

Study of a Lyapunov-based discretization method using the midpoint approach ^{*}

Cristina Silva ^{*} Tonametl Sanchez ^{*} David A. Lizárraga ^{*}
Arturo Zavala-Río ^{*}

^{*} *Control and Dynamical Systems Div. IPICYT, 2055 Camino a la Presa de San José, 78216 SLP, Mexico (e-mail: ana.silva@ipicyt.edu.mx, tonametl.sanchez@ipicyt.edu.mx, d.lizarraga@ipicyt.edu.mx, azavala@ipicyt.edu.mx).*

Abstract:

We propose a modification of an existing discretization technique. The technique we attempt to improve is a discretization method designed for homogeneous systems, characterized by first-order consistency, numerical convergence, and the noteworthy feature of preserving both the stability of the system's equilibrium point and the type of convergence of the solutions toward the origin. Its design is based on the projection of the dynamics of the system over a level surface of the Lyapunov function, and the complementary use of the explicit Euler method. In this work the Euler's explicit method is replaced by the midpoint method, and it is proved that, with such a change, the discretization methodology continues to preserve both the Lyapunov function and the type of convergence exhibited by the solutions of the original system. Furthermore, it is proven that this new approach improves the accuracy of the method since it can achieve second-order convergence.

Keywords: Lyapunov methods, nonlinear systems, homogeneous systems, numerical methods, discrete-time methods.

1. INTRODUCCIÓN

Los métodos de discretización desempeñan una función crucial al transformar modelos continuos en representaciones discretas adecuadas, ya sea para su implementación computacional o para su análisis teórico. En el contexto de los sistemas dinámicos, estos métodos tienen como objetivo aproximar las ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs, por sus siglas en inglés) que describen el comportamiento continuo del sistema, mediante sistemas de ecuaciones en intervalos discretos de tiempo, conservando en la medida de lo posible la estructura y propiedades fundamentales del sistema en tiempo continuo.

En el ámbito de control y sistemas dinámicos, los sistemas homogéneos han recibido un interés particular. Estos sistemas, en su mayoría no lineales, comparten algunas características con los sistemas lineales, como la escalabilidad de soluciones. Debido a que la cantidad de sistemas no lineales que pueden ser linealizados conservando sus propiedades esenciales es limitada, en Hermes (1982), Sussmann (1987), Bianchini and Stefani (1990) y otras referencias se explora ampliamente la aproximación de sistemas no lineales a través de sistemas homogéneos, tanto con fines de análisis como de control.

En el contexto de la discretización de sistemas homogéneos, se ha observado que muchos de los métodos disponibles en la literatura presentan algunas deficiencias al aplicarse a este tipo de sistemas. Por ejemplo, investigaciones como las de Galias and Yu (2006) y Efimov

et al. (2017) demuestran que, para sistemas homogéneos cuyo origen es estable en tiempo finito, o es racionalmente estable¹, discretizaciones que no consideran la homogeneidad del sistema, como el método explícito de Euler, pueden producir aproximaciones de las soluciones con fenómenos oscilatorios o incluso con escape a infinito en tiempo finito. Asimismo, en Sanchez et al. (2019) se exhibe un ejemplo donde el método implícito de Euler, aplicado a un sistema inestable, produce soluciones que convergen al origen. Respecto de estos inconvenientes, en el trabajo de Polyakov et al. (2019) se presenta un método de discretización *consistente* para sistemas homogéneos estables, mientras que en Efimov et al. (2019) se proponen modificaciones a los métodos explícito e implícito de Euler, utilizando pasos de discretización escalados por la norma del estado, para garantizar la convergencia al origen de las soluciones discretas, para pasos de discretización suficientemente pequeños.

Los autores de Sanchez et al. (2021) propusieron una técnica de discretización, diseñada para sistemas homogéneos con puntos de equilibrio asintóticamente estables, que preserva dos propiedades fundamentales de tales sistemas, a saber, la función de Lyapunov y el tipo de convergencia de las soluciones (exponencial, racional o en tiempo finito). La técnica consiste en un método de proyección que, mediante aplicación del método explícito de Euler, aproxima la dinámica del sistema proyectada sobre un conjunto de nivel (típicamente una variedad inm-

^{*} Trabajo apoyado con beca CONACYT No. 336957

¹ Estabilidad racional, también llamada *nearly-fixed-time stability* en inglés.

ersa de codimensión 1) de una función de Lyapunov, y después utiliza información proporcionada por dicha función para “regresar” el punto aproximado a \mathbb{R}^n mediante un levantamiento. Conviene mencionar que el método explícito de Euler tiene una convergencia de orden uno, y que los autores de Sanchez et al. (2021) demostraron la convergencia de orden uno de su método. Por consiguiente, una pregunta interesante es si al reemplazar el método explícito de Euler por otro método de discretización auxiliar, el método de Sanchez et al. (2021) sigue preservando la función de Lyapunov y el tipo de convergencia de las soluciones. También es interesante saber cuál es su orden de convergencia en comparación con el orden del método auxiliar utilizado.

El presente trabajo aborda el análisis del enfoque propuesto por Sanchez et al. (2021) reemplazando el método explícito de Euler por el método del punto medio como método auxiliar, el cual posee una convergencia de orden 2. Se verifica que esta nueva estrategia de discretización mantiene la integridad tanto de la función de Lyapunov como del tipo de convergencia de las soluciones. Además, se demuestra que el método resultante de esta sustitución es convergente de orden 2, lo que implica la posibilidad de alcanzar niveles específicos de precisión y exactitud con un menor paso de discretización, en comparación con el requerido por el método original en Sanchez et al. (2021) para obtener los mismos niveles.

El artículo está organizado como sigue: en la Sección 1 se mencionan brevemente algunos conceptos relevantes para el trabajo; la Sección 2 expone el enfoque de discretización propuesto en Sanchez et al. (2021); en la Sección 3 se presenta el enfoque propuesto en este trabajo, utilizando el método del punto medio como auxiliar. En la Sección 4 se demuestra que el método continúa preservando las propiedades deseadas y la Sección 5 ilustra una implementación del enfoque propuesto en este trabajo. Finalmente, en la Sección 6 se incluyen algunas conclusiones y observaciones.

2. PRELIMINARES

2.1 Sistemas homogéneos

Consideremos la familia de problemas de valor inicial de la forma

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

donde el mapeo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continuo y tal que las soluciones del sistema existen y son únicas hacia adelante en el tiempo. Suponemos también que el origen del sistema es asintóticamente estable.

Dado un vector de pesos $r \in \mathbb{R}_{>0}^n$, y un factor de escala $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, la familia de dilataciones de un solo parámetro, con vector de pesos r , es la familia de funciones $\Delta_\lambda^r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ cuya i -ésima componente viene dada, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, por

$$(\Delta_\lambda^r(x))_i = \lambda^{r_i} x_i.$$

Una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice ser r -homogénea de grado $m \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$\Delta_\lambda^r(V(x)) = \lambda^m V(x),$$

para toda $x \in \mathbb{R}^n$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. Un campo vectorial $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice ser r -homogéneo de grado $\mu \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$f(\Delta_\lambda^r(x)) = \lambda^\mu \Delta_\lambda^r(f(x)),$$

para toda $x \in \mathbb{R}^n$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. El sistema (1) se dice ser r -homogéneo de grado $\mu \in \mathbb{R}$ si y sólo si el campo vectorial f es r -homogéneo de grado $\mu \in \mathbb{R}$.

Como se demuestra, e.g., en Bacciotti and Rosier (2005), para sistemas homogéneos la estabilidad asintótica del punto de equilibrio implica la existencia de una función de Lyapunov $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, homogénea de grado $m \in \mathbb{R}_{>0}$. La derivada de V a lo largo de las trayectorias de (1) está dada por

$$\dot{V}(x) = -W(x), \quad W(x) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) f_i(x),$$

donde $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es r -homogénea de grado $m + \mu$. Más aún, en Nakamura et al. (2002), Hong et al. (2001) se demuestra que W es definida positiva y que existe $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$\dot{V}(x) \leq -\alpha V^{\frac{m+\mu}{m}}(x),$$

para cada $x \in \mathbb{R}_{>0}$, donde α puede tomarse como

$$\alpha = \min_{x \in S_v} W(x), \quad (2)$$

y donde S_v denota el conjunto de nivel de la función de Lyapunov V , dado por:

$$S_v = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) = 1\}.$$

2.2 Método del punto medio

La mayoría de los métodos de discretización de un paso se pueden escribir en la forma

$$x_{k+1} = \psi(x_{k+1}, x_k, t_k, k) = \Psi(x_{k+1}, x_k, t_k, h) - \alpha x_k, \quad (3)$$

en donde, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe una constante $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que la función ψ_f satisface

$$|\psi_f(a) - \psi_f(b)| \leq M |x_k - \hat{x}_k| \quad (4a)$$

$$\psi_0(\dots) \equiv 0, \quad (4b)$$

con $a = \psi(x_{k+1}, x_k, t_k, h)$, $b = \psi(\hat{x}_{k+1}, \hat{x}_k, t_k, h)$ y $\psi_0 = \psi_{f \equiv 0}$. El llamado método del punto medio, es un método de un sólo paso, que se define para problemas de valor inicial de la forma (1), por

$$x_{k+1} = x_k + hf \left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(t_k, y_k) \right). \quad (5)$$

Generalmente los tiempos discretos t_0, t_1, \dots, t_f se eligen equidistantes, con $t_{k+1} = t_k + h$, donde h es el paso de discretización. El error local de truncado es el error que se genera en cada paso de discretización, y está dado por

$$T_{k+1} = x(t_{k+1}) - x_{k+1},$$

donde $x(t_k)$ denota la solución continua de (1). Este error se calcula en cada paso de discretización y se asume que no hay un error inicial, i.e.

$$x(t_k) = x_k. \quad (6)$$

Un método de discretización se dice ser consistente de orden $\sigma \in \mathbb{Z}_{>0}$ si para toda $k \in \mathbb{N}$ y todo problema de valor inicial (1), el error de truncado satisface

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|T_{k+1}|}{h^\sigma} = 0.$$

El método dado por (5) es consistente de orden 2. El polinomio característico asociado a (3) está dado por

$$P(y) = y + \alpha.$$

Un método de discretización de un sólo paso se dice ser *cero-estable* si el módulo de todas las raíces de su polinomio característico asociado $P(y)$ es menor o igual que uno, y aquellas cuyo módulo es la unidad son simples, i.e., tienen multiplicidad uno. El método (5) es *cero-estable*. El *error global* e_k , hasta el paso de discretización $k \in \mathbb{N}$, se define como $e_k = x(t_k) - x_k$. El método (3) se dice ser *convergente* si satisface

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{k=0,1,\dots,t_f} \|e_k\| = 0.$$

Del *teorema de equivalencia de Dahlquist*, establecido en Dahlquist (1956) y el trabajo de Isaacson and Keller (1994) se puede concluir que para (3):

Consistencia + cero-estabilidad \implies Convergencia.

3. MÉTODO BASADO EN LYAPUNOV CON EULER EXPLÍCITO

En el artículo de Sanchez et al. (2021) se propone una técnica de discretización para resolver problemas de valor inicial de la forma (1), bajo el supuesto adicional de que cada sistema es r -homogéneo de grado $\mu \in \mathbb{R}$ y con origen asintóticamente estable, lo que garantiza la existencia de una función de Lyapunov $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ asociada a (1). Dicho método se define mediante la siguiente ecuación:

$$x_{k+1}^E = \begin{cases} \Phi^{-1}(v_{k+1}, z_{k+1}) & \text{si } x_k \neq 0 \\ 0, & \text{si } x_k = 0 \end{cases}, \quad (7)$$

en donde

$$z_{k+1}^E = \Delta_{V^{-\frac{1}{m}}(z_{k+1}^E)}^r (\tilde{z}_{k+1}^E), \quad (8)$$

con

$$\tilde{z}_{k+1}^E = z_k^E + h(v_k^E)^{\frac{\mu}{m}} \left[f(z_k^E) + \frac{1}{m} W(z_k^E) R z_k^E \right]. \quad (9)$$

Si $\mu = 0$:

$$v_{k+1}^E = v_k \exp(-W(z_k)h). \quad (10a)$$

Si $\mu > 0$:

$$v_{k+1}^E = \frac{v_k}{\left(1 + \frac{\mu}{m} v_k^{\frac{\mu}{m}} W(z_k)h\right)^{\frac{m}{\mu}}} \quad (10b)$$

Si $\mu < 0$:

$$v_{k+1}^E = \begin{cases} \left(v_k^{\frac{-\mu}{m}} - A_1\right)^{\frac{m}{\mu}}, & A_1 < v_k^{\frac{-\mu}{m}} \\ 0, & A_1 \geq v_k^{\frac{-\mu}{m}} \end{cases} \quad (10c)$$

con $A_1 = \frac{-\mu h}{m} W(z_k)$, y en donde el superíndice E indica que el método auxiliar utilizado es el método explícito de Euler. Los valores de \tilde{z}_{k+1}^E , z_{k+1}^E , v_{k+1}^E y Φ^E son definidos como se explica a continuación. La derivada de z a lo largo de las trayectorias de (1) está dada por

$$\dot{z} = V^{\frac{\mu}{m}}(x) \left[f(z) + \frac{1}{m} W(z) R z \right], \quad (11)$$

donde R es la matriz diagonal cuya diagonal principal consiste de las componentes del vector de pesos r . En Sanchez et al. (2021) se demuestra que toda solución de (11), con condición inicial en el conjunto de nivel S_v , evoluciona

también en S_v . Aproximando (11) mediante el método de Euler explícito se obtiene (9) y se proyecta sobre S_v , para garantizar que las soluciones discretas evolucionen únicamente en S_v , como lo hacen las soluciones continuas de (1), obteniendo así (8). La derivada de V a lo largo de las trayectorias de (11) está dada por

$$\dot{V}(x) = -V^{\frac{m+\mu}{m}}(x)W(z). \quad (12)$$

Definamos la variable $v = V(x)$. Aplicando el método de separación de variables para integrar (12) se obtiene:

Si $\mu = 0$:

$$v(t_{k+1}) = v(t_k) \exp\left(-\widehat{W}(t_k)\right). \quad (13a)$$

Si $\mu > 0$:

$$v(t_{k+1}) = \frac{v(t_k)}{\left(1 + \frac{\mu}{m} v(t_k)^{\frac{-\mu}{m}} \widehat{W}(t_k)\right)^{\frac{m}{\mu}}}. \quad (13b)$$

Si $\mu < 0$:

$$v(t_{k+1}) = \begin{cases} \left(v(t_k)^{\frac{-\mu}{m}} + A_2\right)^{\frac{-m}{\mu}}, & v(t_k)^{\frac{-\mu}{m}} < A_2 \\ 0, & v(t_k)^{\frac{-\mu}{m}} \geq A_2 \end{cases} \quad (13c)$$

donde $A_2 = \frac{\mu \widehat{W}(t_k)}{m}$ y

$$\widehat{W}(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} W(z(\tau))d\tau. \quad (14)$$

Para aproximar (14) mediante el método de Euler, definamos el siguiente sistema:

$$\dot{\omega}(t) = W(z(t)). \quad (15)$$

La aproximación de (15) con Euler explícito está dada por

$$\omega_{k+1}^E = \omega_k^E + hW(z(t_k)). \quad (16)$$

Además, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} W(z(\tau))d\tau &= \int_0^{t_{k+1}} W(z(\tau))d\tau - \int_0^{t_k} W(z(\tau))d\tau \\ &= \omega(t_{k+1}) - \omega(t_k), \end{aligned} \quad (17)$$

por lo tanto

$$\widehat{W}_E(t_k) \approx \widehat{W}_k^E = hW(z_k). \quad (18)$$

Sustituyendo (18) en (13) se obtiene (10). En Sanchez et al. (2021) se demostró que existe un difeomorfismo $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \times S_v$, que mapea soluciones de (1) en soluciones de (11)-(12), dado por

$$\Phi(x) = \left(\begin{matrix} V(x) \\ \Delta_{V^{-\frac{1}{m}}(x)}^r(x) \end{matrix} \right), \quad (19)$$

y cuya inversa está dada por

$$\Phi^{-1}(v, z) = \Delta_{v^{\frac{1}{m}}}^r(z).$$

Así, las aproximaciones (8) y (10) pueden levantarse a \mathbb{R}^n mediante Φ^{-1} , permitiendo obtener una aproximación discreta de (1). En Sanchez et al. (2021) también se demostró que el método de discretización (7) satisface lo siguiente:

- Es consistente de orden uno.
- V es función de Lyapunov para (7).
- Preserva el tipo de convergencia de las soluciones, i.e.,

$$\text{Si } \mu = 0 : V(x_k) \leq V(x_0) \exp(-\alpha hk). \quad (20a)$$

$$\text{Si } \mu > 0 : V(x_k) \leq \frac{V(x_0)}{\left(1 + \frac{\mu}{m} V^{\frac{\mu}{m}}(x_0) \alpha hk\right)^{\frac{\mu}{m}}}. \quad (20b)$$

Si $\mu < 0$:

$$V(x_k) \leq \begin{cases} \left(V^{\frac{-\mu}{m}}(x_0) + \frac{\mu \alpha hk}{m}\right)^{\frac{m}{-\mu}}, & k < A_3 \\ 0, & k \geq A_3 \end{cases}, \quad (20c)$$

en donde $A_3 = \frac{m}{-\mu \alpha h} V^{\frac{-\mu}{m}}(x_0)$ y α está dada en (2).

4. MÉTODO BASADO EN LYAPUNOV CON PUNTO MEDIO

Utilizando el método del punto medio y la misma metodología que se utilizó para aproximar (18), se obtiene:

$$\widehat{W}_k^{MP} = hW\left(z_{k+\frac{1}{2}}\right) \quad (21)$$

con $z_{k+\frac{1}{2}} \approx z\left(t_k + \frac{h}{2}\right)$ definido como sigue:

$$z_{k+\frac{1}{2}} = \Delta_V^r \frac{-1}{V^{\frac{-1}{m}}(\bar{z}_{k+\frac{1}{2}})}\left(\bar{z}_{k+\frac{1}{2}}\right) \quad (22)$$

con $\bar{z}_{k+\frac{1}{2}} = z_k^{MP} + \frac{h}{2}(v_k^{MP})^{\frac{\mu}{m}} F(z_k^{MP})$, y $F(z_k^{MP}) = f(z_k^{MP}) + \frac{1}{m}W(z_k^{MP})Rz_k^{MP}$. En donde z_k^{MP} está dada por (25) y v_k^{MP} por (23). Sustituyendo (21) en (13), se obtiene una discretización para (12), definida por:

Si $\mu = 0$,

$$v_{k+1}^{MP} = v_k^{MP} \exp\left(-hV^{-1}(\bar{z}_{k+\frac{1}{2}})W\left(\bar{z}_{k+\frac{1}{2}}\right)\right); \quad (23a)$$

Si $\mu > 0$,

$$v_{k+1}^{MP} = \frac{v_n^{MP}}{\left(1 + \frac{\mu}{m}(v_k^{MP})^{\frac{\mu}{m}} hV^{\frac{-m-\mu}{m}}(\bar{z}_{k+\frac{1}{2}})W\left(\bar{z}_{k+\frac{1}{2}}\right)\right)^{\frac{m}{\mu}}}; \quad (23b)$$

Si $\mu < 0$,

Si $A_4 < v_n^{\frac{-\mu}{m}}$,

$$v_{n+1}^{MP} = \left((v_n^{MP})^{\frac{-\mu}{m}} + \frac{\mu h}{m} V^{\frac{-m-\mu}{m}}(\bar{z}_{k+\frac{1}{2}})W\left(\bar{z}_{k+\frac{1}{2}}\right)\right)^{\frac{m}{-\mu}}; \quad (23c)$$

Si $A_4 \geq v_n^{\frac{-\mu}{m}}$,

$$v_{n+1}^{MP} = 0, \quad (23d)$$

donde $A_4 = \frac{-\mu h}{m} W\left(\Delta_V^r \frac{-1}{V^{\frac{-1}{m}}(\bar{z}_{k+\frac{1}{2}})}\left(\bar{z}_{k+\frac{1}{2}}\right)\right)$. Por otro lado, de (5) se tiene que la aproximación de (11) con el método del punto medio está dada por

$$\bar{z}_{k+1}^{MP} = z_k^{MP} + h\bar{v}_{k+\frac{1}{2}}^{\frac{\mu}{m}} \left[f(\bar{z}_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{m}W(\bar{z}_{k+\frac{1}{2}})R\bar{z}_{k+\frac{1}{2}} \right], \quad (24)$$

con $\bar{v}_{k+\frac{1}{2}} \approx v\left(t_k + \frac{h}{2}\right)$ dado por

$$\bar{v}_{k+\frac{h}{2}} = v_k^{MP} + \frac{h}{2} \left(-v_k^{MP}\right)^{\frac{m+\mu}{m}} W(z_k^{MP}).$$

Proyectando (24) sobre S_v se obtiene

$$z_{k+1}^{MP} = \Delta_V^r \frac{-1}{V^{\frac{-1}{m}}(\bar{z}_{k+1}^{MP})}\left(\bar{z}_{k+1}^{MP}\right). \quad (25)$$

Así, la versión extendida del método de Sanchez et al. (2021) que proponemos en este trabajo, basada en la función de Lyapunov y el método del punto medio, es la siguiente:

$$x_{k+1}^{MP} = \Delta_{\left(v_{k+1}^{MP}\right)^{\frac{1}{m}}}^r\left(z_{n+1}^{MP}\right). \quad (26)$$

5. CONVERGENCIA NUMÉRICA Y PRESERVACIÓN DE LAS PROPIEDADES ESPERADAS

En esta sección se demuestra que el método (26) es convergente de orden 2, y preserva tanto la estabilidad asintótica del punto de equilibrio como el tipo de convergencia de las soluciones. Cabe resaltar que, debido a la existencia del difeomorfismo (19), basta demostrar la convergencia de (25) y (23) para demostrar la convergencia de (8). Dado que el contexto está claro, en esta sección nos referiremos a x_{k+1}^{MP} , z_{k+1}^{MP} , v_{k+1}^{MP} y \widehat{W}_k^{MP} simplemente como x_{k+1} , z_{k+1} , v_{k+1} y \widehat{W}_k , respectivamente. Se supondrá lo siguiente con respecto a (1):

- El sistema es r -homogéneo de grado $\mu \in \mathbb{R}$.
- El origen es asintóticamente estable.
- $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Lyapunov, r -homogénea de grado $m \in \mathbb{R}_{>0}$, para este sistema.

Teorema 1. V es función de Lyapunov para el sistema discreto (26). Más aún, lo siguiente se satisface:

$$V(x_k) \leq V(x_0) \exp(-k\alpha h), \quad (27a)$$

$$V(x_k) \leq \frac{V(x_0)}{\left(1 + \frac{\mu}{m} V^{\frac{\mu}{m}}(x_0) k\alpha h\right)^{\frac{\mu}{m}}}, \quad (27b)$$

$$V(x_k) \leq \bar{V}(x(t_k)), \quad (27c)$$

$$\bar{V}(x_k) = \begin{cases} \left(V^{\frac{-\mu}{m}}(x_0) + \frac{\mu k\alpha h}{m}\right)^{\frac{m}{-\mu}}, & \text{si } A_5 < v_0^{\frac{-\mu}{m}} \\ 0, & \text{si } A_5 \geq v_0^{\frac{-\mu}{m}} \end{cases}, \quad (27d)$$

para $\mu = 0$, $\mu > 0$ y $\mu < 0$ respectivamente, con $A_5 = \frac{-\mu k\alpha h}{m}$.

Demostración. Dado que V es r -homogénea de grado m y $z_k \in S_v$ por construcción, se tiene

$$V(x_k) = V\left(\Delta_{\left(v_{k+1}^{MP}\right)^{\frac{1}{m}}}^r(z_k)\right) = v_k V(z_k) = v_k.$$

Entonces $V(x_{k+1}) - V(x_k) = v_{k+1} - v_k$. Pero v satisface (12), por lo tanto es decreciente y $v_{k+1} < v_k$, lo que implica

$$V(x_{k+1}) - V(x_k) < 0.$$

Del teorema de estabilidad de Lyapunov para sistemas discretos se sigue que V es función de Lyapunov para el sistema discreto y por lo tanto el origen de (26) es estable. Para demostrar la estabilidad asintótica y la preservación de los tipos de convergencia, consideremos las soluciones de las ecuaciones discretas (23):

$$\text{• Si } \mu = 0 \quad v_k = v_0 \exp(-h\bar{W}_S), \quad (28)$$

$$\text{donde } \bar{W}_S = \sum_{j=0}^k W\left(z_{j+\frac{1}{2}}\right).$$

$$\text{• Si } \mu > 0 \quad v_k = \frac{v_0}{\left(1 + \frac{\mu}{m} v_0^{\frac{\mu}{m}} h\bar{W}_S\right)^{\frac{m}{\mu}}}. \quad (29)$$

- Si $\mu < 0$

$$v_k = \begin{cases} \left(v_0^{\frac{-\mu}{m}} - \frac{-\mu h}{m} \bar{W}_S \right)^{\frac{m}{-\mu}} & \frac{-\mu h}{m} \bar{W}_S < v_0^{\frac{-\mu}{m}} \\ 0 & \frac{-\mu h}{m} \bar{W}_S \geq v_0^{\frac{-\mu}{m}} \end{cases} \quad (30)$$

Puesto que V es positiva definida y continua, existen constantes $C_1, C_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que

$$C_1 \leq V(x) \leq C_2, \quad \forall x \in S_v.$$

Además, de (22) se sabe que $z_{k+\frac{1}{2}} \in S_v$, por lo tanto de (2) se siguen las desigualdades (27). \square

Puesto que V es una norma homogénea, del Teorema 1 y del Corolario 5.4 en Bacciotti and Rosier (2005) se sigue que el método de discretización dado por (26) no sólo preserva la función de Lyapunov de (1), sino también el tipo de convergencia de las soluciones.

Teorema 2. Si la función W es de clase C^2 , entonces el método de discretización dado por (23) es consistente de orden 2, para $\mu = 0$, $\mu > 0$ y $\mu < 0$.

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$. Supongamos $\mu = 0$. De (6) se tiene $v_k = v(t_k)$, por lo tanto, el error local de truncado T_{k+1}^v está dado por

$$T_{k+1}^v = v_k \left(e^{-\widehat{W}(t_k)} - e^{-h\widehat{W}_k} \right). \quad (31)$$

Se tiene que para $h = 0$, el cociente $\frac{|T_{k+1}^v|}{h^2}$ se indetermina, por lo que aplicando la regla de L'Hôpital para calcular $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|T_{k+1}^v|}{h^2}$ se obtiene

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|T_{k+1}^v|}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v_k \left| e^{-\widehat{W}_k} B_1 - e^{-\widehat{W}(t_k)} B_2 \right|}{2h} \quad (32)$$

en donde $B_1 = \widehat{W}_k + h \frac{d\widehat{W}_k}{dh}(h)$ y $B_2 = W(z(t_{k+1}))$. Dado que el cociente del lado derecho de (32) se indetermina en $h = 0$ se aplica nuevamente la regla de L'Hôpital a (32), obteniendo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|T_{k+1}^v|}{h^2} = \frac{v_k}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left| e^{-h\widehat{W}_k} B_3 - e^{-\widehat{W}(z(t_k))} B_4 \right|, \quad (33)$$

con $B_3 = 2 \frac{d\widehat{W}_k}{dh}(h) + f \frac{d^2\widehat{W}_k}{dh^2}(h) - \left(\widehat{W}_k + h \frac{d\widehat{W}_k}{dh}(h) \right)^2$ y $B_4 = \frac{dW \circ z}{dh}(t_{k+1}) - W^2(z(t_{k+1}))$. Denotemos $\bar{\gamma} = \bar{z}_{k+\frac{1}{2}}$. Mediante cálculos se obtiene

$$\frac{d\widehat{W}_k}{dh}(h) = \frac{W(\bar{\gamma})}{V(\bar{\gamma})} + \frac{hF(z_k)}{2V^2(\bar{\gamma})} B_5, \quad (34)$$

$$\frac{dW \circ z}{dh}(h) = \frac{\partial W}{\partial z}(z(t_{k+1})) F(z(t_{k+1})), \quad (35)$$

con $B_5 = \frac{\partial W}{\partial z}(\bar{\gamma}) V(\bar{\gamma}) - \frac{\partial V}{\partial z}(\bar{\gamma}) W(\bar{\gamma})$. De (33), (34) y (35) se sigue que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|T_{k+1}^v|}{h^2} = \frac{v_k}{2} \left| -F(z_k) \frac{\partial V}{\partial z}(z_k) W(z_k) \right|. \quad (36)$$

Para $\mu = 0$, la derivada de V a lo largo de las trayectorias de (11) es $\dot{V}(z_k) = \frac{\partial V}{\partial z}(z_k) F(z_k)$. En Sanchez et al. (2021) se muestra que $\dot{V}(z) = 0$ para toda $z \in S_v$. Por suposición $z_k \in S_v$, así, se sigue de (36) que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|T_{k+1}^v|}{h^2} = 0$. \square

Para $\mu > 0$ o $\mu < 0$, la consistencia del método se demuestra utilizando un razonamiento análogo al realizado

para $\mu = 0$. Para estos casos el error local de truncado está dado por

$$T_{k+1}^v = \left(v_k^{\frac{-\mu}{m}} - \frac{-\mu}{m} \widehat{W}(t_k) \right)^{\frac{-m}{\mu}} - \left(v_k^{\frac{-\mu}{m}} - \frac{-\mu}{m} \widehat{W}_k \right)^{\frac{-m}{\mu}}.$$

Aplicando dos veces la regla de L'Hôpital a (37), de forma análoga a lo hecho para $\mu = 0$, se obtiene

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|T_{k+1}^v|}{h^2} = \frac{1}{2} \left| v_k^{\frac{-m-\mu}{\mu}} \dot{V}(z_k) W(z_k) \right|.$$

Por un razonamiento similar al realizado para $\mu = 0$ se sigue que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|T_{k+1}^v|}{h^2} = 0$. \square

Teorema 3. El método de discretización dado por (25) es consistente de orden 2.

Demostración. La i -ésima componente del error local de truncado T_{k+1}^z está dada por

$$\begin{aligned} (T_{k+1}^z)_i &= z_i(t_{k+1}) - V^{\frac{-r_i}{m}}(\tilde{z}_{k+1}) \tilde{z}_{k+1}^i \\ &= C_1 + \left(1 - V^{\frac{-r_i}{m}}(\tilde{z}_{k+1}) \right) \tilde{z}_{k+1}^i, \end{aligned} \quad (37)$$

con $C_1 = z_i(t_{k+1}) - \tilde{z}_{k+1}^i$. Puesto que $z(t_{k+1}) \in S_v$ se tiene

$$\left(1 - V^{\frac{-r_i}{m}}(\tilde{z}_{k+1}) \right) = \frac{1}{V^{\frac{r_i}{m}}(\tilde{z}_{k+1})} (C_2), \quad (38)$$

en donde $C_2 = V^{\frac{r_i}{m}}(\tilde{z}_{k+1}) - V(z(t_{k+1}))$. Definamos

$$\widehat{z}_k = \zeta + h \bar{v}_{k+\frac{1}{2}}^{\frac{\mu}{m}} \left(\bar{f} + \frac{1}{m} \bar{\alpha} r \zeta \right), \quad (39)$$

con $\zeta = \sup_{z \in S_v} |z|$, $\bar{f} = \sup_{z \in S_v} |f(z)|$ y $\bar{\alpha} = \sup_{z \in S_v} |W(z)|$. De la definición de \tilde{z}_{k+1} se sigue que $\tilde{z}_{k+1} \leq \widehat{z}_k$; además, por la consistencia del método del punto medio se puede demostrar que \tilde{z}_{k+1} también está acotada por abajo, por lo tanto existen $d_1, d_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que $d_1 \leq V(\tilde{z}_{k+1}) \leq d_2$. Dado que $[d_1, d_2]$ es compacto, la función que mapea V a $V^{\frac{r_i}{m}}$ es Lipschitz con constante L_1 , más aún, V es Lipschitz en S_v con constante L_2 , por lo tanto, dado que $|\widehat{z}_k^i - z^i(t_{k+1})| \leq |\widehat{z}_k - z(t_{k+1})|$, se tiene

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|(T_{n+1}^z)_i|}{h^2} \leq K_2 \lim_{h \rightarrow 0} V^{\frac{-r_i}{m}}(\tilde{z}_{k+1}) \frac{|z(t_{k+1}) - \tilde{z}_{k+1}|}{h^2} \quad (40)$$

con $K_2 = L_1 L_2 d_1^{\frac{-r_i}{m}} z_k$. Por la consistencia de orden 2 del método del punto medio, se concluye de (40) que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|(T_{n+1}^z)_i|}{h^2} = 0$. \square

Con respecto a la cero-estabilidad del método, en todas las referencias estudiadas para este trabajo, la definición de dicha noción está dada para métodos de la forma (3), cuya función ψ es Lipschitz (condición (4a)), por lo cual, hasta el momento sólo podemos afirmar que el método (26) es cero-estable siempre que Φ^{-1} sea Lipschitz, una propiedad que no necesariamente se cumple para sistemas r -homogéneos.

6. IMPLEMENTACIÓN

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1 \text{sign}(x_1) |x_1|^{\frac{3}{2}} + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_2 \text{sign}(x_1) x_1^2, \end{aligned} \quad (41)$$

el cual es r -homogéneo de grado $\mu = 1$, con $r = [2, 3]^\top$. La función

$$V(x) = \frac{2}{5} k_1 |x_1|^{\frac{5}{2}} - x_1 x_2 + \frac{3}{5} \alpha |x_2|^{\frac{5}{3}}$$

es r -homogénea de grado $m = 5$, y es de Lyapunov para este sistema. Supongamos $k_1 = 2$, $k_2 = 1$ y $\alpha = 2$. Al aproximar el sistema (41) con el método explícito de Euler se producen soluciones desacetadas para condiciones iniciales y valores de h suficientemente grandes. En la Figura 1 se muestran las implementaciones de los métodos (7), (26), y ODE45 de Matlab (como método de referencia con un paso de discretización mayor). La solución de (26) es más cercana a la referencia (ODE45) gracias a que el orden de consistencia de (26) es mayor que el de (7). Cabe resaltar que el método presentado en este trabajo preserva sus propiedades para *cualquier paso de discretización* $h \in \mathbb{R}_{>0}$ y *cualquier condición inicial* $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Para la implementación aquí presentada se usó $x_0 = [10^7, 0]^\top$, $h = 0.001$ y tiempo de simulación de 1.2 segundos. Al aplicar el método de Euler explícito al esquema de Sanchez et al. (2021), el mayor de los errores de truncado es 1.658×10^6 , mientras que con el método del punto medio es de 1.037×10^5 , vea la Figura 2.

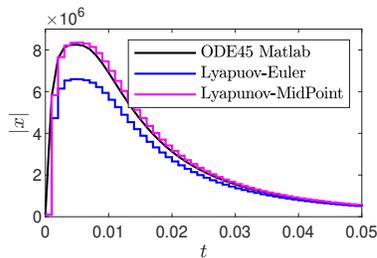


Fig. 1. Comparación de las soluciones discretas obtenidas mediante 3 aproximaciones numéricas de (41).

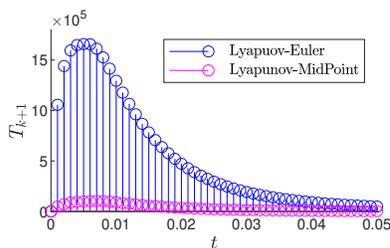


Fig. 2. Comparación entre los errores locales de truncado para ambos casos.

7. CONCLUSIONES.

Se analizó el enfoque propuesto por Sanchez et al. (2021) después de remplazar el método de Euler explícito por el método del punto medio para aproximar las ecuaciones (11) y (14). Se demostró que el método sigue siendo explícito y conserva la estabilidad asintótica del sistema original, así como el tipo de convergencia de las soluciones. Además, se comprobó que el nuevo método obtenido tiene un orden de consistencia 2, al igual que el método del punto medio, siempre y cuando W sea de clase C^1 . En términos de convergencia y carga computacional, el

método propuesto en este trabajo está al nivel de métodos bien conocidos, como el trapezoidal y Runge-Kutta de orden 2, sin embargo, a diferencia de estos métodos, el esquema que proponemos sí preserva propiedades de interés del sistema en tiempo continuo. Como perspectiva futura, sería interesante explorar el enfoque de Sanchez et al. (2021) utilizando otros métodos más precisos para aproximar las ecuaciones (11) y (14), o incluso métodos implícitos, investigando las condiciones bajo las cuales se mantienen o mejoran las propiedades del esquema de discretización propuesto por Sanchez et al. (2021).

REFERENCIAS

- Bacciotti, A. and Rosier, L. (2005). *Liapunov Functions and Stability in Control Theory*. Springer, Berlin, 2nd edition. doi:10.1007/b139028.
- Bianchini, R.M. and Stefani, G. (1990). Graded approximations and controllability along a trajectory. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 28(4), 903–924.
- Dahlquist, G. (1956). Convergence and stability in the numerical integration of ordinary differential equations. *MATHEMATICA SCANDINAVICA*, 4, 33–53.
- Efimov, D., Polyakov, A., and Aleksandrov, A. (2019). Discretization of homogeneous systems using Euler method with a state-dependent step. *Automatica*, 109, 108546.
- Efimov, D., Polyakov, A., Levant, A., and Perruquetti, W. (2017). Realization and discretization of asymptotically stable homogeneous systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(11), 5962–5969. doi: 10.1109/TAC.2017.2699284.
- Galias, Z. and Yu, X. (2006). Complex discretization behaviors of a simple sliding-mode control system. *IEEE Trans. Circuits Syst. II Express Briefs*, 53-II(8), 652–656.
- Hermes, H. (1982). Control systems which generate decomposable Lie algebras. *Journal of Differential Equations*, 44(2), 166–187.
- Hong, Y., Huang, J., and Xu, Y. (2001). On an output feedback finite-time stabilization problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(2), 305–309.
- Isaacson, E. and Keller, H.B. (1994). *Analysis of Numerical Methods*. Dover Publications, N.Y.
- Nakamura, H., Yamashita, Y., and Nishitani, H. (2002). Smooth Lyapunov functions for homogeneous differential inclusions. In *Proceedings of the 41st SICE Annual Conference, 1974–1979*. doi: 10.1109/SICE.2002.1196633.
- Polyakov, A., Efimov, D., and Brogliato, B. (2019). Consistent discretization of finite-time and fixed-time stable systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 57(1), 78–103.
- Sanchez, T., Efimov, D., Polyakov, A., and Moreno, J.A. (2019). Homogeneous discrete-time approximation. *IFAC-PapersOnLine*, 52(16), 19–24. 11th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems NOLCOS 2019.
- Sanchez, T., Polyakov, A., and Efimov, D. (2021). Lyapunov-based consistent discretization of stable homogeneous systems. *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control*, 31(9), 3587–3605. doi:10.1002/rnc.5308.
- Sussmann, H.J. (1987). A general theorem on local controllability. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 25(1), 158–194.