

# Finite-time controller for robot bilateral teleoperation <sup>\*</sup>

Lazaro F. Torres <sup>\*</sup>   Carlos I. Aldana <sup>\*</sup>   Emmanuel Nuño <sup>\*</sup>  
Emmanuel Cruz-Zavala <sup>\*</sup>

<sup>\*</sup> Computer Science Department, CUCEI, University of Guadalajara,  
Guadalajara, Mexico

E-mails: {ivan.aldana; emmanuel.nuno}@academicos.udg.mx

---

**Abstract:** In this paper, a modification of the classical proportional plus damping injection control scheme is proposed to solve the bilateral teleoperation problem in finite-time for fully actuated Euler-Lagrange systems in the joint space. In order to prove finite-time convergence, the controller is designed to provide global asymptotic stability and then, by properly designing the control parameters, the closed-loop system is proved to admit a homogeneous approximation of negative degree. Simulation results with a teleoperation system composed of two robots with six degrees of freedom are given to show the effectiveness of the proposed scheme.

*Keywords:* Euler-Lagrange (EL) systems, bilateral teleoperation, finite-time (FT) control, proportional-derivative (PD) control.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Por sistema de teleoperación bilateral se entiende la interconexión entre un robot manipulador local y uno remoto. En este sistema, el manipulador local está sujeto a fuerzas externas producidas por un operador humano, mientras que el manipulador remoto interactúa con fuerzas generadas por el ambiente. Hoy en día, la teleoperación de sistemas robóticos es un área de particular interés en la ingeniería debido a su gran cantidad de aplicaciones, entre las que se incluyen la industria espacial, medicina, la exploración submarina, la manipulación de materiales peligrosos y la asistencia en entornos de desastre (Huh et al., 2011; Weber et al., 2019; Lv et al., 2020; Basañez et al., 2023; Ebrahimian et al., 2024).

En la literatura se encuentran trabajos que proponen controladores asintóticos para resolver el problema fundamental de teleoperación, que consiste en lograr la convergencia a cero del error entre la posición del robot local y la posición del robot remoto. Esto se logra bajo diferentes condiciones de los sensores y actuadores de los robots, así como de las propiedades del canal de comunicación que los conecta (Nuño et al., 2011; Aldana et al., 2023; Gutierrez-Giles et al., 2024).

Además de los controladores asintóticos, en la literatura también se encuentran propuestas de controladores en tiempo finito para sistemas de teleoperación. Estos con-

troladores, aparte de asegurar la convergencia, ofrecen en general una mayor robustez, respuestas transitorias más rápidas y mejor precisión que los controladores asintóticos convencionales. Existen trabajos de control en tiempo finito que abordan el problema de teleoperación a través de controladores que requieren el uso de mediciones de aceleración (Yang et al., 2016) y torque (Venkateswaran and Qu, 2020), sin embargo, en la gran mayoría de los sistemas no se tiene acceso a estas señales. Por otro lado, muchos de los trabajos que proponen esquemas de control en tiempo finito solo les es posible asegurar convergencia del error a una vecindad del origen (Dao et al., 2021; Zhai and Xia, 2014; Wang et al., 2020). Algunos trabajos que pueden asegurar la convergencia del error a cero en tiempo finito utilizan controladores que se basan en técnicas de control discontinuo. Estas técnicas tienden a generar una acción de control agresiva, lo que termina por degradar los actuadores del sistema (Zhang et al., 2018; Wang et al., 2018).

En este trabajo, se propone un controlador continuo que cancela la gravedad y que tiene un término proporcional al error y otro de inyección de amortiguamiento (P+d). La propuesta de control permite resolver el problema de teleoperación en tiempo finito en el espacio articular para sistemas compuestos por robots manipuladores con articulaciones de revolución completamente actuadas. Bajo la hipótesis de que el ambiente remoto y el operador humano definen mapas pasivos de velocidad a fuerza, se demuestra que mientras existan fuerzas externas actuando en el sistema el error de posición entre el robot local y el robot remoto, así como sus velocidades, se mantienen

---

<sup>\*</sup> Este trabajo fue apoyado por el proyecto CONAHCYT de Ciencia Básica y de Frontera CBF2023-2024-1964. El trabajo de Lazaro F. Torres fue apoyado por la beca CONAHCYT 1319340.

acotados. Por otro lado, cuando no hay fuerzas externas, tanto el error de posición como las velocidades convergen a cero en tiempo finito. Además, se presentan resultados de simulación de un sistema de teleoperación compuesto por dos robots industriales de 6 grados de libertad, en los que se observa el buen comportamiento del esquema de control propuesto.

## 2. PRELIMINARES

Este artículo utiliza la siguiente *notación*.  $\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$ ,  $\mathbb{R}_{>0} := (0, \infty)$ ,  $\mathbb{R}_{\geq 0} := [0, \infty)$ ,  $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$  y  $\bar{n} := \{1, 2, \dots, n\}$  para  $n \in \mathbb{N}$ . Para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|x|$  es su valor absoluto. Para  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  y cualquier  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\|\mathbf{x}\|$  hace referencia a la norma Euclidiana. Para cualquier  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $B_\delta := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \|\mathbf{x}\| < \delta\}$  y  $S_\delta^{m-1} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \|\mathbf{x}\| = \delta\}$  es una bola abierta y una esfera de dimensión  $m - 1$ , centrada en el origen con radio  $\delta$ , respectivamente. Una función  $\mathbf{f}(t) : \mathbb{R}_{\geq 0} \mapsto \mathbb{R}^m$  se dice que es de clase  $\mathcal{C}^k$ , para  $k \in \mathbb{N}$ , si sus derivadas  $\dot{\mathbf{f}}, \ddot{\mathbf{f}}, \dots, \mathbf{f}^{(k)}$  existen y son continuas.

Para cualquier  $x \in \mathbb{R}$  y cualquier  $p > 0$ , definimos la función *potencia signada*  $[x]^p : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  como una función impar estrictamente creciente dada por  $[x]^p := |x|^p \text{sign}(x)$ , donde  $\text{sign}(x)$  es la función *signo*, y tiene las siguientes propiedades:

*P1:* Para cada  $p \in [0, 1)$ ,  $[x]^p$  es diferenciable para todo  $x \neq 0$ ,  $[x]^p \in \mathcal{C}^1$  si  $p \in [1, 2]$  y  $[x]^p \in \mathcal{C}^2$  si  $p \in (2, \infty)$ .

*P2:*  $\partial_x [x]^p = p|x|^{p-1}$  y  $\partial_x |x|^p = p[x]^p, \forall x \neq 0$ .

### 2.1 Homogeneidad y estabilidad en tiempo finito

Considere un sistema dinámico descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (1)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  es el vector de estados,  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$  es el campo vectorial continuo asociado y  $m \in \mathbb{N}$ . Asuma que el origen es un punto de equilibrio, i.e.  $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .

*Definición 1.* El origen de (1) es estable en tiempo finito (FTS, por sus siglas en inglés) si es estable en el sentido de Lyapunov y si existe una función localmente acotada  $T : B_\delta \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}$  (llamada la función de tiempo de asentamiento) tal que para cada  $\mathbf{x}_0 \in B_\delta \setminus \{\mathbf{0}\}$ , cualquier solución  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$  de (1) está definida en  $t \in [0, T(\mathbf{x}_0))$  y  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$  para todo  $t \geq T(\mathbf{x}_0)$ . Si  $B_\delta = \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  es globalmente FTS (Bhat and Bernstein, 2000, 2005).  $\triangleleft$

*Definición 2.* Déjenos definir  $r_i > 0$ ,  $i \in \bar{m}$ , como los pesos de los elementos  $x_i$  de  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  y el vector de pesos como  $\mathbf{r} := [r_1, \dots, r_m]^\top \in \mathbb{R}^m$ . Además  $\Delta_\epsilon^{\mathbf{r}}$  está definido como el operador de dilatación, tal que  $\Delta_\epsilon^{\mathbf{r}} \mathbf{x} := [\epsilon^{r_1} x_1, \dots, \epsilon^{r_m} x_m]^\top$ . Una función  $V : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$  (resp. un campo vectorial  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ ) se dice que es  $\mathbf{r}$ -homogéneo de grado  $l \in \mathbb{R}$ , o  $(\mathbf{r}, l)$ -homogéneo, si para todo  $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  y para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  se verifica la igualdad  $V(\Delta_\epsilon^{\mathbf{r}} \mathbf{x}) = \epsilon^l V(\mathbf{x})$  (resp.,  $\mathbf{f}(\Delta_\epsilon^{\mathbf{r}} \mathbf{x}) = \epsilon^l \Delta_\epsilon^{\mathbf{r}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ). El sistema (1) es llamado  $(\mathbf{r}, l)$ -homogéneo si el campo vectorial  $\mathbf{f}$  es  $(\mathbf{r}, l)$ -homogéneo (Bacciotti and Rosier, 2005).  $\triangleleft$

*Lemma 1.* Considere el sistema (1) con  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_H(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_{NH}(\mathbf{x})$ . Suponga que  $\mathbf{f}_H(\mathbf{x})$  es un campo vectorial continuo  $(\mathbf{r}, l)$ -homogéneo tal que  $\mathbf{f}_H(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  es un punto de equilibrio localmente asintóticamente estable (AS) de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_H(\mathbf{x})$ . Asuma que  $\mathbf{f}_{NH}(\mathbf{x})$  es un campo vectorial continuo tal que  $\mathbf{f}_{NH}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  y la siguiente *condición de desvanecimiento*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-(l+r_i)} f_{NH_i}(\Delta_\epsilon^{\mathbf{r}} \mathbf{x}) = 0,$$

se satisface uniformemente con respecto a  $\mathbf{x} \in S_\delta^{m-1}$  para  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$  y todo  $i \in \bar{m}$ . Entonces, el origen de (1) es localmente AS. Además, si  $l = 0$  y todo  $r_i = 1$ , el origen es localmente exponencialmente estable (ES); y si  $l < 0$ , el origen es localmente FTS (Bacciotti and Rosier, 2005).  $\triangleleft$

*Lemma 2.* Suponga que el sistema (1) admite una aproximación homogénea de la forma  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_H(\mathbf{x})$  tal que el campo vectorial  $\mathbf{f}_H(\mathbf{x})$  es  $(\mathbf{r}, l)$ -homogéneo y  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  es AS. Además, si  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  del sistema (1) es globalmente AS, entonces, el origen de (1) es globalmente AS y localmente ES si  $l = 0$  y  $r_i = 1$ ; y el origen es globalmente FTS si  $l < 0$ .  $\triangleleft$

*Observación 1.* En las pruebas de convergencia, el sistema en lazo cerrado se puede escribir en la forma (1), y siempre se puede separar en términos homogéneos y no homogéneos. Entonces,  $\mathbf{f}_H(\mathbf{x})$  siempre se puede encontrar de forma que el sistema (1) es transformado a  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_H(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_{NH}(\mathbf{x})$ . En este caso,  $\mathbf{f}_{NH}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}_H(\mathbf{x})$ , y la *condición de desvanecimiento* es equivalente a  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{\mathbf{x} \in S_\delta^{m-1}} \|\epsilon^{-l} (\Delta_\epsilon^{\mathbf{r}})^{-1} \mathbf{f}(\Delta_\epsilon^{\mathbf{r}} \mathbf{x}) - \mathbf{f}_H(\mathbf{x})\| = 0$ .

### 2.2 Modelo dinámico del sistema de teleoperación

El robot local y el robot remoto que conforman el sistema de teleoperación se modelan como un conjunto de eslabones conectados en serie con  $n$ -articulaciones de revolución completamente actuadas que permiten el movimiento en  $n$ -grados de libertad (GDL). Las ecuaciones de Euler-Lagrange que describen el movimiento de cada robot son las siguientes:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_l(\mathbf{q}_l) \ddot{\mathbf{q}}_l + \mathbf{C}_l(\mathbf{q}_l, \dot{\mathbf{q}}_l) \dot{\mathbf{q}}_l + \nabla_{\mathbf{q}_l} \mathcal{U}_l(\mathbf{q}_l) &= \boldsymbol{\tau}_l + \boldsymbol{\tau}_h \\ \mathbf{M}_r(\mathbf{q}_r) \ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}_r(\mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_r) \dot{\mathbf{q}}_r + \nabla_{\mathbf{q}_r} \mathcal{U}_r(\mathbf{q}_r) &= \boldsymbol{\tau}_r + \boldsymbol{\tau}_e \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $\ddot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_i$  y  $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^n$  con  $i \in \{l, r\}$  son la aceleración, velocidad, y posición articular, respectivamente.  $\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercia,  $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de Coriolis y fuerzas centrífugas, definida a través de los símbolos de Christoffel del primer tipo,  $\mathcal{U}_i$  es la energía potencial de cada robot,  $\boldsymbol{\tau}_i \in \mathbb{R}^n$  son las señales de control,  $\boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{R}^n$  y  $\boldsymbol{\tau}_e \in \mathbb{R}^n$  son los torques aplicados a las articulaciones debido a las fuerzas producidas por el operador humano y la interacción con el ambiente, respectivamente. Este trabajo utiliza las siguientes propiedades:

*P3:* Existen constantes estrictamente positivas  $m_{1i}$  y  $m_{2i}$ , tal que  $m_{1i} \leq \mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i) \leq m_{2i}$ ,  $\forall \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^n$  para  $i \in \{l, r\}$ .

P4: La matriz  $\dot{\mathbf{M}}_i(\mathbf{q}_i) - 2\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$  es antisimétrica y existe  $L_{ci} > 0$  tal que  $\|\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i\| \leq L_{ci}\|\dot{\mathbf{q}}_i\|^2$ .

Hipótesis 1: Se asume que el operador humano y el ambiente definen mapas pasivos (velocidad a fuerza), esto es, existe  $\kappa_i \in \mathbb{R}_{>0}$  tal que

$$\int_0^t \dot{\mathbf{q}}_l^\top(\sigma)\boldsymbol{\tau}_h(\sigma)d\sigma \leq \kappa_l, \quad \int_0^t \dot{\mathbf{q}}_r^\top(\sigma)\boldsymbol{\tau}_e(\sigma)d\sigma \leq \kappa_r \quad (3)$$

para todo  $t \geq 0$ .

La Hipótesis 1 es ubicua en la literatura del control de sistemas de teleoperación por medio de técnicas basadas en pasividad (Nuño et al., 2011).

### 3. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA Y CONTROLADOR PROPUESTO

Para un sistema de teleoperación como el definido en (2), se desea diseñar un controlador que haga que las velocidades y el error de posición se mantengan acotados (i.e.,  $\mathbf{q}_l - \mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_l, \dot{\mathbf{q}}_r \in \mathcal{L}_\infty$ ); cuando no hay fuerzas externas (i.e.  $\boldsymbol{\tau}_h = \boldsymbol{\tau}_e = 0$ ), ambos robots tienen que alcanzar una posición de consenso en tiempo finito, esto es, existe una posición constante  $\mathbf{q}_* \in \mathbb{R}^n$  tal que:

$$\lim_{t \rightarrow T_i(\mathbf{q}_i(0), \dot{\mathbf{q}}_i(0))} \mathbf{q}_i(t) = \mathbf{q}_*, \quad \lim_{t \rightarrow T_i(\mathbf{q}_i(0), \dot{\mathbf{q}}_i(0))} |\dot{\mathbf{q}}_i(t)| = 0, \quad (4)$$

donde  $i := \{l, r\}$  y  $T_i(\mathbf{q}_i(0), \dot{\mathbf{q}}_i(0)) < \infty$  es el tiempo de asentamiento. Para resolver estos problemas se propone la ley de control dada por:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_l &= -K_l[\mathbf{q}_l - \mathbf{q}_r]^{p_U} - B_l[\dot{\mathbf{q}}_l]^{p_F} + \nabla_{\mathbf{q}_l}\mathcal{U}_l(\mathbf{q}_l) \\ \boldsymbol{\tau}_r &= -K_r[\mathbf{q}_r - \mathbf{q}_l]^{p_U} - B_r[\dot{\mathbf{q}}_r]^{p_F} + \nabla_{\mathbf{q}_r}\mathcal{U}_r(\mathbf{q}_r) \end{aligned} \quad (5)$$

donde  $K_l, B_l, K_r, B_r \in \mathbb{R}_{>0}$  son las ganancias del controlador. Los exponentes  $p_U$  y  $p_F$  están definidos como:

$$p_U = \frac{2r_2 - r_1}{r_1}, \quad p_F = \frac{2r_2 - r_1}{r_2} \quad (6)$$

con  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_{>0}$  que satisfacen lo siguiente

$$2r_2 > r_1 > r_2 > 0. \quad (7)$$

Los controladores aquí planteados solucionan el problema de teleoperación en presencia de fuerzas externas. Además, cuando no hay fuerzas externas, este mismo controlador asegura que ambos robots alcancen una posición de consenso, esto es,

$$(\mathbf{q}_l - \mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_l, \dot{\mathbf{q}}_r) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \quad (8)$$

la cual es un punto de equilibrio globalmente estable en tiempo finito. A continuación, se presenta el resultado principal de este trabajo.

Proposición 1: Considere el sistema de teleoperación (2) controlado por (5) con  $\boldsymbol{\tau}_h$  y  $\boldsymbol{\tau}_e$  cumpliendo con (3), si se elige  $p_U$  y  $p_F$  como en (6) y (7), entonces:

- El error de posición y la velocidad se mantienen acotados.
- Además, si  $\boldsymbol{\tau}_h = 0$  y  $\boldsymbol{\tau}_e = 0$ , el punto de equilibrio (8) es globalmente estable en tiempo finito.

▷

Prueba: Considere la siguiente función no-negativa:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\mathbf{q}_l - \mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_l, \dot{\mathbf{q}}_r) &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}_l^\top \mathbf{M}_l \dot{\mathbf{q}}_l + \frac{K_l}{2K_r}\dot{\mathbf{q}}_r^\top \mathbf{M}_r \dot{\mathbf{q}}_r \\ &+ \frac{K_l}{p_U + 1}(\mathbf{q}_l - \mathbf{q}_r)^\top [\mathbf{q}_l - \mathbf{q}_r]^{p_U} + \kappa_l + \frac{K_l}{K_r}\kappa_r \\ &- \int_0^t \left( \dot{\mathbf{q}}_l^\top(\sigma)\boldsymbol{\tau}_h(\sigma) + \frac{K_l}{K_r}\dot{\mathbf{q}}_r^\top(\sigma)\boldsymbol{\tau}_e(\sigma) \right) d\sigma. \end{aligned} \quad (9)$$

Usando la propiedad P4 y evaluando (9) a lo largo de las trayectorias del sistema (2), se obtiene:

$$\dot{\mathcal{V}} = -B_l\dot{\mathbf{q}}_l^\top [\dot{\mathbf{q}}_l]^{p_F} - \frac{K_l}{K_r}B_r\dot{\mathbf{q}}_r^\top [\dot{\mathbf{q}}_r]^{p_F} \leq 0 \quad (10)$$

Ahora, se integra  $\dot{\mathcal{V}}$  desde 0 hasta  $t$ :

$$\mathcal{V}(t) - \mathcal{V}(0) = - \int_0^t \left( B_l\dot{\mathbf{q}}_l^\top [\dot{\mathbf{q}}_l]^{p_F} + \frac{K_l}{K_r}B_r\dot{\mathbf{q}}_r^\top [\dot{\mathbf{q}}_r]^{p_F} \right) d\sigma. \quad (11)$$

Como el término dentro de la integral en (11) es siempre no-negativo, es posible encontrar una cota superior para  $\mathcal{V}(t)$  de la siguiente manera:

$$\mathcal{V}(t) \leq \mathcal{V}(0) < \infty$$

lo cual implica que  $\mathbf{q}_l - \mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_l, \dot{\mathbf{q}}_r \in \mathcal{L}_\infty$ . Ésto último prueba la conclusión a) de la Proposición 1. Para probar la parte b), se propone la siguiente función no-negativa:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\mathbf{q}_l - \mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_l, \dot{\mathbf{q}}_r) &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}_l^\top \mathbf{M}_l \dot{\mathbf{q}}_l + \frac{K_l}{2K_r}\dot{\mathbf{q}}_r^\top \mathbf{M}_r \dot{\mathbf{q}}_r \\ &+ \frac{K_l}{p_U + 1}(\mathbf{q}_l - \mathbf{q}_r)^\top [\mathbf{q}_l - \mathbf{q}_r]^{p_U} \end{aligned} \quad (12)$$

cuya derivada en el tiempo da como resultado la misma expresión que en (10). Ahora, el sistema en lazo cerrado dado por (2) y (5) se puede expresar en su representación en espacio de estados  $\Sigma : \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  de la siguiente manera:

$$\Sigma := \begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l = \dot{\mathbf{q}}_l \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r = \dot{\mathbf{q}}_r \\ \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_l = -\mathbf{M}_l^{-1}(\tilde{\mathbf{q}}_l + \mathbf{q}_*) \left[ K_l[\tilde{\mathbf{q}}_l - \tilde{\mathbf{q}}_r]^{p_U} + B_l[\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l]^{p_F} + \mathbf{C}_l(\tilde{\mathbf{q}}_l + \mathbf{q}_*, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l)\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l \right] \\ \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_r = -\mathbf{M}_r^{-1}(\tilde{\mathbf{q}}_r + \mathbf{q}_*) \left[ K_r[\tilde{\mathbf{q}}_r - \tilde{\mathbf{q}}_l]^{p_U} + B_r[\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r]^{p_F} + \mathbf{C}_r(\tilde{\mathbf{q}}_r + \mathbf{q}_*, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r)\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r \right] \end{cases} \quad (13)$$

donde  $\tilde{\mathbf{q}}_l = \mathbf{q}_l - \mathbf{q}_*$  y  $\tilde{\mathbf{q}}_r = \mathbf{q}_r - \mathbf{q}_*$  son los errores de posición entre cada robot y la posición de consenso. Después, usando el Principio de Invarianza de Krasovskii-LaSalle se concluye que (8) es un punto de equilibrio globalmente AS de  $\Sigma$ .

Ahora, separamos  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  en términos homogéneos y no homogéneos, de forma que  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_H(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_{NH}(\mathbf{x})$ , donde  $\mathbf{f}_H(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  debe ser un punto de equilibrio AS del sistema homogéneo  $\Sigma_H : \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_H(\mathbf{x})$  y ser homogéneo de grado negativo. Entonces,  $\Sigma_H$  se propone de la siguiente manera

$$\Sigma_H := \begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l = \dot{\mathbf{q}}_l \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r = \dot{\mathbf{q}}_r \\ \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_l = -\mathbf{M}_l^{-1}(\mathbf{q}_*) \left[ K_l [\tilde{\mathbf{q}}_l - \tilde{\mathbf{q}}_r]^{p\mu} + B_l [\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l]^{p\mathcal{F}} \right] \\ \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_r = -\mathbf{M}_r^{-1}(\mathbf{q}_*) \left[ K_r [\tilde{\mathbf{q}}_r - \tilde{\mathbf{q}}_l]^{p\mu} + B_r [\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r]^{p\mathcal{F}} \right]. \end{cases} \quad (14)$$

asignando los pesos de homogeneidad  $\mathbf{r} = [r_1 \ r_2 \ r_2 \ r_2]$  al campo vectorial, resulta que  $\Sigma_H$  es  $(\mathbf{r}, r_2 - r_1)$ -homogéneo y, si (7) se cumple, es homogéneo de grado negativo. Entonces, para probar que  $\mathbf{f}_H(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  es AS, se presenta la siguiente función de Lyapunov:

$$\mathcal{V}_H = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l^\top \mathbf{M}_l(\mathbf{q}_*) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l + \frac{K_l}{2K_r} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r^\top \mathbf{M}_r(\mathbf{q}_*) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r + \frac{K_l}{p\mu + 1} (\mathbf{q}_l - \mathbf{q}_r)^\top [\mathbf{q}_l - \mathbf{q}_r]^{p\mu} \quad (15)$$

cuya derivada en el tiempo está dada por:

$$\dot{\mathcal{V}}_H = -B_l \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l^\top [\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l]^{p\mathcal{F}} - \frac{K_l}{K_r} B_r \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r^\top [\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r]^{p\mathcal{F}} \leq 0 \quad (16)$$

y, con el Principio de Invarianza de Krasovskii-LaSalle se concluye que (8) es AS. Para probar que  $\Sigma_H$  es una aproximación homogénea de  $\Sigma$ , solo falta probar que los términos no homogéneos  $\mathbf{f}_{NH}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}_H(\mathbf{x})$  satisfacen la *condición de desvanecimiento*. Como  $\mathbf{f}_{NH1} = 0$  y  $\mathbf{f}_{NH2} = 0$ , es claro que estos términos ya la satisfacen. Entonces, a través de manipulaciones algebraicas,  $\mathbf{f}_{NH3}$  se puede expresar como:

$$\mathbf{f}_{NH3} = - \left[ \mathbf{M}_l^{-1}(\tilde{\mathbf{q}}_l + \mathbf{q}_*) - \mathbf{M}_l^{-1}(\mathbf{q}_*) \right] \left[ K_l [\tilde{\mathbf{q}}_l - \tilde{\mathbf{q}}_r]^{p\mu} + B_l [\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l]^{p\mathcal{F}} \right] - \mathbf{M}_l^{-1}(\tilde{\mathbf{q}}_l + \mathbf{q}_*) \mathbf{C}_l(\tilde{\mathbf{q}}_l + \mathbf{q}_*, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l$$

Inicialmente, se prueba que el primer término de  $\mathbf{f}_{NH3}$  se desvanece:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\| \left[ \mathbf{M}_l^{-1}(\epsilon^{r_1} \tilde{\mathbf{q}}_l + \mathbf{q}_*) - \mathbf{M}_l^{-1}(\mathbf{q}_*) \right] \left[ K_l [\epsilon^{r_1} \tilde{\mathbf{q}}_l - \epsilon^{r_1} \tilde{\mathbf{q}}_r]^{p\mu} + B_l [\epsilon^{r_2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l]^{p\mathcal{F}} \right] \|}{\epsilon^{2r_2 - r_1}} = 0$$

Observe que  $K_l [\epsilon^{r_1} \tilde{\mathbf{q}}_l - \epsilon^{r_1} \tilde{\mathbf{q}}_r]^{p\mu} = \epsilon^{r_1 p\mu} K_l [\tilde{\mathbf{q}}_l - \tilde{\mathbf{q}}_r]^{p\mu}$  y  $B_l [\epsilon^{r_2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l]^{p\mathcal{F}} = \epsilon^{r_2 p\mathcal{F}} B_l [\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l]^{p\mathcal{F}}$  y, si (6) se cumple, se obtiene:

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\| \left[ \mathbf{M}_l^{-1}(\epsilon^{r_1} \tilde{\mathbf{q}}_l + \mathbf{q}_*) - \mathbf{M}_l^{-1}(\mathbf{q}_*) \right] \left[ K_l [\tilde{\mathbf{q}}_l - \tilde{\mathbf{q}}_r]^{p\mu} + B_l [\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l]^{p\mathcal{F}} \right] \right\| \\ &= \left\| \left[ \mathbf{M}_l^{-1}(\mathbf{q}_*) - \mathbf{M}_l^{-1}(\mathbf{q}_*) \right] \left[ K_l [\tilde{\mathbf{q}}_l - \tilde{\mathbf{q}}_r]^{p\mu} + B_l [\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l]^{p\mathcal{F}} \right] \right\| \\ &= 0 \end{aligned}$$

y usando las propiedades P3 y P4 se muestra que el segundo término de  $\mathbf{f}_{NH3}$  también se desvanece:

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\| \mathbf{M}_l^{-1}(\epsilon^{r_1} \tilde{\mathbf{q}}_l + \mathbf{q}_*) \mathbf{C}_l(\epsilon^{r_1} \tilde{\mathbf{q}}_l + \mathbf{q}_*, \epsilon^{r_2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l) \epsilon^{r_2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l \|}{\epsilon^{2r_2 - r_1}} \\ & \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} m_2 L_c \frac{\| \epsilon^{r_2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l \|^2}{\epsilon^{2r_2 - r_1}} = m_2 L_c \| \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l \|^2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{r_1} = 0 \end{aligned}$$

Siguiendo el mismo procedimiento, se puede expresar  $\mathbf{f}_{NH4}$  como:

$$\mathbf{f}_{NH4} = - \left[ \mathbf{M}_r^{-1}(\tilde{\mathbf{q}}_r + \mathbf{q}_*) - \mathbf{M}_r^{-1}(\mathbf{q}_*) \right] \left[ K_r [\tilde{\mathbf{q}}_r - \tilde{\mathbf{q}}_l]^{p\mu} + B_r [\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r]^{p\mathcal{F}} \right] - \mathbf{M}_r^{-1}(\tilde{\mathbf{q}}_r + \mathbf{q}_*) \mathbf{C}_r(\tilde{\mathbf{q}}_r + \mathbf{q}_*, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r$$

y la prueba de que  $\mathbf{f}_{NH4}$  se desvanece sigue los mismo pasos que  $\mathbf{f}_{NH3}$ . Con  $\mathbf{f}_{NH}(\mathbf{x})$  cumpliendo con las *condiciones de desvanecimiento*, se recurre al Lema 2 para completar la prueba de la conclusión b) de la Proposición 1.

#### 4. SIMULACIONES

Con el propósito de mostrar el desempeño del controlador propuesto, esta sección presenta el resultado de simular un sistema de teleoperación usando el esquema descrito en la Proposición 1. Observe que, si se eligen los pesos de homogeneidad  $r_1 = r_2$ , (5) devuelve el clásico controlador *P+d lineal + cancelación de gravedad* que garantiza convergencia asintótica de los estados al punto de equilibrio. Por otro lado, si se elige  $r_1$  y  $r_2$  de acuerdo con (7), se obtiene un controlador *P+d no lineal + cancelación de gravedad* que permite resolver el problema de teleoperación en tiempo finito. En esta sección se muestran resultados de ambos escenarios.

Las simulaciones se realizaron en MATLAB-Simulink. El sistema de teleoperación que se simula esta conformado por dos robots manipuladores industriales de la compañía Kinova<sup>®</sup> modelo Gen3-Lite, el cual es de 6-GDL. El modelo dinámico de este robot se encuentra disponible en (Garcia-Lopez, 2023).

Las ganancias del controlador del manipulador local son  $K_l = 2$ ,  $B_l = 5$ , y  $K_r = 2$ ,  $B_r = 5$  para el remoto. Las posiciones iniciales de cada robot son:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_l(0) &= \left[ -\frac{19\pi}{36}, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{18}, -\frac{5\pi}{18}, 0, \frac{\pi}{3} \right] \\ \mathbf{q}_r(0) &= \left[ -\frac{7\pi}{18}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{12}, -\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{4} \right] \end{aligned}$$

y se considera que ambos robots parten del reposo  $\dot{\mathbf{q}}_l(0) = \dot{\mathbf{q}}_r(0) = \mathbf{0}$ . Entonces, al seleccionar  $r_1 = r_2 = 1$  se obtiene el controlador P+d lineal y, al elegir  $r_1 = 1.5$ ,  $r_2 = 1$  se consigue la versión de tiempo finito.

##### 4.1 Resultados

Al inicio de cada simulación, ambos manipuladores se encuentran en una posición inicial diferente y no se aplican fuerzas externas, de esta forma se consigue que ambos intenten alcanzar una posición de consenso; después, se introducen fuerzas externas en ambos robots, demostrando que el error de posición y las velocidades se mantienen acotadas; por último, las fuerzas externas desaparecen y los robots vuelven a aproximarse a una nueva posición de consenso y sus velocidades convergen a cero.

En las figuras Fig. 1 y Fig. 2 se muestran los resultados de la simulación del controlador P+d lineal, en el se observa que, en ausencia de fuerzas externas, los errores de posición y las velocidades de ambos manipuladores convergen asintóticamente a cero. Después, cuando se introducen fuerzas externas en el sistema, los errores de posición y velocidades se mantienen acotados.

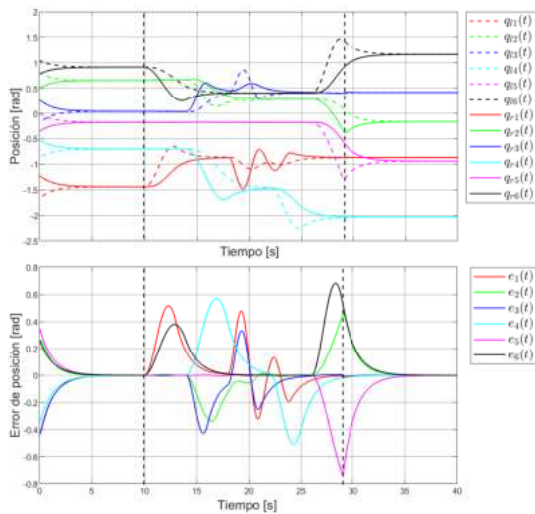


Fig. 1. P+d lineal (posición/error): sin fuerzas externas de 0-10s; con fuerzas externas de 10-29s; sin fuerzas externas de 29-40s.

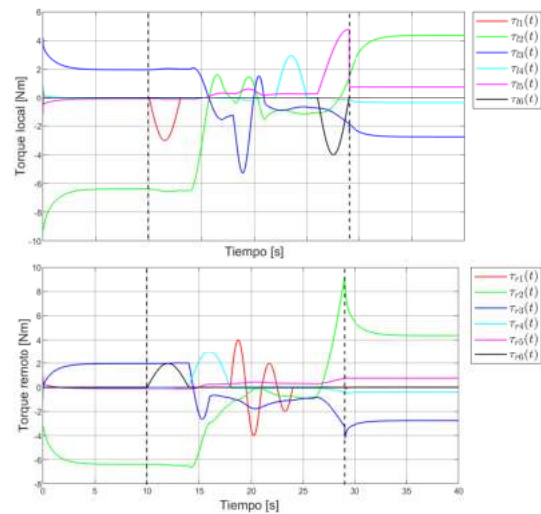


Fig. 3. P+d lineal (torque): sin fuerzas externas de 0-10s; con fuerzas externas de 10-29s; sin fuerzas externas de 29-40s.

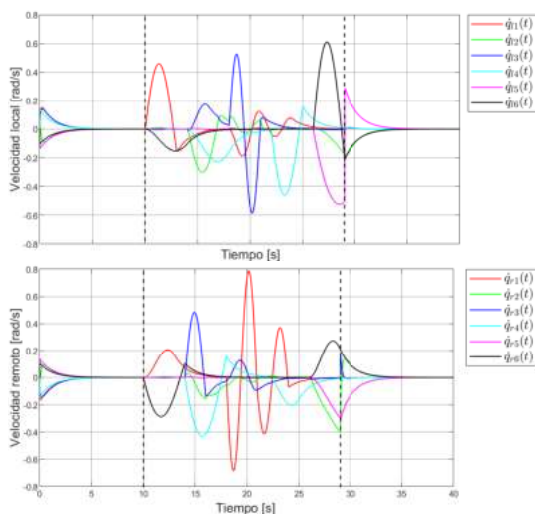


Fig. 2. P+d lineal (velocidad): sin fuerzas externas de 0-10s; con fuerzas externas de 10-29s; sin fuerzas externas de 29-40s.

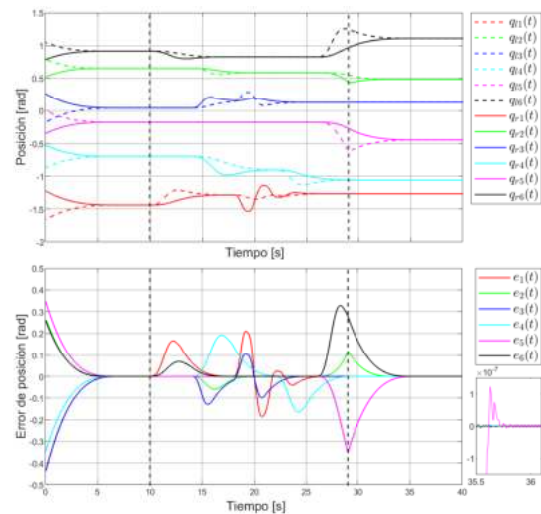


Fig. 4. P+d tiempo finito (posición/error): sin fuerzas externas de 0-10s; con fuerzas externas de 10-29s; sin fuerzas externas de 29-40s.

Los resultados que se muestran en las figuras Fig. 4 y Fig. 5 corresponden al controlador de la Proposición 1. Con este esquema las gráficas muestran resultados similares en el comportamiento transitorio con respecto al esquema lineal cuando no se aplican fuerzas externas, sin embargo, se puede observar que alrededor de los 36s los estados del sistema sí convergen a cero. Además, se observa una reducción del error de posición cuando se aplican fuerzas externas. Finalmente, en la Fig. 6 se muestra el comportamiento de la acción de control, notando que con esta configuración de ganancias y exponentes, en regiones cercanas a error cero, el comportamiento no linealidad de la acción de control ayuda a la convergencia, mismo comportamiento que no está presente en el esquema lineal (ver Fig. 3).

## 5. CONCLUSIONES

En este artículo se propone un controlador continuo tipo proporcional más inyección de amortiguamiento con cancelación de gravedad para resolver el problema de teleoperación en tiempo finito. Se demuestra que, mientras existan fuerzas externas actuando en el sistema, el error de posición entre el robot local y el robot remoto, así como sus velocidades, se mantienen acotados. Por otro lado, cuando no hay fuerzas externas, tanto el error de posición como las velocidades convergen a cero en tiempo finito. Además, se presentan resultados de simulación que sugieren una mejora en el desempeño con respecto al P+d lineal. Actualmente se está trabajando en obtener resultados experimentales utilizando robots industriales.

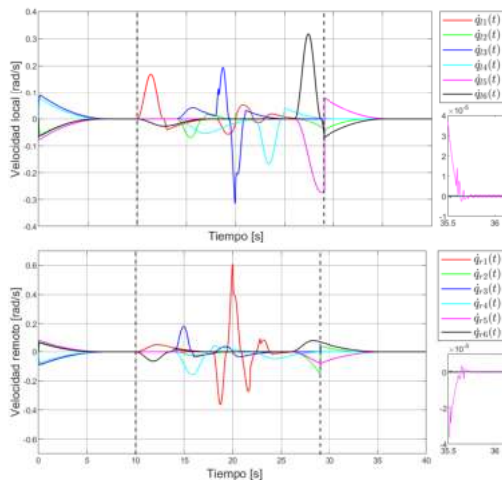


Fig. 5. P+d tiempo finito (velocidad): sin fuerzas externas de 0-10s; con fuerzas externas de 10-29s; sin fuerzas externas de 29-40s.

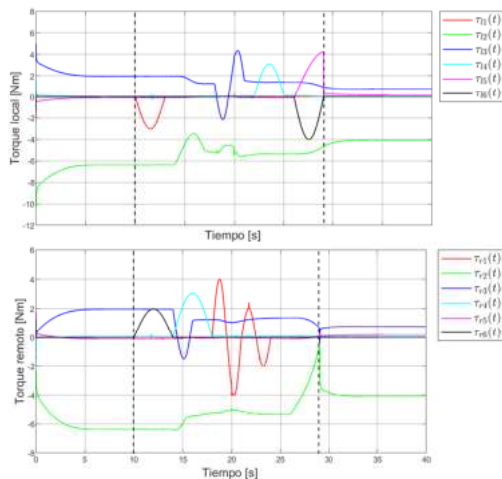


Fig. 6. P+d tiempo finito (torque): sin fuerzas externas de 0-10s; con fuerzas externas de 10-29s; sin fuerzas externas de 29-40s.

## REFERENCIAS

Aldana, C.I., Garcia-Lopez, K., Nuño, E., and Cruz-Zavala, E. (2023). Task-space teleoperation with time-delays and without velocity measurements via a bounded controller. *IEEE Control Systems Letters*, 7, 1141–1146.

Bacciotti, A. and Rosier, L. (2005). *Lyapunov functions and stability in control theory*. Springer-Verlag, New York.

Basañez, L., Nuño, E., and Aldana, C.I. (2023). *Teleoperation and Level of Automation*, 457–482. Springer International Publishing.

Bhat, S. and Bernstein, D. (2000). Finite-time stability of continuous autonomous systems. *SIAM Journal on Control and optimization*, 38, 751–766.

Bhat, S. and Bernstein, D. (2005). Geometric homogeneity with applications to finite-time stability. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 17(2), 101–127.

Dao, P., Nguyen, V., and Liu, Y.C. (2021). Finite-time convergence for bilateral teleoperation systems with disturbance and time-varying delays. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 15(13), 1736–1748.

Ebrahimian, M., Pourmokhtari, M., Ghiyasi, M., Yazdankhoo, B., and Beigzadeh, B. (2024). Online bilateral predictive control for time-delayed teleoperation of snake-like robots. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 110(2), 80.

Garcia-Lopez, K. (2023). Kinova gen3 lite library. <https://robotcontrol-udg.com> [Accessed:7-01-2024].

Gutierrez-Giles, A., Rodriguez-Angeles, A., Schleer, P., and Arteaga, M.A. (2024). Time-varying delayed bilateral teleoperation without force/velocity measurements. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 32(3), 780–792.

Huh, S., Lee, U., Shim, H., Park, J.B., and Noh, J.H. (2011). Development of an unmanned coal mining robot and a teleoperation system. *2011 11th International Conference on Control, Automation and Systems*.

Lv, H., Yang, G., Zhou, H., Huang, X., Yang, H., and Pang, Z. (2020). Teleoperation of collaborative robot for remote dementia care in home environments. *IEEE Journal of Translational Engineering in Health and Medicine*, 8.

Nuño, E., Basañez, L., and Ortega, R. (2011). Passivity-based control for bilateral teleoperation: A tutorial. *Automatica*, 47(3), 485–495.

Venkateswaran, D.B. and Qu, Z. (2020). A passivity-shortage based control design for teleoperation with time-varying delays. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 5(3), 4070–4077.

Wang, Z., Chen, Z., Liang, B., and Zhang, B. (2018). A novel adaptive finite time controller for bilateral teleoperation system. *Acta Astronautica*, 144, 263–270.

Wang, Z., Tian, Y., Sun, Y., and Liang, B. (2020). Finite-time output-feedback control for teleoperation systems subject to mismatched term and state constraints. *Journal of the Franklin Institute*, 357(16), 11421–11447.

Weber, B., Balachandran, R., Riecke, C., Stulp, F., and Selzer, M. (2019). Teleoperating robots from the international space station: Microgravity effects on performance with force feedback. *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*.

Yang, Y., Hua, C., and Guan, X. (2016). Finite time control design for bilateral teleoperation system with position synchronization error constrained. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 46(3), 609–6019.

Zhai, D.H. and Xia, Y. (2014). Robust saturation-based control of bilateral teleoperation without velocity measurements. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 25(15), 2582–2607.

Zhang, H., Song, A., and Shen, S. (2018). Adaptive finite-time synchronization control for teleoperation system with varying time delays. *IEEE Access*, 6, 40940–40949.