Memorias del 2024 Congreso Nacional de Control Automático
8-11 de Octubre, 2024. Ciudad de México, México.

A Controller Design for Evaders Considering Single Integrator Dynamics

Manuel Mera * **Héctor Ríos** **,*** **Denis Efimov** ****,*****

* *ESIME–Instituto Politécnico Nacional, Av. Ticomán No. 600, San José Ticomán, C.P. 07340 Ciudad de México, México. E-mail: mmerah@ipn.mx*
** *Tecnológico Nacional de México/I.T. La Laguna, C.P. 27000, Torreón, Coahuila, México. E-mail: hriosb@correo.itlalaguna.edu.mx*
*** *CONAHCYT, Investigadoras e Investigadores por México, C.P. 03940, Ciudad de México, México.*
**** *Inria,Univ. Lille, CNRS, UMR 9189–CRISTAL, F–59000, Lille, France. E-mail: denis.efimov@inria.fr*
***** *ITMO University, 197101, Saint Petersburg, Russia.*

Abstract: This paper presents a novel controller for the evader in the pursuit–evasion game, when each player is modeled as a single integrator. The resulting control design does not require any information on the pursuer control, only requires information on the pursuer state. The resulting control ensures the escape of the evader from the pursuer under an adequate selection and design of the evader controller parameters. Additionally, the synthesis of this controller is constructive and can be tuned straightforwardly since it is obtained from the solution of an LMI. The stability analysis of the tracking error dynamics is carried out considering a Lyapunov–like function and the effectiveness of the proposed result is illustrated through some simulations.

Keywords:
Pursuit–Evasion Problem, Nonlinear Control, Lyapunov methods.

1. INTRODUCCIÓN

El problema de persecución–evasión es uno de los temas relacionados a multi–agentes más interesantes actualmente. Este interés se relaciona principalmente con la amplia gama de aplicaciones que lo requieren, *e.g.,* misiones de intercepción, evasión y guía de misiles, control de aeronaves, evasión de colisiones (ver por ejemplo, Margellos y Lygeros (2009), Zhang et al. (2024),Tian et al. (2023), y Sun et al. (2022)).

Es relevante mencionar que la mayoría de los estudios relacionados con este problema se fundamentan en la teoría de juegos diferenciales, y estos comúnmente consideran el problema de persecución-evasión de dos vehículos idénticos originalmente planteado en Isaacs (1965). Este conocido resultado requiere la integración hacia atrás de la ecuación de Isaac (ver, Evans y Souganidis (1984) y Pachter (2012)) cuyo resultado arroja las consabidas ecuaciones regresivas de trayectoria. Sin embargo, para obtener un algoritmo implementable es necesario calcular en línea una aproximación numérica de la entrada de control óptimo en tiempo real. Esto resulta generalmente en complicado, o incluso imposible de implementar para ciertas aplicaciones.

Algunos resultados más recientes basados en teoría de juegos diferenciales, que requieren el cálculo en línea de un funcional, o la solución de la ecuación de Hamilton–Jacobi–Isaac (HJI) incluyen: Garcia et al. (2021), donde la caracterización para conjuntos de alcance–evasión se obtienen para varios perseguidores y evasores; Chen et al. (2017) y Lopez et al. (2020), donde se consideran varios perseguidores y evasores y se emplea un enfoque similar al de juegos diferenciales; Margellos y Lygeros (2011), donde una solución para versiones no lineales e híbridas del problema de persecución–evasión es propuesta; y Garcia et al. (2021), donde una generalización del juego diferencial de defensa de frontera es resuelto en términos de la ecuación de HJI.

La mayoría de estos resultados, aún cuando son óptimos en algún sentido, no pueden ser extendidos a los casos perturbados o inciertos. Además, debido al requerir cálculos y soluciones complejas en línea, necesitan de un alto poder de procesamiento y cómputo, o de otra manera fiarse de aproximaciones inexactas. Otros enfoques populares empleados para resolver el problema de persecución–evasión se basan en formulaciones geométricas (Pachter y Getz (1980)). Estos enfoques, normalmente no requieren cálculos complejos en línea, pero requieren el conocimiento

https://doi.org/10.58571/CNCA.AMCA.2024.001

de las propiedades cinemáticas de los jugadores en ambos bandos. Algunos resultados recientes interesantes relacionados con el enfoque geométrico son: Chaudhari y Chakraborty (2022), donde una estrategia de realimentación basada en una aproximación geométrica se propone; Nath y Ghose (2022), donde el problema de información incompleta es considerado para agentes no holónomos; mientras que en Kothari et al. (2017) y Moll et al. (2019) áreas seguras–alcanzables son calculadas empleando particiones con conjuntos de Voronoi del espacio de configuración. Otros resultados, considerando el conocimiento de la cinemática de tanto perseguidores como evasores, se han desarrollado en Fuchs y Khargonekar (2017) y Zhou et al. (2018). Sin embargo, estos resultados consideran un problema de persecución–evasión modificado y simplificado.

A parte de todos estos enfoques, hay muy pocos otros resultados relevantes del problema de persecución–evasión, particularmente resultados que presenten algoritmos fáciles de implementar y de sintonizar, así como controladores que puedan asegurar la robustez del lazo cerrado. Con estos problemas en mente, en este trabajo, se propone un controlador para el evasor considerando el problema de persecución–evasión, donde ambos agentes se asumen con dinámicas modeladas por un sólo integrador $n-$dimensional. El controlador propuesto para el evasor no requiere del conocimiento del control de perseguidor, sólo requiere de conocer el estado de éste. La ley de control garantiza la evasión del perseguidor bajo una selección adecuada de parámetros, la cuál es constructiva y sencilla de sintonizar pues está formulada en términos de Desigualdades Matriciales Lineales (LMIs por sus siglas en inglés). El acotamiento del error de seguimiento y de las trayectorias del evasor se asegura con base en funciones tipo Lyapunov, garantizando que el evasor siempre escape del perseguidor.

El resto de este trabajo se organiza de la siguiente manera. El planteamiento del problema está dado en la Sección 2. La propuesta del controlador para el evasor se da en la Sección 3. En la Sección 4 se presentan resultados de simulaciones. Finalmente, en la Sección 5 se incluyen algunos comentarios a manera de conclusión.

Notación: La norma euclidiana de un vector $s \in \mathbb{R}^n$ se denota como $|s|$, mientras que para una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, la norma inducida es la norma espectral, *i.e.,* $|A| = \sqrt{\lambda_{\text{máx}}(A^\top A)}$, donde $\lambda_{\text{máx}}$ es el valor propio más grande de $A^\top A$, y su espectro se escribe como $\sigma(A)$. Se dice que una función continua $\alpha : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ es de clase $\mathcal{K}$ si es estrictamente creciente y $\alpha(0) = 0$. La función $\text{sign}(x)$ se define como $\text{sign}(x) = 1$, si $x > 0$; $\text{sign}(x) = -1$, si $x < 0$; y $\text{sign}(x) = 0$, si $x = 0$. $A \prec 0$, denota a una matriz negativa definida A.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Se considera las siguientes dinámicas para el evasor y el perseguidor

$$\dot{x}_0 = u_0, \tag{1a}$$
$$\dot{x}_1 = u_1, \tag{1b}$$

donde $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ representan las trayectorias del evasor y el perseguidor respectivamente, y $u_0, u_1 \in \mathbb{R}^n$ son las respectivas señales de control. La señal de control para el perseguidor está dada por

$$u_1 = ae - K_1 x_0, \tag{2}$$

donde $e = x_0 - x_1$ es la posición relativa del evasor respecto al perseguidor, $a > 0$ es una constante positiva dada, y $K_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz positiva dada. La señal de control para el perseguidor contiene información de las trayectorias del evasor, pero no de la señal de control. Note que el objetivo de la estructura del control de perseguidor es el seguimiento al evasor. Se considera que el juego termina si el evasor alcanza el origen o el perseguidor alcanza al evasor.

Este trabajo propone diseñar una señal de control u_0 tal que el agente x_0 siempre evada de forma exitosa al perseguidor x_1, mientras intenta alcanzar el origen.

3. DISEÑO DEL CONTROL PARA EL EVASOR

La señal de control para el evasor se considera que $e \neq 0$, se propone de la siguiente manera

$$u_0 = \gamma \frac{[\text{sign}(\rho - |e|) + 1]\, e}{|e|^2} - Jx_0 - K_0 x_0, \tag{3}$$

donde $\gamma, \rho > 0$ son constantes positivas, y $J, K_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son matrices, las cuales necesitan ser diseñadas tales que el objetivo deseado sea alcanzado. De las definiciones de (1a)–(3), el sistema es discontinuo, y sus soluciones por lo tanto tienen que entenderse en el sentido de Filippov (1988) lejos de la vecindad de $e = 0$, donde la cubierta convexa de los campos vectoriales de las funciones que componen la dinámica en lazo cerrado no están acotadas. No obstante, como se mostrará más adelante, las trayectorias nunca se acercan a la singularidad $e = 0$ si las ganancias se seleccionan apropiadamente. Por lo tanto, para tener completitud, (3) se puede definir para $e = 0$ como

$$u_0 = -Jx_0 - K_0 x_0.$$

La matriz K_0 tiene el propósito de buscar la convergencia al origen, mientras que J representa la parte lineal de la dinámica del evasor introducida para escapar del perseguidor. Ambas matrices se presentan separadas en referencias futuras. Como podemos concluir de (3), este control tiene una naturaleza híbrida: si la distancia entre los agentes $|e|$ es mayor que el parámetro a diseñar ρ, entonces $u_0 = -(J + K_0)x_0$ asegura la convergencia al origen y que el comportamiento del perseguidor sea ignorado por el evasor (modo normal). Ahora bien, si $0 < |e| < \rho$, entonces la maniobra de escape se inicia proporcionalmente a $e/|e|^2$, la cual tiene una ganancia que tiende a infinito en el caso de una situación de peligro (la cual nunca debe de ocurrir si las ganancias son sintonizadas adecuadamente, como se demostrará más adelante).

https://doi.org/10.58571/CNCA.AMCA.2024.001

Todo el siguiente análisis se realiza en las coordinadas x_0 y e, con las dinámicas dadas por

$$\dot{x}_0 = \gamma \frac{[\text{sign}(\rho - |e|) + 1]\, e}{|e|^2} - Jx_0 - K_0 x_0, \tag{4a}$$

$$\dot{e} = -\Delta x_0 - ae + \gamma \frac{[\text{sign}(\rho - |e|) + 1]\, e}{|e|^2}, \tag{4b}$$

donde $\Delta = K_0 + J - K_1$. Antes de presentar el resultado principal de este trabajo, introducimos un resultado preliminar.

Lema 1. *Aplicando las entradas de control* (2) *y* (3)*, al sistema* (1)*, el origen de* (4) *es un único punto de equilibrio si y sólo si, ninguno de los valores propios generalizados del par (A, B), con $A = K_0 + J$ y $B = 2a\gamma K_1$, es real y positivo.*

Demostración. Por construcción, el origen es un equilibrio del sistema (4) para $e = 0$ y $|e| > \rho$. Los equilibrios restantes del sistema en lazo–cerrado para $0 < |e| \leq \rho$, se pueden obtener de las siguientes ecuaciones

$$0 = -(K_0 + J)x_0 + 2\gamma \frac{e}{|e|^2},$$
$$0 = -\Delta x_0 - ae + 2\gamma \frac{e}{|e|^2},$$

donde $\Delta = K_0 + J - K_1$. Resolviendo las ecuaciones antes mencionadas, se obtiene que

$$e = a^{-1} K_1 x_0, \;\; \left(|K_1 x_0|^2 (K_0 + J) - 2a\gamma K_1\right) x_0 = 0. \tag{5}$$

Se define $c = |K_1 x_0|^2$. Entonces, es posible reescribir (5) como $(cA - B)\, x_0 = 0$. Por lo tanto, como K_1 es no singular, es claro que si λ es un valor propio generalizado del par (A, B), y v es su vector propio correspondiente normalizado; entonces, $(x_0^\star, e^\star)^\top$, con $x_0^\star = \lambda^{\frac{1}{2}} v / |K_1 v|$ y $e^\star = a^{-1} K_1 x_0^\star$, es un equilibrio diferente del origen, para cada valor propio generalizado puramente real y positivo $\lambda > 0$, y su vector propio normalizado v. □

Observación 1. *Para matrices no singulares A y B, una condición suficiente que asegura que ninguno de los valores propios generalizados del par (A, B) sea real y positivo es que ninguno de los valores propios de la matriz $A^{-1}B$ sea real y positivo.*

Observación 2. *Note que para una K_1 dada, sólo pueden existir a lo más $2n$ puntos de equilibrio debido a que $|x_0^\star| = \lambda^{\frac{1}{2}} |v| / |K_1 v|$, y a que el vector unitario apuntando en la dirección de $x_0^\star$ es v. Esto define una solución única $x_0^\star$ para cada par $(\lambda,\ \pm v)$.*

El resultado principal se presenta a continuación en el siguiente Teorema.

Teorema 1. *Aplicando el control* (3) *a las dinámicas del evasor con la condición inicial satisfaciendo $|e(0)| > \rho$, considerando las matrices A y B definidas en el Lema 1 y sea $e^\star_{\text{mín}}$ la norma del $e^\star$ asociado al valor propio generalizado λ más pequeño del par (A, B). Si los parámetros del control del evasor se diseñan tal que*

$$-(K_0 + J) - (K_0 + J)^\top + 2\gamma \zeta^{\frac{1}{3}} I \preceq 0, \tag{6a}$$
$$\gamma > |K_0 + J - K_1|, \tag{6b}$$
$$\zeta > \frac{2048}{729}, \tag{6c}$$
$$\rho \leq e^\star_{\text{mín}}, \tag{6d}$$

se tiene que $\mathcal{E} := \{e \in \mathbb{R}^n : e_{\text{mín}} \leq |e| \leq e_{\text{máx}}\}$, es atractivo e invariante, con

$$e_{\text{mín}} \geq \left(\frac{36a}{\gamma(27 - 256\theta)} \sqrt{\frac{2a}{3\gamma}} \right)^{-\frac{1}{3}}, \tag{7a}$$

$$e_{\text{máx}} \leq \frac{\sqrt{\varphi_e}}{a}, \tag{7b}$$

y

$$\theta \in (0, 27/256),$$
$$\varphi_e = \text{máx}\left(|\Delta|^2 x_0^2(0), 2|\Delta|^2 x_{02\,\text{máx}}^2 + 4a\gamma\right),$$
$$x_{02\,\text{máx}} = \left(\frac{36a}{\gamma\left[27\theta\zeta - 8\gamma^{-3}|\Delta|^3\right]} \sqrt{\frac{2a}{3\gamma}} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Se omite la prueba por razón de espacio.

Es posible seleccionar ρ de manera arbitraria si además del Lema 1 se considera la siguiente restricción adicional.

Corolario 1. *Aplicando el controlador* (3) *al evasor, con los parámetros tales que* (6a), (6b), *y* (6c) *se cumplan, y $\sigma(M) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset$, con $M = 2a\gamma(K_0 + J)^{-1} K_1$; entonces, para cualquier $\rho > 0$, el agente x_0 evadirá al perseguidor x_1 con un error de seguimiento e satisfaciendo* (7).

Observación 3. *Para el caso del Corolario 1, el único equilibrio para el sistema* (4) *es el origen. Sin embargo, el origen nunca puede ser alcanzado. Adicionalmente, puesto que ρ es arbitrario; entonces, la distancia entre los agentes es arbitraria, no está restringida.*

4. SIMULACIONES

Para $n = 2$ las simulaciones se llevaron a cabo en MATLAB, usando el método de discretización de Euler explícito y con un paso de integración igual a 0.001[s], mientras que la solución de la LMI se obtuvo por medio de SDPT3 y YALMIP. Para empezar se muestra el caso en el que los agentes se quedan inmóviles *i.e.,* cuando las condiciones iniciales se toman en un punto de equilibrio diferente al origen. La señal de control del perseguidor U_1 dada en (2) con $a = 1$ y $K_1 = 10I_2$.

Por otro lado, el control del evasor u_0 se diseña de acuerdo al Teorema 1 *i.e.,* seleccionando $\zeta = 2.8121$, se obtiene la solución de la LMI (6a), satisfaciendo (6b), y fijando los parámetros para el controlador $K_0 = 10.1108 I_2$, $J = 9.2155 I_2$, y $\gamma = 10.5264$. Entonces, se obtiene $v = (-0.1608, -0.1608)^\top$, $\lambda = 10.4629$; por lo tanto, $x_0^\star = \lambda^{\frac{1}{2}} v / |K_1 v| = (-0.2287, -0.2287)^\top$ y $e^\star = a^{-1} K_1 x_0^\star = (-2.2872, -2.2872)^\top$, lo que implica que $e^\star_{\text{mín}} = 3.2346$. De esta manera, seleccionando $\rho = 3.3$, se tiene $\rho > e^\star_{\text{mín}}$.

Se consideran las condiciones iniciales para el evasor y el perseguidor en $x_0(0) = x_0^\star$ y $x_1(0) = x_0^\star - e^\star$, respectiva-

https://doi.org/10.58571/CNCA.AMCA.2024.001

mente. Los resultados de las simulaciones se muestran en Fig. 1, donde se puede ver en el plano tanto del evasor como del perseguidor, respectivamente. Está claro que ambos agentes se mantienen fijos en el punto de equilibrio fuera del origen. A pesar de esto, y con base en lo establecido en el Teorema 1, es posible modificar el valor de ρ para evitar este problema.

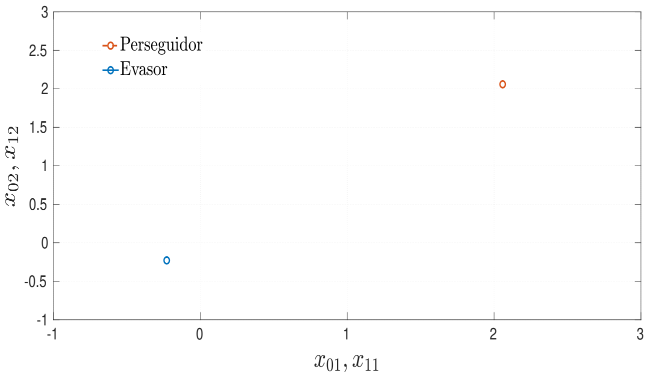

Figura 1. Plano – Punto de Equilibrio

La señal del perseguidor u_1 está dada como en (2) con $a = 1$ y $K_1 = 10I_2$, mientras que la señal del evasor u_0 se diseña de acuerdo al Teorema 1, *i.e.,* seleccionando $\zeta = 2.8121$, se obtiene la solución de la LMI (6a), satisfaciendo (6b), y obteniendo los siguientes parámetros para el controlador: $K_0 = J = 9.9751I_2$ y $\gamma = 10.5264$. Claramente $\sigma(M) = \{0.0238, 0.0238\}$, y por tanto $\sigma(M) \cap \mathbb{R}_+ \neq \emptyset$, lo que implica que las condiciones del Corolario 1 no se satisfacen. Sin embargo, se tiene que $e^\star_{\text{mín}} = 3.2485$, y por tanto con base en lo establecido en el Teorema 1, se puede asegurar la evasión si la condición $\rho \leq e^\star_{\text{mín}}$ se cumple. Para este caso, se toma $\rho = 0.25$.

Se consideran las condiciones iniciales para el evasor y el perseguidor $x_0(0) = (2.3, 2)^\top$ y $x_1(0) = (2, 2)^\top$, respectivamente. Los resultados de la simulación se muestran en Figs. 2–4. En la Fig. 2 se muestra el plano para el evasor y el perseguidor, respectivamente. Es evidente que el evasor escapa del perseguidor y alcanza el origen; entonces, el juego termina. La evolución de las trayectorias del evasor y perseguidor se muestran en Fig. 3, donde es posible apreciar que el evasor mantiene una distancia respecto al perseguidor. Finalmente, las señales de control respectivas para el evasor y el perseguidor se ilustran en la Fig. 4. Está claro que el evasor requiere de mayor esfuerzo para escapar del perseguidor.

Ahora, para ilustrar el efecto de la ganancia J, se selecciona como

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La señal del perseguidor u_1 dada como en (2) con $a = 1$ y $K_1 = 10I_2$, mientras que la señal del evasor (3) se diseña de acuerdo con el Teorema 1 *i.e.,* seleccionando $\zeta = 2.8121$, se obtiene la solución de (6a), satisfaciendo (6b), y se obtienen los siguientes parámetros: $K_0 = 13.0094I_2$, y $\gamma =$

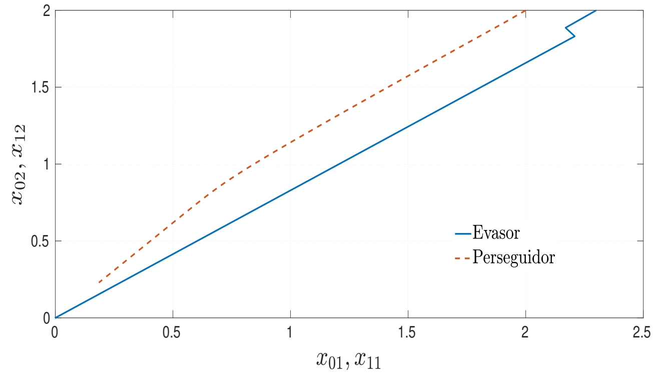

Figura 2. Plano

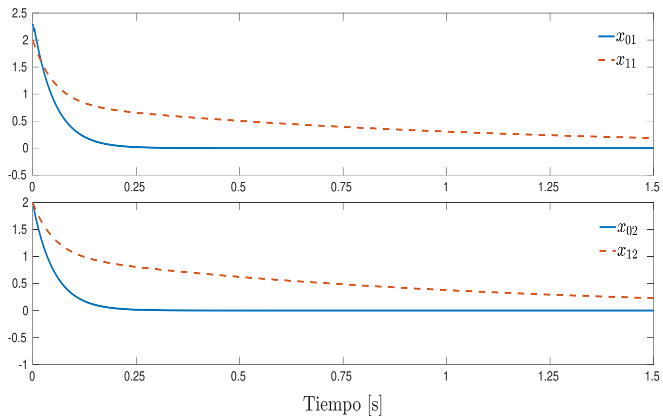

Figura 3. Evolución en el Tiempo de las Trayectorias

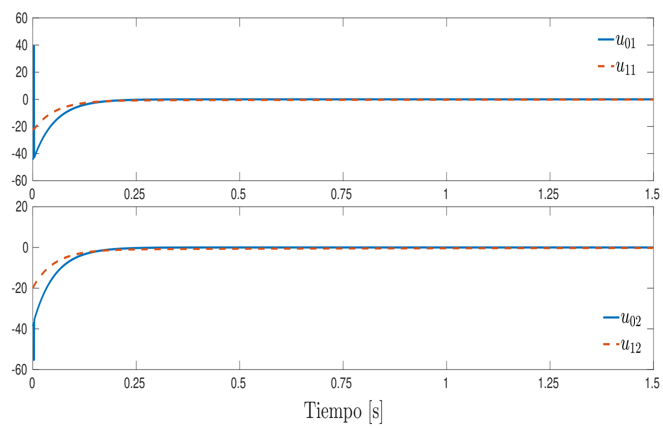

Figura 4. Señales de Control

5.9709. Claramente $\sigma(M) = \{0.0640 + 0.0049j, 0.0640 - 0.0049j\}$, y por tanto $\sigma(M) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset$, lo que implica que las condiciones del Corolario 1 se cumplen. En este caso, el valor de $\rho = 0.1$ es seleccionado de forma arbitraria y la evasión se asegura.

Se asumen las condiciones iniciales para el evasor y el perseguidor $x_0(0) = (2.3, 2)^\top$ y $x_1(0) = (2, 2)^\top$, respectivamente. Los resultados de la simulación se muestran en Figs. 5–7. Los planos para el evasor y el perseguidor se

https://doi.org/10.58571/CNCA.AMCA.2024.001

muestran en la Fig. 5. Una vez más, el evasor escapa del perseguidor pero, debido a la estructura de J, el valor de la distancia entre los agentes es arbitrario. La evolución en el tiempo de las trayectorias del evasor y el perseguidor se muestran en Fig. 6. Las señales de control se muestran en Fig. 7.

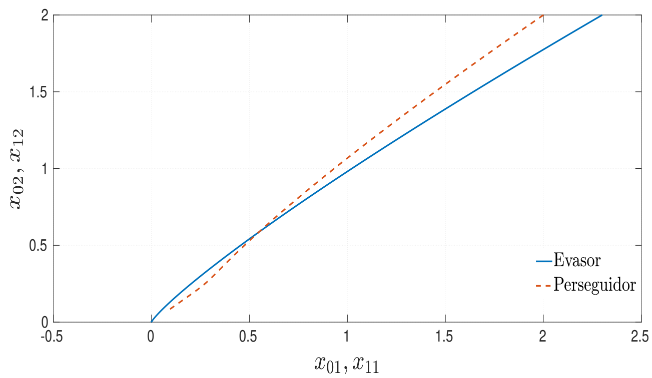

Figura 5. Plano – J como un parámetro libre

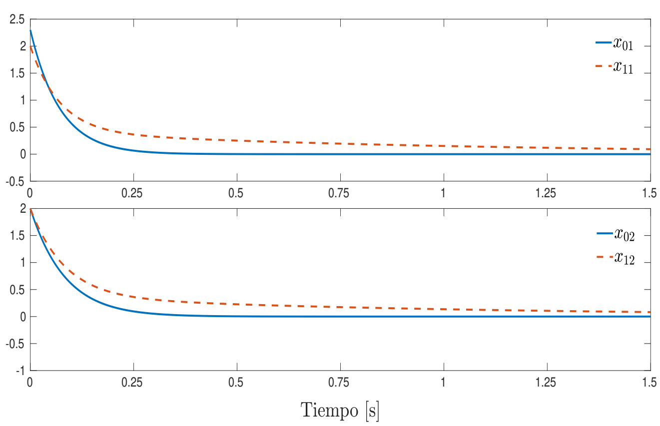

Figura 6. Evolución en el Tiempo de las Trayectorias – J como parámetro libre

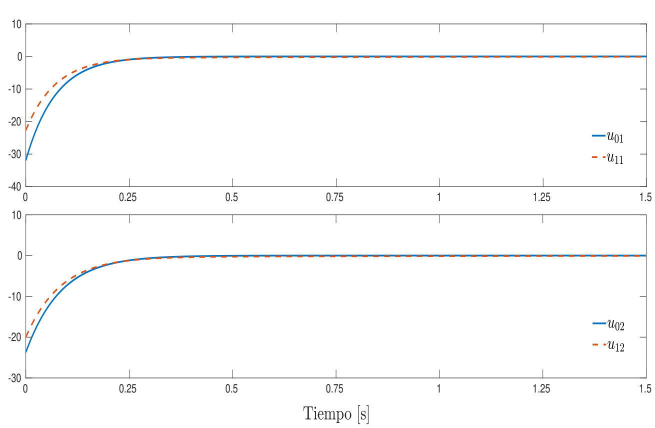

Figura 7. Señales de Control – J como parámetro libre

5. CONCLUSIONES

En este trabajo, se propone un novedoso controlador para el problema de persecución–evasión, donde ambos agentes se describen con dinámicas de un sólo integrador. El controlador propuesto para el evasor no requiere de conocimiento alguno de la ley de control del perseguidor, sólo de su estado. El control garantiza la evasión bajo el diseño y selección adecuados de los parámetros del controlador del evasor, la cual es constructiva y simple de sintonizar debido a que queda en términos de una LMI. El acotamiento del error de seguimiento y las trayectorias del evasor se asegura con base en funciones tipo Lyapunov. La efectividad del diseño de ley de control para el evasor se ilustra por medio de simulaciones.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto fue apoyado en parte por el proyecto SEP–CONACYT–ANUIES–ECOS NORD Project 315597 y el proyecto ECOS NORD M20M04. El trabajo de Manuel Mera fue apoyado en parte por el proyecto IPN–SIP 20240338. El trabajo de Héctor Ríos fue apoyado en parte por el CONAHCYT, Investigadoras e Investigadores por México, CVU 270504 Proyecto 922 y en parte por Proyectos TecNM.

REFERENCIAS

Chaudhari, A. y Chakraborty, D. (2022). A time–optimal feedback control for a particular case of the game of two cars. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 67(4), 1806–1821.

Chen, M., Zhou, Z., y Tomlin, C.J. (2017). Multiplayer reach–avoid games via pairwise outcomes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(3), 1451–1457.

Evans, L.C. y Souganidis, P.E. (1984). Differential games and representation formulas for solutions of Hamilton–Jacobi–Isaacs equations. *Indiana University Mathematics Journal*, 33(5), 773–797.

Filippov, A.F. (1988). *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides.* Kluwer.

Fuchs, Z.E. y Khargonekar, P.P. (2017). Generalized engage or retreat differential game with escort regions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(2), 668–681.

Garcia, E., Casbeer, D.W., Moll, A.V., y Pachter, M. (2021). Multiple pursuer multiple evader differential games. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 66(5), 2345–2350.

Isaacs, R. (1965). *Differential Games: A Mathematical Theory with Applications to Warfare and Pursuit, Control and Optimization.* Dover Publications, New York, USA.

Kothari, M., Manathara, J.G., y Postlethwaite, I. (2017). Cooperative multiple pursuers against a single evader. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 86(3-4), 551–567.

Lopez, V.G., Lewis, F.L., Wan, Y., Sanchez, E.N., y Fan, L. (2020). Solutions for multiagent pursuit–evasion games on communication graphs: Finite–time capture and asymptotic behaviors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 65(5), 1911–1922.

Margellos, K. y Lygeros, J. (2011). Hamilton–Jacobi formulation for reach–avoid differential games. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(8), 1849–1861.

Margellos, K. y Lygeros, J. (2009). Air traffic management with target windows: An approach using reachability. In *Proceedings of the 48h IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 2009 28th Chinese Control Conference*, 145–150. Shanghai, China.

Moll, A.V., Casbeer, D., Garcia, E., Milutinović, D., y Pachter, M. (2019). The multi–pursuer single–evader game. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 96(2), 193–207.

Nath, S. y Ghose, D. (2022). A two–phase evasive strategy for a pursuit–evasion problem involving two non–holonomic agents with incomplete information. *European Journal of Control*, 68, 100677.

Pachter, M. (2012). Isaacs' two–on–one pursuit–evasion game. In D.M. Ramsey y J. Renault (eds.), *Advances in Dynamic Games*, volume 17 of *Annals of the International Society of Dynamic Games*, chapter 2, 27–57. Birkhäuser, Cham, Berlin Heidelberg.

Pachter, M. y Getz, W.M. (1980). The geometry of the barrier in the game of two cars. *Optimal Control Applications and Methods*, 1(2), 103–118.

Sun, Z., Sun, H., Li, P., y Zou, J. (2022). Cooperative strategy for pursuit–evasion problem with collision avoidance. *Ocean Engineering*, 266(Part 2), 112742.

Tian, Z., Danino, M., Bar-Shalom, Y., y Milgrom, B. (2023). Missile threat detection and evasion maneuvers with countermeasures for a low–altitude aircraft. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 59(6), 7352–7362.

Zhang, Z.X., Zhang, K., Xie, X.P., y Sun, J.Y. (2024). Fixed–time zero–sum pursuit–evasion game control of multi–satellite via adaptive dynamic programming. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*. DOI: 10.1109/TAES.2024.3351810.

Zhou, Z., Ding, J., Huang, H., Takei, R., y Tomlin, C. (2018). Efficient path planning algorithms in reach–avoid problems. *Automatica*, 89, 28–36.