. En la figura 10 podemos ver la variable deslizante auxiliar s que arranca siendo cero al utilizar el controlador con el estimador de perturbaciones, a su vez observamos como la variable deslizante σ se desvanece de manera exponencial hacia cero. Finalmente, en la figura 11 podemos apreciar la señal de control.

7. CONCLUSIONES

En este estudio se logra el objetivo de seguimiento de trayectoria de una señal de posición, este controlador fué diseñado para este trabajo pensado en aplicaciones de motores de corriente directa, aunque su aplicación se puede extender a diversos sistemas dinámicos. Aunque el controlador ya esta registrado previamente en la literatura Shtessel et al. (2014), en este trabajo se logra relajar

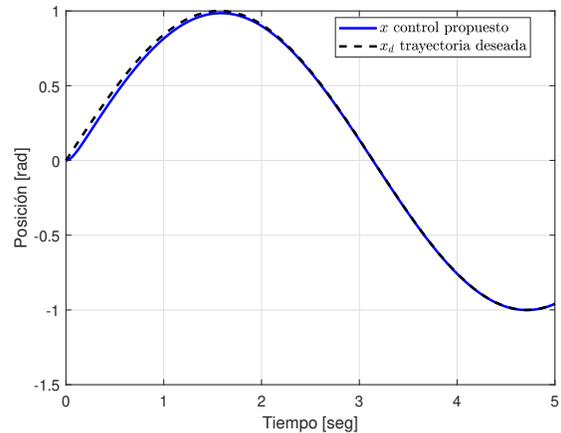


Fig. 7. Estado x vs trayectoria deseada x_d en el péndulo con motor

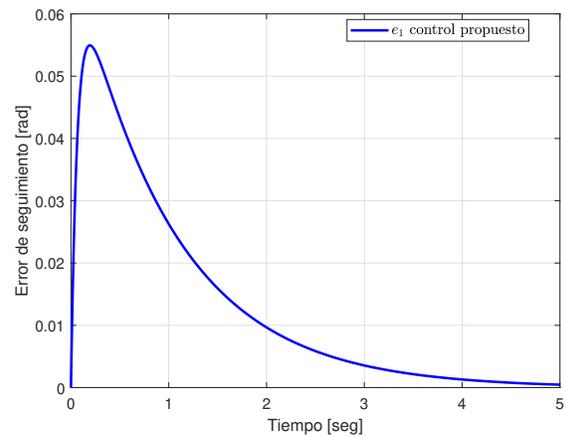


Fig. 8. Error de seguimiento de trayectoria e_1 en el péndulo con motor

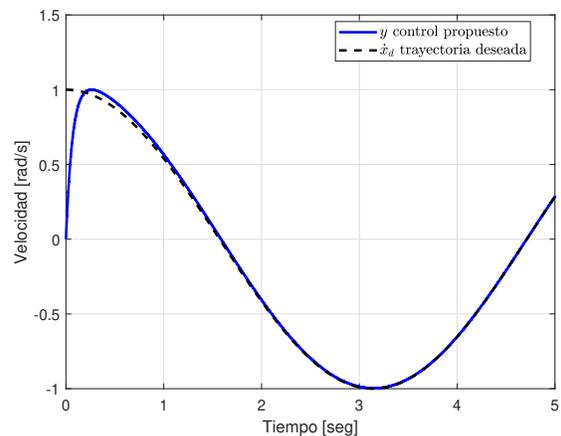


Fig. 9. Estado y vs derivada de la trayectoria deseada \dot{x}_d en el péndulo con motor

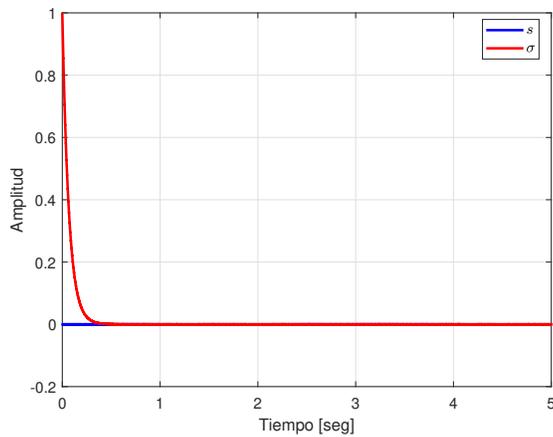


Fig. 10. Variable deslizante auxiliar s y variable deslizante σ en el péndulo con motor

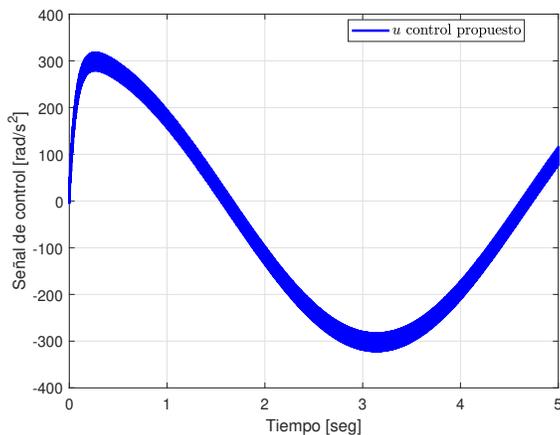


Fig. 11. Señal de control u en el péndulo con motor

la amplitud de la ganancia discontinua del controlador a través de la aplicación de un estimador de perturbaciones. Como trabajo futuro pretendemos lograr convergencia del error de seguimiento hacia cero en tiempo finito, así como reducir la amplitud de la parte discontinua de la señal de control para hacer su aplicación más viable, por otro lado se contempla extender la aplicación del controlador a robots manipuladores. Las simulaciones numéricas ilustran los resultados teóricos mostrando un buen rendimiento de la estructura de control propuesta.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo financiero a la Universidad Autónoma de Baja California beneficiados por la convocatoria interna de proyectos de investigación 2024-2025.

REFERENCIAS

Basin, M., Rodriguez-Gonzalez, J., Fridman, L., and Acosta, P. (2005). Integral sliding mode design for robust filtering and control of linear stochastic time-delay systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal*, 15(9), 407–421.

Coban, R. (2017). Backstepping sliding mode tracking controller design and experimental application to an

electromechanical system. *Journal of Control Engineering and Applied Informatics*, 19(3), 88–96.

Eker, I. (2006). Sliding mode control with pid sliding surface and experimental application to an electromechanical plant. *ISA transactions*, 45(1), 109–118.

Gambhire, S., Kishore, D.R., Londhe, P., and Pawar, S. (2021). Review of sliding mode based control techniques for control system applications. *International Journal of dynamics and control*, 9(1), 363–378.

Jafari, M., Mobayen, S., Roth, H., and Bayat, F. (2022). Nonsingular terminal sliding mode control for micro-electro-mechanical gyroscope based on disturbance observer: Linear matrix inequality approach. *Journal of Vibration and Control*, 28(9-10), 1126–1134.

Kelly, R., Santibáñez, V., and Loría, A. (2005). *Control of robot manipulators in joint space*, volume 693. Springer.

Levant, A. (1998). Robust exact differentiation via sliding mode technique. *automatica*, 34(3), 379–384.

Murtaza, G. and Bhatti, A. (2012). Control of dc motors using sliding mode. In *Proceedings of 2012 9th International Bhurban Conference on Applied Sciences & Technology (IBCAST)*, 37–42. IEEE.

Norsahperi, N. and Danapalasingam, K. (2020). An improved optimal integral sliding mode control for uncertain robotic manipulators with reduced tracking error, chattering, and energy consumption. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 142, 106747.

Pan, Y., Yang, C., Pan, L., and Yu, H. (2017). Integral sliding mode control: performance, modification, and improvement. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 14(7), 3087–3096.

Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L., Levant, A., et al. (2014). *Sliding mode control and observation*, volume 10. Springer.

Sinekli, E.S. and Coban, R. (2017). Dynamic integral sliding mode control of an electromechanical system. In *2017 International Conference on Mechanical, System and Control Engineering (ICMSC)*, 160–164. IEEE.

Tseng, M.L. and Chen, M.S. (2010). Chattering reduction of sliding mode control by low-pass filtering the control signal. *Asian Journal of control*, 12(3), 392–398.

Utkin, V. and Lee, H. (2006). Chattering problem in sliding mode control systems. In *International Workshop on Variable Structure Systems, 2006. VSS'06.*, 346–350. doi:10.1109/VSS.2006.1644542.

Utkin, V., Guldner, J., and Shi, J. (2017). *Sliding mode control in electro-mechanical systems*. CRC press.

Wang, K., Hua, C., Chen, J., and Cai, M. (2020). Dual-loop integral sliding mode control for robust trajectory tracking of a quadrotor. *International Journal of Systems Science*, 51(2), 203–216.

Wei, Y., Zheng, Z., Li, Q., Jiang, Z., and Yang, P. (2020). Robust tracking control of an underwater vehicle and manipulator system based on double closed-loop integral sliding mode. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 17(4), 1729881420941778.

Xu, Y., Li, S., and Zou, J. (2022). Integral sliding mode control based deadbeat predictive current control for pmsm drives with disturbance rejection. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 37(3), 2845–2856. doi:10.1109/TPEL.2021.3115875.